Základy matematiky pro FEK (polynomy)

3. přednáška 8.10.2014

Blanka Šedivá

KMA

zimní semestr 2014/2015

Polynomy jako příklad funkce

Definice: Polynom stupně n

Polynomem (mnohočlenem) P proměnné $x \in \mathbb{R}$ nazýváme předpis

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla a platí $a_n \neq 0$.

- lineární funkce $f: y = a_0 + a_1 x$ je příkladem polynomu stupně 1;
- kvadratická funkce $f: y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ je příkladem polynomu stupně 2;
- polynom lze chápat dvojím způsobem
  - jako funkci proměnné x,
  - jako vektor reálných čísel $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$

Mezi oběma přístupy lze „libovolně“ přecházet a využívat tak, jak je pro danou úlohu vhodné.

Příklady polynomů

- $5x^2 + 4x + 6 \qquad \Rightarrow$ JE polynom stupně 2
- $7x^{10} + 23.2x \qquad \Rightarrow$ JE polynom stupně 10
- $5 \qquad \Rightarrow$ JE polynom stupně 0
- $4x^3 + \pi x - 19 \qquad \Rightarrow$ JE polynom stupně 3
- $\sin x + 7x^5 \qquad \Rightarrow$ NENÍ polynom
- $0 \qquad \Rightarrow$ JE polynom, stupeň není definován
- $\frac{4}{3}x^3 + x^7 + 2 \qquad \Rightarrow$ JE polynom stupně 3
- $5x^{-6} + x^5 \qquad \Rightarrow$ NENÍ polynom
- $(4 + 2\mathrm{i})x^2 + \mathrm{i}\,x^7 \qquad \Rightarrow$ JE komplexní polynom stupně 7
  (koeficienty a_j jsou komplexní)

Definice: Kořen polynomu

Nechť je dán polynom $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

Řekneme, že číslo c je **kořenem polynomu** (nulovým bodem polynomu) $P(x)$, jestliže platí $P(c) = 0$.

- kořen polynomu je číslo, ve kterém graf této funkce „protíná“ osu x;
- **ZÁKLADNÍ VĚTA ALGEBRY** Každý polynom stupně $n \geq 1$ má v komplexním oboru $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.
- Polynom nemusí mít obecně žádný **reálný** kořen - například polynom $p(t) = 1 + t^2$ nemá žádný reálný kořen, ale má dva imaginární kořeny $-\mathrm{i}$ a i.

Rozklad polynomu na kořenové činitele

- Jestliže c je kořenem polynomu $P(x)$, pak polynom $x - c$ dělí polynom $P(x)$ beze zbytku, tj. $P(x) = (x - c) \cdot S(x)$; $S(x)$ je polynom o stupeň nižší než polynom $P(x)$;
- Jestliže $c = a + \mathrm{i}\, b$ je komplexním kořenem polynomu $P(x)$, pak kořenem polynomu je také komplexně sdružené číslo $\overline{c} = a - \mathrm{i}\, b$ a platí

$$P(x) = (x - (a + \mathrm{i}\, b)) \cdot (x - (a - \mathrm{i}\, b)) \cdot S(x).$$