Základy matematiky pro FEK

2. přednáška 1.10.2014

Blanka Šedivá

KMA

zimní semestr 2014/2015

Proměnné a konstanty

Pracujeme s množinou M (například množina čísel, množina prvků, které jsou reprezentovány číslem, ...)

- konstantou z množiny M chápeme pevně daný prvek této množiny (i když jeho hodnotu přesně neznáme)
- konstanty obvykle značíme písmeny a, b, c, ...
- proměnná z množiny M je symbol, který zastupuje různé hodnoty z množiny M
- pokud se jedna proměnná systematicky mění v závislosti na jiné proměnné (nebo jiných proměnných), mluvíme o funkci.

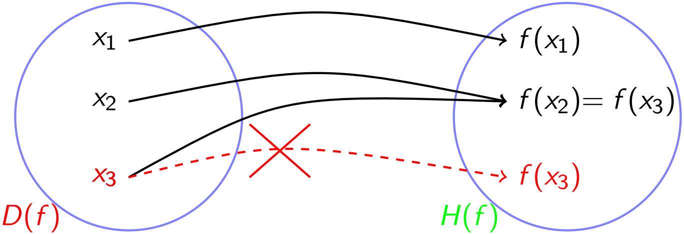
Funkce jedné proměnné

Definice: Funkce jedné proměnné

$$f : y = f(x)$$

x ...argument funkce, nezávislá proměnná $\rightarrow$ definiční obor funkce $D(f) \subset \mathbb{R}$

y ...funkční hodnota, závislá proměnná $\rightarrow$ obor hodnot funkce $H(f) \subset \mathbb{R}$



Pro každé x existuje právě jedno y.

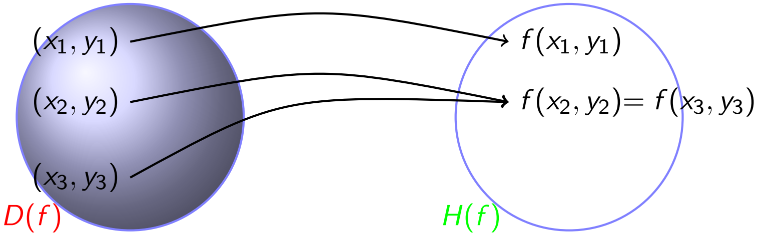
Funkce dvou proměnných

Definice: Funkce dvou proměnných

$$f : z = f(x, y)$$

x, y . . . argumenty funkce, nezávislá proměnná $\rightarrow$ definiční obor funkce $D(f) \subset \mathbb{R}^2$

z . . . funkční hodnota, závislá proměnná $\rightarrow$ obor hodnot funkce $H(f) \subset \mathbb{R}$



Pro každé $[x, y]$ existuje právě jedno z.

Způsoby zadávání funkcí

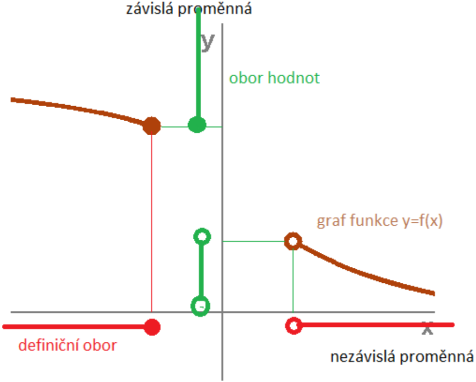
- výčtem funkčních hodnot, obvykle ve formě tabulky

x	1	2	3	4	...
y	1	4	9	9	...

- analytickým zápisem (vzorec, rovnice, několik rovnic pro různé části definičního oboru + definiční obor) pomocí symbolických representací
  Např.
  $f : y = -2x + 3$
  $f(x) := \begin{cases} x^2 & \textit{pro} \quad x \in (-3, 3) \\ 9 & \textit{jinak} \end{cases}$
  $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
  NE KAŽDÁ SYMBOLICKÁ REPRESENTACE ODPOVÍDÁ FUNKCÍM například. $y^2 = x$ *není funkce* $y = f(x)$, *protože* $y = \pm\sqrt{x}$
- grafickým zádáním

Graf funkce f

Vizualizace vztahu mezi prvky definičního oboru (vodorovná osa) a prvky oboru hodnot (svislá osa)



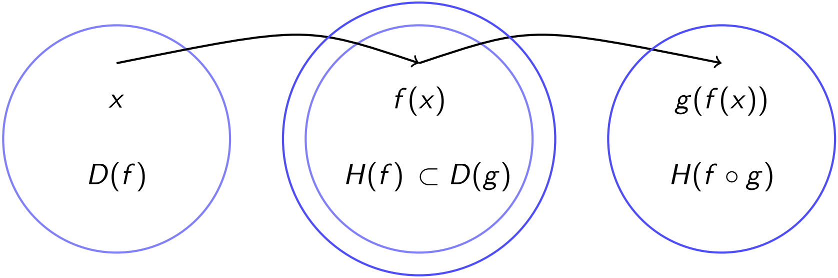
Operace s funkcemi f_1 a f_2

- porovnání dvou funkcí (pouze pro funkce se stejným definičním oborem, pracuji s funkčními hodnotami)
  - rovnost (ekvivalence)... pro všechna x z definičního oboru platí, že dostanu stejné funkční hodnoty $f_1(x) = f_2(x)$
  - „větší, menší"... pro všechna všechna x z definičního oboru platí příslušná nerovnost, např. $f_1(x) \leq f_2(x)$
- „zúžení definičního oboru funkce", restrikce funkce ... zaměřím se pouze na část definičního oboru
- „rozšíření definičního oboru funkce", přidám do definičního oboru další hodnoty
- algebraické operace (pouze pro funkce se stejným definičním oborem, pracuji s funkčními hodnotami)
  - sčítání, odčítání funkcí $g = f_1 \pm f_2 \Leftrightarrow \forall x \in M: \ g(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$
  - násobení, dělení funkcí

Skládání a rozklady funkcí

Definice: Skládání funkcí

Funkce h je složena z vnitřní funkce f a vnější funkce g, zapíši $h = f \circ g$ pokud platí
$$h(x) = g(f(x)).$$

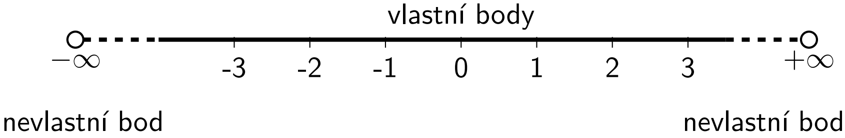


Vlastnosti skládání a rozkládání

- u skládání záleží na pořadí $f(g(x)) \neq g(f(x))$
  například $\left(\sqrt{x}\right)^2 \neq \sqrt{x^2}$
- v případě, že obor hodnot vnitřní funkce je větší než definiční obor, je třeba provést restrikci tak, aby platilo $H(f) \subset D(g)$
  například $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, kde vnitřní funkce je $x^2 - 1$ je třeba provést restrikci z množiny $\mathbb{R}$ na množinu $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- rozklad na jednoduší funkce není jednoznačný
  například pro funkci $h(x) = \frac{x-1}{2}$, kterou lze napsat též jako $h(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ lze postupovat
  (a) nejprve odčítám $f(x) = x - 1$ a pak dělím $g(x) = \frac{x}{2}$
  (b) nejprve dělím $f(x) = \frac{x}{2}$ a pak odčítám $g(x) = x - \frac{1}{2}$

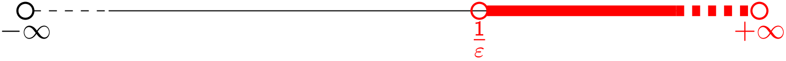
Representace reálných čísel pomocí přímky

- reálná čísla $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- grafickým vyjádřením reálných čísel je přímka



- okolí vlastního bodu $U(x, \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$ je kladné číslo je otevřený interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$

- okolí nevlastního bodu $+\infty$ označujeme $U(+\infty, \varepsilon)$ je otevřený interval $\left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$



Globální a lokální vlastnosti funkcí

Globální vlastnosti

- vztahují se k celému definičnímu oboru
- vypovídají o chování celé funkce

např.

- omezenost $\times$ neomezenost funkce
- monotónnost funkce (rostoucí, klesající, konstantní)
- globální extrémy funkce (maxima, minima)
- sudost, lichost funkce
- periodičnost funkce

Lokální vlastnosti

- vztahují se k okolí bodu
- popisují chování pouze v „blízkosti“ bodu

např.

- lokální omezenost
- lokální monotónnost
- lokální extrémy

Sudá a lichá funkce

Definice: Sudá funkce

Funkce je sudá, pokud

(a) definiční obor je symetrický, tj.

pro každé $x \in D(f)$ je též $-x \in D(f)$

(b) pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = f(x)$

Definice: Lichá funkce

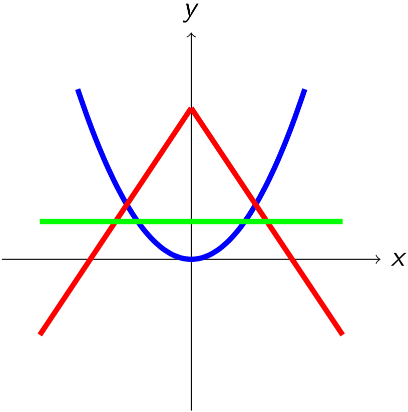
Funkce je sudá, pokud

(a) definiční obor je symetrický,

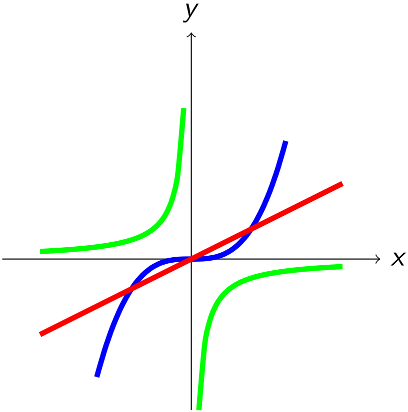
(b) pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = -f(x)$

Sudá a lichá funkce

Graf sudé funkce je symetrický vzhledem k ose y



Graf liché funkce je symetrický vzhledem k počátku souřadných os



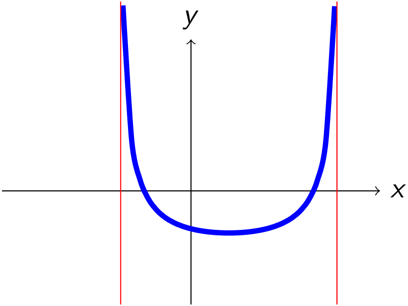
Většina funkcí není ani lichá ani sudá ...

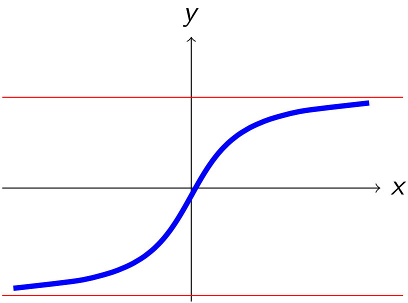
Omezená a neomezená funkce

Definice: Omezená funkce

Funkce je **omezená**, pokud má omezený obor hodnot.

POZOR na rozdíl mezi funkcí z omezeným definičním oborem a omezenou funkcí.





Lokální a globální extrémy (maxima a minima)

Definice:Globální maximum

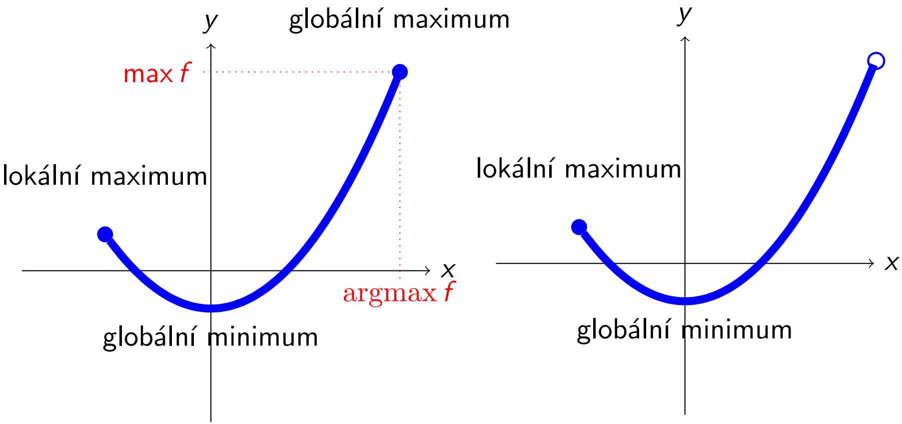
V bodě $a \in D(f)$ má funkce **globální maximum**, pokud pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \leq f(a)$

Definice:Lokální maximum

V bodě $a \in D(f)$ má funkce **lokální maximum**, pokud existuje okolí bodu a takové, že pro všechna $x \in D(f) \cap U(a, \varepsilon)$ platí $f(x) \leq f(a)$

- Každé globální maximum je též lokálním maximem.
- Existují ostrá maxima ($f(x) < f(a)$) a neostrá maxima ($f(x) \leq f(a)$).
- Číslo a označujeme $a = \mathrm{argmax}\, f$ a číslo $f(a) = \max f$

Lokální a globální extrémy II



Monotónní funkce

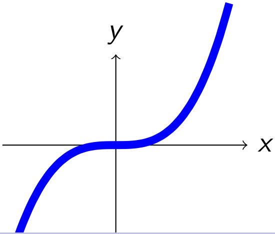
Definice: Rostoucí funkce

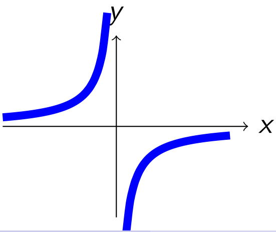
Funkci nazýváme **rostoucí**, pokud platí

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

čti... *pokud pro libovolné dva body z definičního oboru* x_1, x_2 *splňující* $x_1 < x_2$ *platí* $f(x_1) \leq f(x_2)$ ...

Pokud platí $f(x_1) < f(x_2)$ jedná se o **ostře rostoucí funkci**.





Vztah mezi extrémy a omezeností

Věta

Pokud má funkce globální maximum, pak je omezená shora.
Pokud má funkce globální minimum, pak je omezená zdola.

- Existence lokálních extrémů nepostačuje k omezenosti funkce.
- Opačné tvrzení: Pokud je funkce omezená, pak má globální maximum neplatí. V takovémto případě má pouze obor hodnot supremum.
- Pokud má funkce f v bodě a lokální maximum, pak existuje ε tak, že v intervalu $(a-\varepsilon, a)$ je funkce rostoucí a v intervalu $(a, a+\varepsilon)$ je funkce klesající.
- Rostoucí funkce (i ostře rostoucí) může být omezená i neomezená.

Úlohy k zamyšlení

- Načrtněte graf funkce, která má v bodě $a = -3$ lokální minimum, $f(a) = 5$ a funkce je neomezená.
- Načrtněte graf funkce, která má více globálních maxim (ve více bodech nabývá maximální hodnoty).
- Načrtněte graf kvadratické funkce, který má jedno lokální a jedno globální maximum.
- Načrtněte graf kvadratické funkce, který má pouze lokální maximum.
- Načrtněte graf kvadratické funkce, který má pouze globální maximum.
- Načrtněte graf funkce, která je ostře klesající a je omezená zdola.
- Načrtněte graf funkce, která má pouze neostré lokální extrémy.
- Načrtněte graf funkce, která je sudá a má dvě lokální maxima a jedno lokální minimum.
- Načrtněte graf funkce, která je lichá má dvě lokální maxima a jedno lokální minimum.

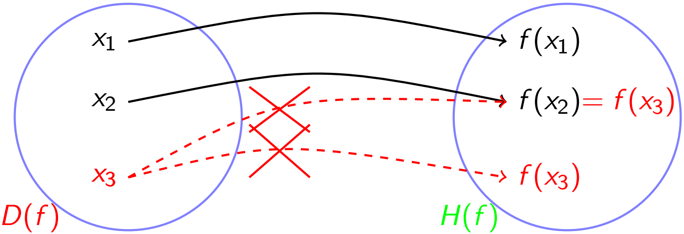
Prostá funkce

Definice:Prostá funkce

Funkce f je **prostá funkce**, pokud

$$x_1, x_2 \in D(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

čti. . . *pokud pro libovolné dva různé body jsou různé jejich funkční hodnoty* . . .

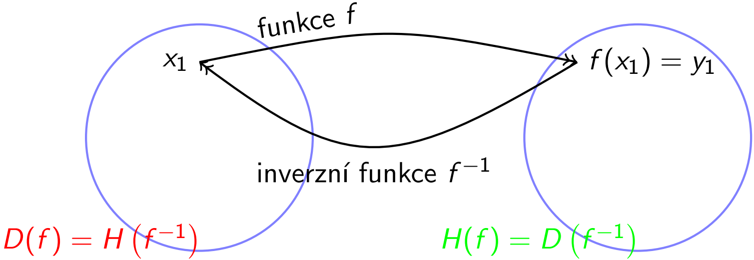


Inverzní funkce

Definice:Inverzní funkce

Pro prostou funkce f definujeme **inverzní funkci** f^{-1} vztahem

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$



Vlastnosti inverzní funkce

- inverzní funkce existuje pouze pro prosté funkce
- definiční obory a obory hodnot se „vymění“ $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$
- skládáním funkce s funkcí inverzní dostanu identitu $\forall x \in D(f) : f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ a $f^{-1}(f(x)) = 0$
- grafy funkce f a funkce inverzní f^{-1} jsou symetrické vzhledem k ose 1. a 3. kvadrantu