Základy matematiky pro FEK (spojitost funkcí)

4. přednáška 15.10.2014

Blanka Šedivá

KMA

zimní semestr 2014/2015

Limita funkce

- V případech, kdy jsme studovali limitní chování funkce f v okolí bodu x_0 jsme ukázali, že funkční hodnota a limitní hodnota mohou, ale nemusí být shodné.
- Přitom body, ve kterých jsou limitní hodnota a funkční hodnota funkce f shodné, jsou zajímavé, protože v těchto bodech je graf funkce „nepřerušen".
- Matematicky používáme termín, že funkce je ve studovaném bodě spojitá.

Spojitost f v bodě x_0

Definice: spojitost funkce v bodě

Funkce f je spojitá v bodě x_0, pokud $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

čti... *Řekneme, že funkce f je spojitá v (hromadném) bodě x_0 pokud limita funkce f v bodě x_0 je rovna funkční hodnotě v době x_0.* ...

(a) O spojitosti má smysl mluvit pouze v takovém bodě, kdy existují další body v jeho okolí.

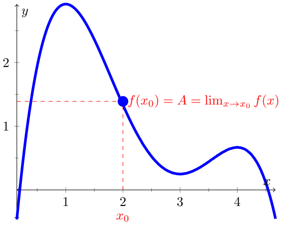
(b) Funkce nemůže být spojitá v bodě x_0, pokud limita v tomto bodě neexistuje nebo není konečná.

(c) Pokud pracujeme s pojmy jednostranná limita, lze definovat spojitost zleva a spojitost zprava v bodě x_0

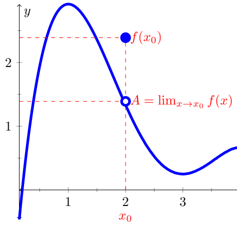
$$f \text{ je spojitá zprava/zleva v } x_0 \overset{def}{\longleftrightarrow} \lim_{x \to x_{0_\pm}} f(x) = f(x_0)$$

Ilustrace spojitosti a nespojitosti v bodě

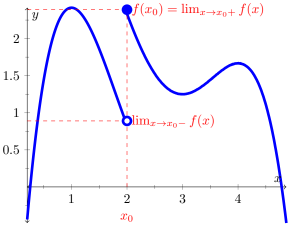
Spojitá funkce



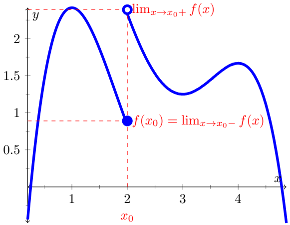
Nespojitá funkce



Spojitá pouze zprava



Spojitá pouze zleva



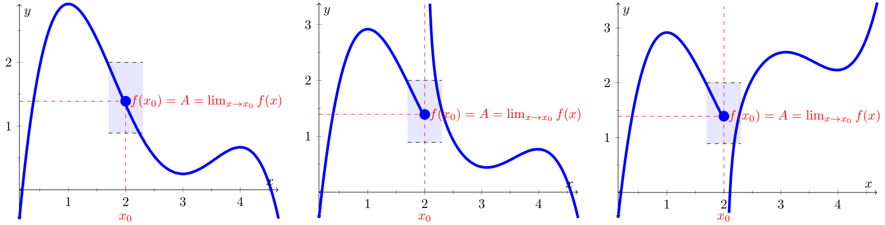
Lokální vlastnosti spojitých funkcí

Věta: lokální vlastnosti

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0, pak

(A) existuje okolí bodu x_0, ve kterém je funkce omezená

(B) pokud $f(x_0) \neq 0$, existuje okolí, ve kterém funkce f zachovává znaménko.



Algebraické vlastnosti spojitých funkcí a spojitost složené funkce

(A) Jsou-li funkce f a g spojité v bodě x_0, pak funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $|f|$ a $\frac{f}{g}, g(x) \neq 0$ jsou spojité v bodě x_0.

čti. . . *součet spojitých funkcí je spojitá funkce . . .*

čti. . . *součin spojitých funkcí je spojitá funkce . . .*

(B) Je-li funkce f spojitá v bodě x_0 a funkce g spojitá v bodě $f(x_0)$, pak funkce $g(f(x))$ je spojitá v bodě x_0.

čti. . . *složení spojitých funkcí je spojitá funkce . . .*

Body nespojitosti

V bodech nespojitosti platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Definice:Klasifikace bodů nespojitosti

Nechť funkce f není spojitá v hromadném době x_0, pak bod x_0 je bodem nespojitosti. Bod nespojitosti může být následujícího druhu.

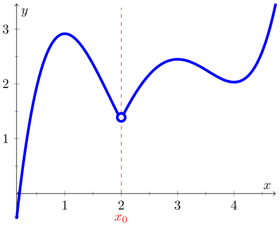
(A) **Odstranitelná nespojitost**, pokud $\lim_{x \to x_{0_-}} f(x)$ a $\lim_{x \to x_{0_+}} f(x)$ jsou konečné a shodné.

(B) Bod nespojitosti **prvního druhu - skok**, pokud $\lim_{x \to x_{0_-}} f(x)$ a $\lim_{x \to x_{0_+}} f(x)$ jsou konečné a různé.

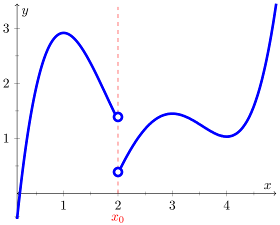
(C) Bod nespojitosti **druhého druhu**, pokud alespoň jedna z limit $\lim_{x \to x_{0_-}} f(x)$ a $\lim_{x \to x_{0_+}} f(x)$ je nekonečná nebo neexistuje.

Ilustrace bodů nespojitosti

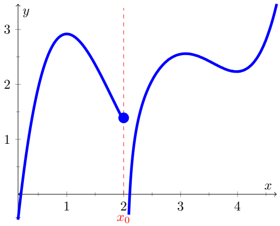
Odstranitelná nespojitost



Nespojitost I.druhu - skok



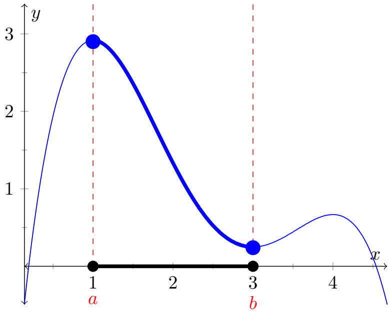
Nespojitost II. druhu

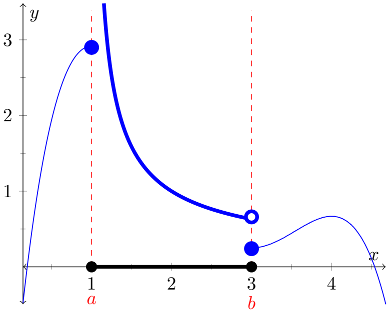


Spojitost funkce v uzavřeném intervalu $I = \langle a; b \rangle$

Definice: funkce spojitá na $\langle a; b \rangle$

Funkce je spojitá na utavřeném intervalu právě tehdy když je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu a v krajních bodech je spojitá zleva resp. zprava.





Globální vlastnosti spojitých funkcí

Věta: o kořenu spojité funkce

Mějme funkci f spojitou na intervalu $\langle a; b\rangle$, pro kterou platí $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje bod $c \in \langle a; b\rangle$ takový, že $f(c) = 0$.

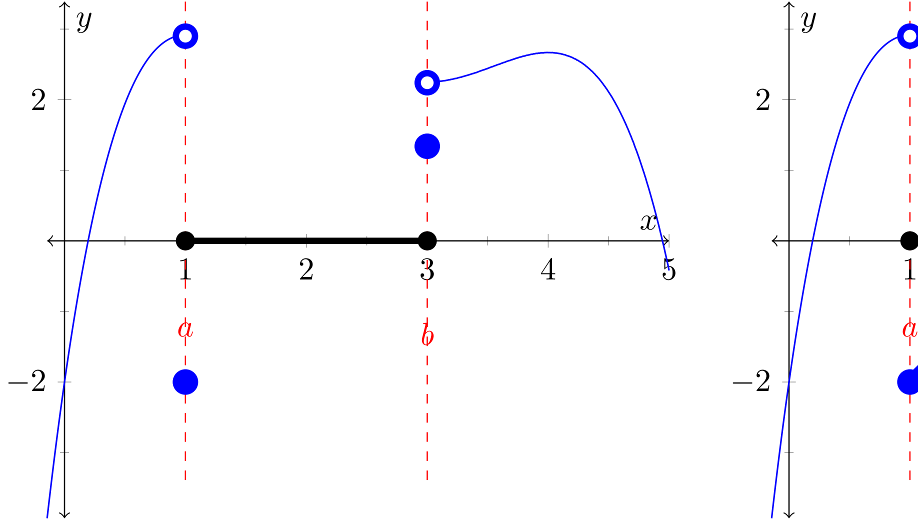
Důsledek: (Řešitelnost nelineárních rovnic) Nechť funkce f je spojitá $\langle a; b\rangle$ a nechť $f(a) \neq f(b)$, pak pro libovolné $y_0 \in \langle f(a); f(b)\rangle$, existuje alespoň jedno x_0 takové, že $y_0 = f(x_0)$.

Věta: Weiestrassova věta

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$, pak je funkce f na tomto intervalu omezená.

POZOR: Implikace naopak neplatí. Funkce omezená na intervalu nemusí být spojitá na intervalu.

Ilustrace věty o kořenech spojité funkce



Globální vlastnosti spojitých funkcí

(1.) Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$, pak je $f(\langle a; b\rangle)$ opět interval nebo jednobodová množina.

(2.) Je-li f ostře monotónní na intervalu I a $f(I)$ je opět interval, pak f je spojitá.

(3.) Je-li f spojitá a prostá na intervalu I, pak existuje funkce inverzní a je také spojitá na $f(I)$.