Základy matematiky pro FEK (limity funkcí)

3. přednáška 8.10.2014

Blanka Šedivá

KMA

zimní semestr 2014/2015

Limita funkce

- uvažujeme funkci f a bod x_0, který leží uvnitř nebo na hranici definičního oboru;
- zajímáme se o funkční hodnoty v *okolí bodu* x_0;
- zapisujeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ a **čti**. . . *limita funkce f v bodě x_0 je A . . .*;
- limita je **lokální vlastností** funkce;
- bod x_0 je bode související s definičním obore, tedy na vodorovné ose;
- bod A je bode související s oborem hodnot, tedy na svislé ose;
- body x_0 a A mohou být vlastní (konečné hodnoty) i nevlastní ($-\infty$, $+\infty$).

Vlastní limita ve vlastním bodě

Definice: Vlastní limita ve vlastním bodě

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní limitu, tedy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

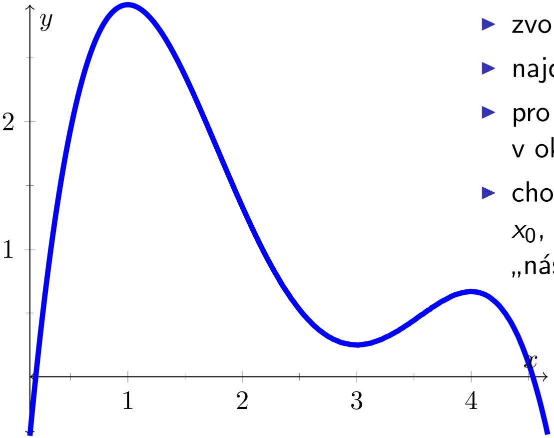
pokud existuje číslo $A \in \mathbb{R}$, tak, že $\forall \varepsilon > 0 \exists\, \delta > 0$ tak, že

$$\forall x : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0, \text{platí } f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

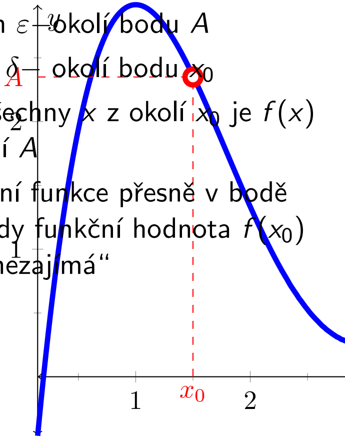
čti. . . *pro libovolné ε existuje δ tak, že pro všechny body x z $\delta-$okolí bodu x_0 leží funkční hodnoty $f(x)$ v $\varepsilon-$okolí bodu A . . .*

„když si vyberu $\varepsilon-$okolí bodu A najdu $\delta-$okolí bodu x_0 takové,že . . . “

Ilustrace vlastní limity ve vlastním bodě

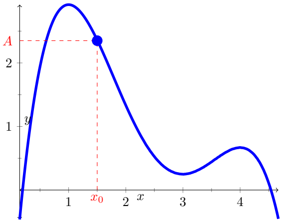


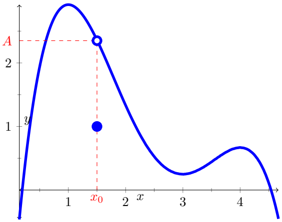
- mám daný bod x_0 a hodnotu A
- zvolím $\varepsilon-$okolí bodu A
- najdu $\delta-$ okolí bodu x_0
- pro všechny x z okolí x_0 je $f(x)$ v okolí A
- chování funkce přesně v bodě x_0, tedy funkční hodnota $f(x_0)$ „nás nezajímá“



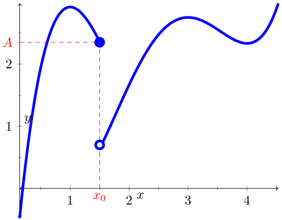
Souvislost limity a funkční hodnoty

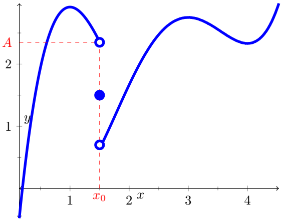
- Funkce má v bodě x_0 limitu A





- Funkce nemá v bodě x_0 limitu A





Jednostranné limity

Definice: Vlastní limita ve vlastním bodě zprava

Funkce f má v bodě x_0 vlastní limitu zprava, tedy $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$ pokud existuje číslo $A \in \mathbb{R}$, tak, že $\forall \varepsilon > 0 \exists\, \delta > 0$ tak, že

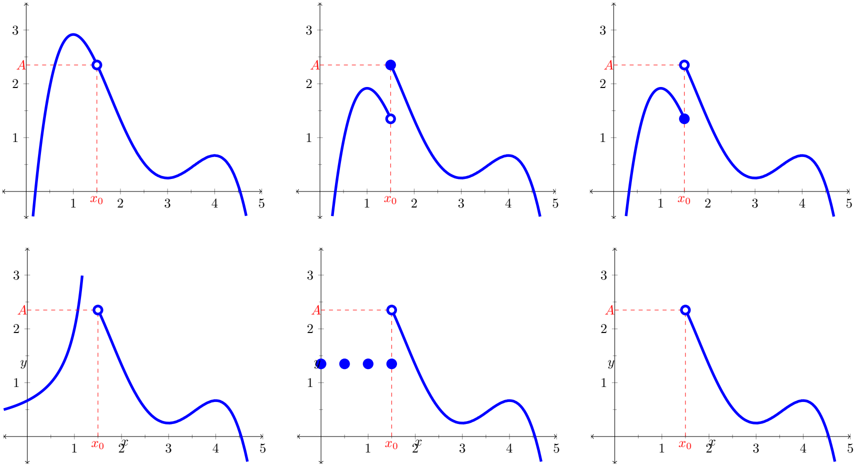
$$\forall x : x \in (x_0, x_0 + \delta), x \neq x_0, \text{platí } f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

Definice: Vlastní limita ve vlastním bodě zleva

Funkce f má v bodě x_0 vlastní limitu zleva, tedy $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$ pokud existuje číslo $A \in \mathbb{R}$, tak, že $\forall \varepsilon > 0 \exists\, \delta > 0$ tak, že

$$\forall x : x \in (x_0 - \delta, x_0), x \neq x_0, \text{platí } f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

Ukázka funkcí, u nichž $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A$



Nevlastní limita $+\infty$ ve vlastním bodě

Definice: Nevlastní limita ve vlastním bodě

Funkce f má v bodě x_0 limitu $+\infty$, tj. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ pokud $\forall K, \exists\, \delta > 0$ tak, že pro

$$\forall x : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0, \text{platí } f(x) \in (K, +\infty)$$

- funkční hodnoty funkce f v okolí bodu x_0 „směřují“ k velkým hodnotám;
- čím blíže jsme k bodu x_0 tím větší je funkční hodnota funkce f;
- funkční hodnota může být konečné číslo nebo funkce f není v bodě x_0 definována a funkční hodnota neexistuje.

Nevlastní limita $-\infty$ ve vlastním bodě

Definice: Nevlastní limita ve vlastním bodě

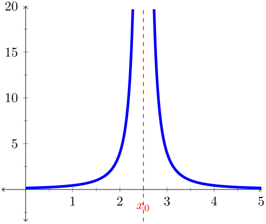
Funkce f má v bodě x_0 limitu $-\infty$, tj. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ pokud $\forall K, \exists\, \delta > 0$ tak, že pro

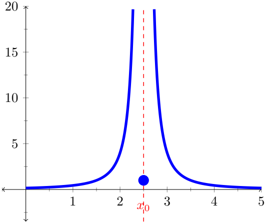
$$\forall x : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0, \text{platí } f(x) \in (-\infty, K)$$

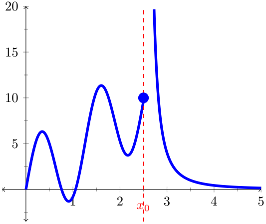
- funkční hodnoty funkce f v okolí bodu x_0 „směřují“ k malým hodnotám;
- čím blíže jsme k bodu x_0 tím menší je funkční hodnota funkce f;
- funkční hodnota může být konečné číslo nebo funkce f není v bodě x_0 definována a funkční hodnota neexistuje.

Ilustrace nevlastní limity ve vlastním bodě

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$$







Limita v nevlastním bodě $+\infty$

Chování funkce f pro „velké“ hodnoty x nebo-li studujeme chování funkce f v blízkosti bodu $+\infty$. V tomto případě mohou nastat čtyři situace

(a) Funkční hodnoty $f(x)$ pro velké hodnoty x směřují k nějakému konkrétnímu číslu A.
Vlastní limita A v nevlastním bodě $+\infty$.

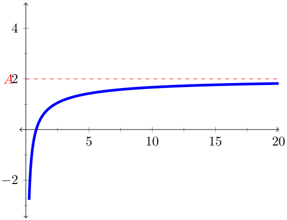
(b) Funkční hodnoty $f(x)$ pro velké hodnoty x směřují k stále větším a větším hodnotám.
Nevlastní limita $+\infty$ v nevlastním bodě $+\infty$.

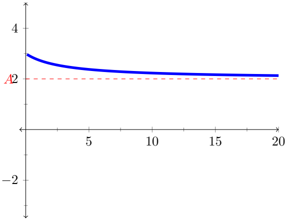
(c) Funkční hodnoty $f(x)$ pro velké hodnoty x směřují k stále menším a menším hodnotám.
Nevlastní limita $-\infty$ v nevlastním bodě $+\infty$.

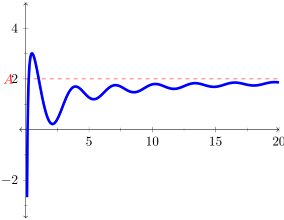
(d) Funkční hodnoty $f(x)$ pro velké hodnoty x nevykazují žádnou z výše uvedených vlastností, ale oscilují.
Limita v nevlastním bodě $+\infty$ neexistuje.

Ilustrace limity v nevlastním bodě $+\infty$

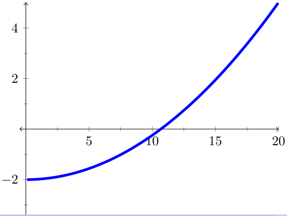
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$



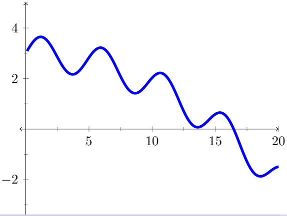




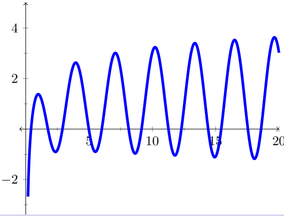
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ neexistuje

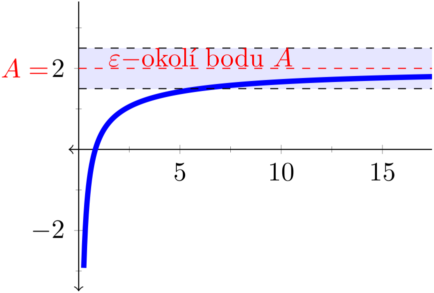


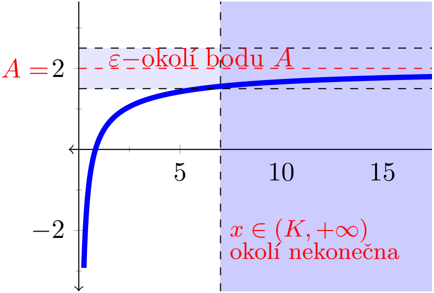
Definice limity v nevlastním bodě

Definice:Vlastní limita v nevlastním bodě

Funkce f má v bodě $+\infty$ limitu A, tj. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ pokud $\forall\varepsilon > 0, \exists\, K$ tak, že pro

$$\forall x : x \in (K, +\infty), \text{platí } f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$



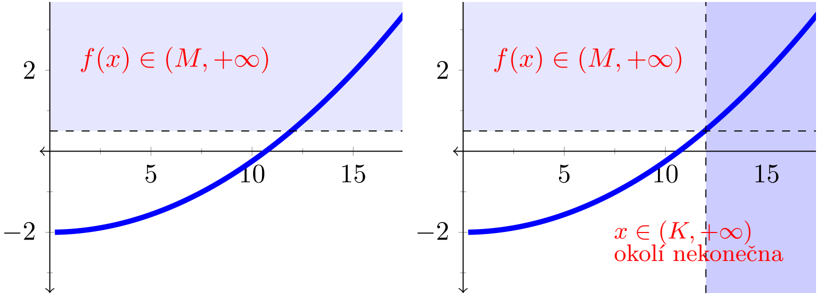


Definice limity v nevlastním bodě

Definice:Nevlastní limita v nevlastním bodě

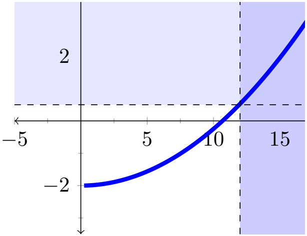
Funkce f má v bodě $+\infty$ limitu $+\infty$, tj. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ pokud $\forall M, \exists\, K$ tak, že pro

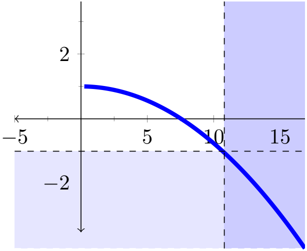
$$\forall x : x \in (K, +\infty), \text{platí } f(x) \in (M, +\infty)$$



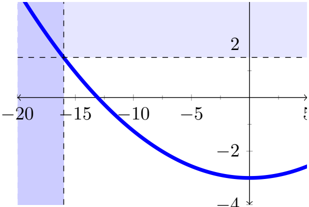
Ilustrace nevlastních limit v nevlastních bodech

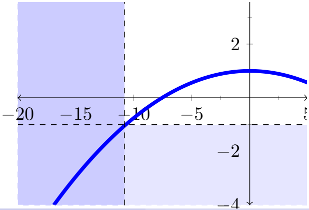
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$





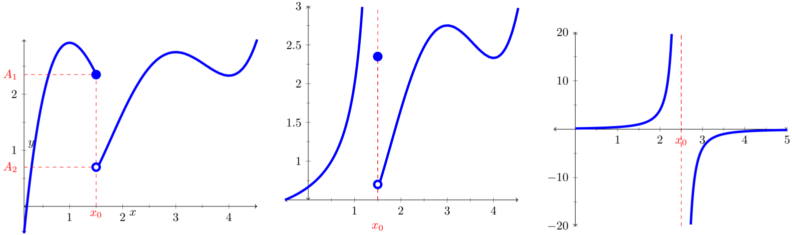
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



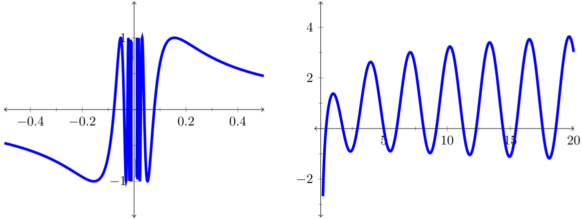


Kdy limita neexistuje?

- Pokud funkce má jinou limitu zleva a jinou zprava.



- Pokud funkce má oscilující charakter v okolí sledovaného bodu.



Příklady vybraných limit I

- $\lim\limits_{x \to x_0} a = a$ limita konstanty v libovolném bodě je konstanta
- $$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} \text{neexistuje} & \text{pokud } x \in (-\infty, -1\rangle \\ 0 & x \in (-1, 1) \\ 1 & x = 1 \\ +\infty & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

  například $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (\mathrm{e})^x = +\infty$, ...

Příklady vybraných limit II

- uvažujme dva polynomy, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ a $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, pak platí

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{pokud } st(P) > st(Q) \quad \text{a} \quad a_n > 0 \\ -\infty & st(P) > st(Q) \quad \text{a} \quad a_n < 0 \\ \frac{a_n}{b_n} & st(P) = st(Q) \\ 0 & st(P) < st(Q) \end{cases}$$

  například

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-1}{2x+5} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x+x^3}{x^9+8} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+x-1}{2x^2+5} = \frac{3}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x-2x^3}{x^2+8} = -\infty,$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Vlastnosti limit

Věta: o jednoznačnosti limit

Funkce f má v bodě x_0 nejvýše jednu limitu.

Věta: o vztahu dvoustranné a jednostranných limit

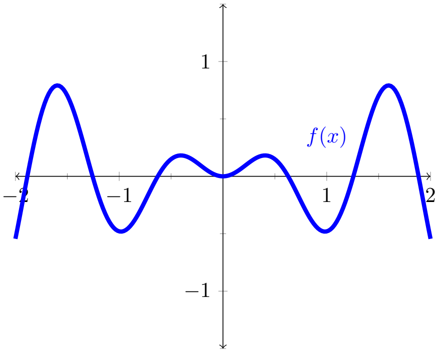
Funkce f má v bodě limitu právě tehdy, když limita zleva se rovná limitě zprava.

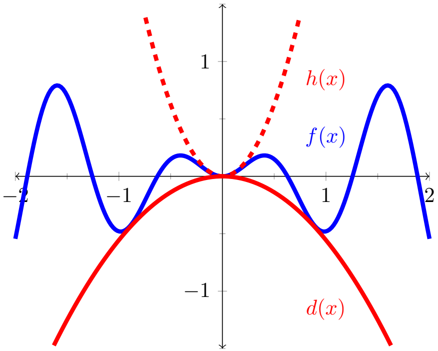
$$\lim_{x \to +x_0} f(x) = \lim_{x \to -x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Věta: o sevření

Jestliže, v okolí bodu x_0 platí $d(x) \leq f(x) \leq h(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} d(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Ilustrace věty o sevření





Algebra limit pro konečné (vlastní) limity

Věta: o algebře limit

Jestliže funkce f, g mají **vlastní** limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ v bodě x_0 (bod může být vlastní i nevlastní), pak platí

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B}$ pro $B \neq 0$

čti. . . *konečné limity můžeme sčítat a odčítat, násobit a dělit (pokud nedělíme nulou) . . .*

Sčítání, odčítání, násobení a dělení s nekonečnem I

Označíme A libovolné kladné reálné číslo, pak

- přičítáním a odčítáním se nekonečno nemění

$$+\infty + A = +\infty - A = +\infty + \infty = +\infty$$

- ALE $+\infty - \infty =$????? „může být cokoliv"
- násobením nenulovým číslem se nekonečno nemění

$$(+\infty) \cdot A = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \cdot A = (+\infty) \cdot (-A) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-A) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

- ALE $(+\infty) \cdot 0 =$????? „může být cokoliv"

Sčítání, odčítání, násobení a dělení s nekonečnem II

- dělení nekonečnem je vždy nula

$$\frac{A}{+\infty} = \frac{-A}{+\infty} = \frac{A}{-\infty} = \frac{-A}{-\infty} = 0$$

- ALE $\frac{+\infty}{+\infty}$ =????? „může být cokoliv“
- při dělení nulou záleží na znaménkách

$$\frac{A}{0+} = \frac{-A}{0-} = +\infty$$

$$\frac{A}{0-} = \frac{-A}{0+} = -\infty$$

kde $0+$ znamenají malá kladná čísla a $0-$ malá záporná čísla

- ALE $\frac{0}{0}$ =????? „může být cokoliv“