

Základy matematiky pro FEK

1. přednáška 24.9.2014

Blanka Šedivá

KMA

zimní semestr 2014/2015

Organizační pokyny

- ▶ přednášející: RNDr.Blanka Šedivá, PhD.
- ▶ kontakt:
 - ▶ sediva@kma.zcu.cz,
 - ▶ telefon 377632618,
 - ▶ konzultační hodiny středa a čtvrtek 13:40-14:40, místnost UC258
- ▶ další přednášející: doc.RNDr.Jaroslav Hora,CSc.
(přednáška ve čtvrtek 1-2 hodina)
- ▶ cvičící: Doc.RNDr. Jaroslav Hora, CSc., RNDr. Milan Mrázek, RNDr. Blanka Šedivá, Ph.D., Ing.Tomáš Ťoupal, Ph.D.
- ▶ přesuny v rámci rozvrhových akcí jsou možné pouze pokud postačuje kapacita učebny a cvičící, ke kterému chcete docházet, s přesunem souhlasí
- ▶ obsah předmětu se řídí *sylabem předmětu*
- ▶ studijní materiály a informace <http://home.zcu.cz/~sediva>

Podmínky pro získání zápočtu

- ▶ Tři písemná práce v průběhu semestru.
 - ▶ 1. zápočtová práce: 4. výukový týden na cvičení, maximální počet bodů 15,
 - ▶ 2. zápočtová práce: 8. výukový týden na cvičení, maximální počet bodů 20.
 - ▶ 3. zápočtová práce: 12. výukový týden, hromadný termín , maximální počet bodů 25.
- ▶ K získání zápočtu je třeba získat minimálně 31 bodů v součtu ze všech tří písemek.
- ▶ Student/ka splní požadavky na zápočet až poté, kdy zkonzultuje své písemné práce s vyučujícím a předloží index k zapsání zápočtu.
- ▶ Pokud student nesplní požadavek pro získání zápočtu během semestru, má možnost napsat ve zkouškovém období opravné zápočtové písemné práce z učiva celého semestru.

Podmínky pro získání zkoušky

- ▶ Zkouška bude probíhat písemnou a ústní formou. Písemná část zkoušky má maximální bodový zisk 20 bodů, doba trvání 90 minut.
- ▶ *Hodnocení písemné části zkoušky:*

Bodový zisk	0 – 9	10 – 13	14 – 17	18 – 20
Hodnocení	nevyhověl	dobře	velmi dobře	výborně

- ▶ Ústní část zkoušky bude zaměřena na rozbor a zdůvodnění postupů užitých při řešení úloh z písemné části, znalost a pochopení definic základních pojmů a matematických vět.
- ▶ Získá-li student v součtu alespoň 46 bodů ze všech tří zápočtových písemek psaných v průběhu semestru, připočte se mu **BONUS 2 body** u písemné části zkoušky v jeho prvním pokusu (pouze v prvním pokusu !!!!!).

Dotazy & Připomínky

Matematické objekty, matematické definice, věty, důkazy

Definice pojmu je charakteristika nějakého matematického jevu, charakteristika (vymezení pojmu) musí být jednoznačná tak, abychom mohli rozhodnout, zda nějaký matematický objekt definici vyhovuje nebo ne. Obvykle v definici vyjmenujeme vlastnosti, které matematický objekt musí mít, abychom ho mohli označovat příslušným pojmem.

Věta (matematická věta) je tvrzení, které můžeme pomocí dříve zavedených definic a jednoduchých logických úvah považovat za platné. Každá věta má svoje předpoklady a dále vlastní tvrzení. Z hlediska logiky má tedy charakter:

Když jsou splněny předpoklady . . . , pak platí

Důkaz je logický postup, pomocí kterého ověřujeme platnost matematické věty.

Matematické značky a symboly

$x \in M$ x je elementem **čti...** *prvek x patří do množiny M ...*

$x \notin M$ x není elementem **čti...** *prvek x patří do množiny M ...*

$\forall x \in M$ velký kvantifikátor **čti...** *pro každé x z množiny M ...*

$\exists x \in M$ malý kvantifikátor **čti...** *existuje x z množiny M ...*

a zároveň značíme $V_1 \wedge V_2$ a slovně interpretujeme **čti...** *platí výrok V_1 a zároveň výrok V_2 ...*

nebo značíme $V_1 \vee V_2$ a slovně interpretujeme **čti...** *platí výrok V_1 nebo výrok V_2 nebo platí oba výroky, tj. platí alespoň jeden z výroků ...*

implikace značíme $V_1 \Rightarrow V_2$ a slovně interpretujeme **čti...** *když platí výrok V_1 pak platí výrok V_2 ... ,*

POZOR pokud výrok V_1 neplatí mohou pro výrok V_2 nastat obě situace, tedy může platit a nemusí

ekvivalence značíme $V_1 \Leftrightarrow V_2$ a slovně interpretujeme **čti...** *výrok V_1 platí právě tehdy, když platí výrok V_2 ...*

Příklady

Příklad definice

Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá **množinou neomezenou shora**, pokud

$$\forall c \in \mathbb{R} \exists x \in M : c < x.$$

čti... Podmnožinu reálných čísel nazýváme neomezenou, pokud pro libovolné reálné číslo c existuje x z množiny M takové, že platí $c < x$

Příklad věta

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3 \Rightarrow x_1 < x_3$$

čti... Necht' pro trojici reálných čísel x_1, x_2, x_3 platí nerovnosti $x_1 < x_2$ a $x_2 < x_3$, pak platí nerovnost $x_1 < x_3$

čti... Pro každou trojici reálných čísel x_1, x_2, x_3 , která splňuje nerovnosti $x_1 < x_2$ a $x_2 < x_3$, pak platí, že splňuje též nerovnost $x_1 < x_3$

- ▶ Zavedení pojmu množina je velice složité, my budeme pod pojmem množina chápat **souhrn matematických objektů, které mají společnou vlastnost** a dokážeme tyto objekty tedy vymezit. Je nezbytně nutné, abychom VŽDY dokázali rozhodnout, zda matematický objekt je prvkem množiny nebo není prvkem množiny.
- ▶ Množinu zavedeme výčtem všech prvků $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- ▶ Nebo zavedeme množinu stanovením charakteristických vlastností $\{x : V(x)\}$, kde $V(x)$ je vlastnost prvku, např. x je sudé číslo.
- ▶ Pokud nad prvky množiny zavedeme algebraické operaci (sčítání, odčítání, násobení a podobně) s prvky mluvíme obvykle o algebře.

Množinové operace I

inkluse značíme $A \subset B$ a slovně interpretujeme množina A je podmnožinou množiny B , platí výrok $x \in A \Rightarrow x \in B$

množinová rovnost (identita) značíme $A \equiv B$ a slovně interpretujeme množina A je ekvivalentní s množinou B , platí výrok $x \in A \Leftrightarrow x \in B$

sjednocení značíme $A \cup B$ a slovně interpretujeme sjednocení množin A a B , platí

$$A \cup B \equiv \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

též používáme symboly $\bigcup_{i=1}^n A_i$ pro sjednocení konečného počtu množin, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ pro sjednocení nekonečného počtu množin a $\bigcup_{i \in I} A_i$ pro sjednocení množin z indexové množiny I

Množinové operace II

průnik značíme $A \cap B$ a slovně interpretujeme průnik množin A a B , platí

$$A \cap B \equiv \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

též používáme symboly $\bigcap_{i=1}^n A_i$ pro průnik konečného počtu množin, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ pro průnik nekonečného počtu množin a $\bigcap_{i \in I} A_i$ pro průnik množin z indexové množiny I

rozdíl značíme $A \setminus B$ a slovně interpretujeme rozdíl množin A a B , resp. doplněk množiny B v množině A platí

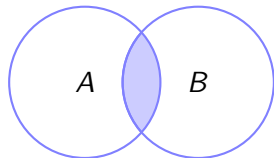
$$A \setminus B \equiv \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

kartézský součin značíme $A \times B$ a slovně interpretujeme kartézský součin množin A a B (ZÁLEŽÍ NA POŘADÍ) platí

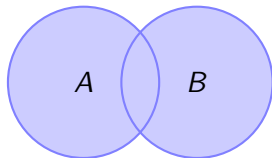
$$A \times B \equiv \{[x; y] : x \in A \wedge y \in B\}$$

Vénnovy diagramy

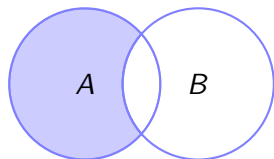
$$A \cap B$$



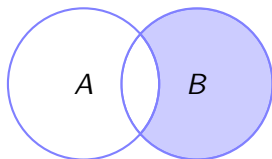
$$A \cup B$$



$$A - B$$



$$B - A$$



Číselné množiny

- ▶ Přirozená čísla značíme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- ▶ Přirozená čísla rozšířená o nulu značíme $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- ▶ Celá čísla značíme $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- ▶ Racionální čísla značíme $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, \text{ nesoudělná, } q \neq 0 \right\}$
- ▶ Reálná čísla značíme \mathbb{R} (je příkladem nespočetné množiny)
- ▶ Iracionální čísla $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ není racionální}\}$, například $\pi, e, \sqrt{2}, \dots$
- ▶ Komplexní čísla značíme $\mathbb{C} = \{[x, y] : x, y \in \mathbb{R}, \text{ uspořádaná dvojice reálných čísel}\}$

Platí

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Úmluva

Od teď budeme předpokládat, že pro výše uvedené číselné množiny známe základní operace: porovnat dvě čísla, sčítat, odčítat, násobit, dělit.

Intervaly jako speciální podmnožiny \mathbb{R}



Omezené intervaly

uzavřený interval $(a; b)$

... $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$



polouzavřený interval $(a; b)$

$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$



polouzavřený interval $(a; b)$

$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$



otevřený interval $(a; b)$

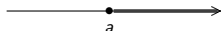
$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$



Neomezené intervaly

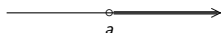
$(a; +\infty)$

... $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$



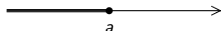
$(a; +\infty)$

$\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$



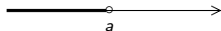
$(-\infty; a)$

$\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$



$(-\infty; a)$

$\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$



$(-\infty; +\infty)$

\mathbb{R}



Omezenost množin $M \subset \mathbb{R}$

Definice: shora omezená množina

Množina M se nazývá **shora omezená množina**, pokud existuje reálné číslo $h \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechny $x \in M$ platí $x < h$.

čti... pro každé číslo x z množiny M platí, že x je menší než číslo h ...

Definice: zdola omezená množina

Množina M se nazývá **zdola omezená množina**, pokud existuje reálné číslo $d \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechny $x \in M$ platí $d < x$.

Def: Množina M se nazývá **omezená množina**, pokud je omezená zdola i shora. Definice říkají, že musí existovat čísla h, d , ale takových čísel může existovat i více.

Maximum a minimum množiny

Definice: maximum množiny M

Číslo $a \in M$ se nazývá **maximem množiny** M , pokud pro každé číslo x z množiny M platí $x \leq a$.

Definice: minimum množiny M

Číslo $b \in M$ se nazývá **minimem množiny** M , pokud pro každé číslo x z množiny M platí $a \leq x$.

Maximum množiny M značíme $a = \max M$, minimum značíme $b = \min M$.
Maximum i minimum jsou vždy prvky množiny M .
Maximum množiny i minimum je určeno jednoznačně.

Vztah mezi omezeností množiny a existencí minima a maxima

- ▶ Pokud existuje maximum množiny, pak je funkce omezené shora.
- ▶ Pokud existuje minimum množiny, pak je funkce omezené zdola.
- ▶ Ale ...

Příklady

- ▶ otevřené intervaly $M_1 = (2; 10)$, $M_2 = (-\infty; 1000)$
 - ▶ polouzavřené intervaly $M_3 = \langle -20; 0 \rangle$
 - ▶ $M_4 = \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} = \{1 - 1, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots\}$
- ▶ Množiny M_1, M_2, M_3, M_4 jsou shora omezené, ale neobsahují maximální prvek.
 - ▶ Horní hranici omezující množinu nazýváme **supremem množiny M** .

Supremum množiny M

Definice: supremum množiny M

Číslo $a \in \mathbb{R}$ se nazývá **supremem množiny M** , jestliže platí zároveň následující dvě podmínky

- (1.) pro každé $x \in M$ platí, že $x \leq a$
- (2.) číslo a je nejmenší číslo splňující podmínku (1.).

- ▶ Supremum množiny M značíme $\sup M$.
- ▶ Supremum množiny může, ale nemusí ležet v množině M .
- ▶ Supremum množiny je vždy určeno jednoznačně, tj. pro jednu množinu neexistují dvě suprema.
- ▶ **Věta:** Pokud má množina maximum, pak má supremum a platí $\max M = \sup M$.
- ▶ **Věta:** Množina je omezená shora právě tehdy, když má supremum.
- ▶ Příkladem množiny, která nemá supremum je interval $(0; +\infty)$.

Infimum množiny M

Definice: infimum množiny M

Číslo $a \in \mathbb{R}$ se nazývá **infimum množiny** M , jestliže platí zároveň následující dvě podmínky

- (1.) pro každé $x \in M$ platí, že $a \leq x$,
- (2.) číslo a je největší číslo splňující podmínku (1.).

- ▶ Infimum množiny M značíme $\inf M$.
- ▶ Infimum množiny může, ale nemusí ležet v množině M .
- ▶ Infimum množiny je vždy určeno jednoznačně, tj. pro jednu množinu neexistují dvě infima.
- ▶ **Věta:** Pokud má množina minimum, pak má infimum a platí $\min M = \inf M$.
- ▶ **Věta:** Množina je omezená zdola právě tehdy, když má infimum.
- ▶ Příkladem množiny, která nemá infimum je interval $(-\infty; +\infty)$.