Základy matematiky pro FEK (derivace funkcí)

6. přednáška

Blanka Šedivá

KMA

zimní semestr 2014/2015

Derivace funkce

- U lineárních funkcí ve tvaru $f : y = a \cdot x + b$ jsme schopni podle směrnice a rozpoznat, zda funkce bude klesající nebo rostoucí.
- U lineárních funkcí je „rychlost růstu“ nebo poklesu pro všechna x shodná a je vyjádřena právě číslem a. Hodnota čísla a nám pak vyjadřuje, o kolik vzroste f, pokud x vzroste Δx. Matematicky můžeme tuto závislost zapsat jako

$$\Delta f = a \cdot \Delta x.$$

- U nelineárních funkcí může být „rychlost růstu“ nebo poklesu v různých bodech různá, proto číslo vyjadřující tento růst nebo pokles musí být vždy vztaženo ke konkrétnímu bodu x_0, ze kterého vycházíme.

Diferenční podíl a derivace a jejich geometrická interpretace

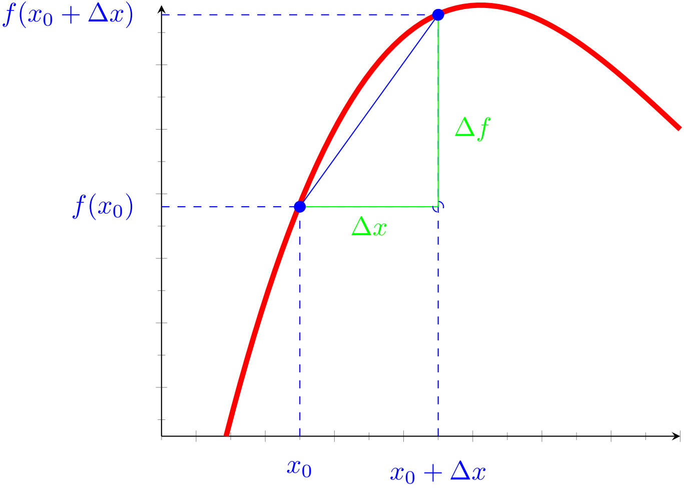
Definice: Diferenční podíl

Diferenční podíl funkce f v bodě x_0 je poměr přírůstků (diferencí) Δf funkce f a přírůstku (diference) Δx argumentu x.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Diferenční podíl udává směrnici sečny P_0P, kde bod $P_0 = [x_0, f(x_0)]$ a bod $P = [x, f(x)]$.
- Kladné hodnoty diferenčního podílu odpovídají rostoucí funkci.
- Záporné hodnoty diferenčního podílu odpovídají klesající funkci.

Ilustrace diferenčního podílu $\Delta f / \Delta x$



Derivace funkce v bodě x_0

Definice: derivace funkce v bodě

Existuje-li vlastní limita

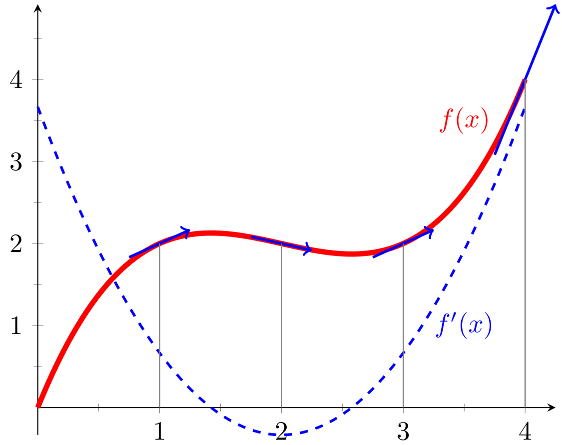
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

říkáme, že **funkce f má v bodě x_0 derivaci**.

Tuto limitu označujeme $f'(x_0)$ nebo $\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x}(x_0)$ nebo $\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x}\Big|\, x_0$ nebo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|\, x_0$ nebo $\dot{f}(x_0)$.

- derivaci funkce v bodě získáme limitním přechodem diferenčního podílu pro $\Delta x \to 0$,
- derivace odpovídá směrnici tečny.

Ilustrace derivace funkce $f'(x)$



Derivace funkce na intervalu

Stejně jako u spojitosti rozšíříme pojem derivace v bodě x_0 na uzavřený interval. Pak mluvíme o funkci, která má derivace ve všech bodech intervalu nebo zkráceně o diferencovatelné funkci.

Definice: derivace funkce na intervalu - diferencovatelná funkce

Funkce f je **diferencovatelná na intervalu** $\langle a; b\rangle$ právě tehdy, když má derivaci v každém vnitřním bodě intervalu a v krajních bodech má derivaci zleva resp. zprava. Funkce, jejíž funkční hodnota v každém bodě $x \in (a, b)$ je $f'(x)$ se nazývá derivace funkce f na intervalu (a, b).

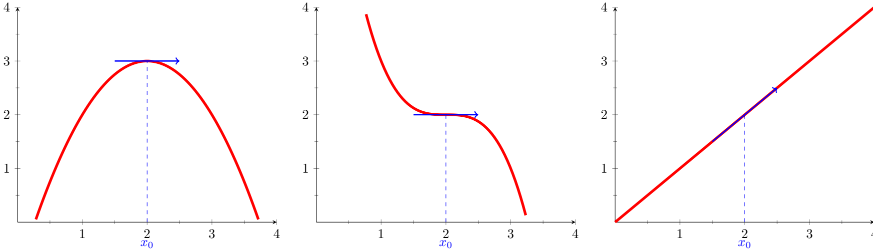
Vztah diferencovatelnosti a spojitosti

Věta: o vztahu diferencovatelnosti a spojitosti

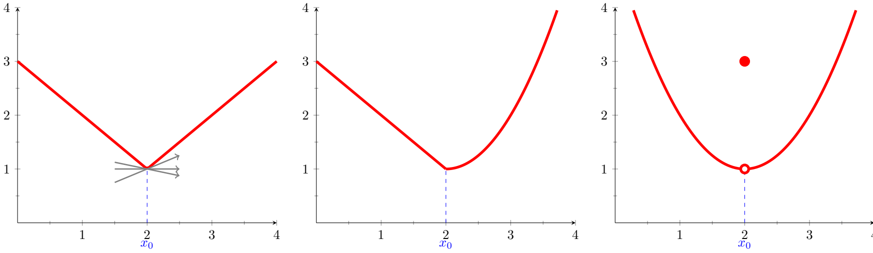
Jestliže funkce f má derivaci v x_0, pak je funkce v bodě x_0 spojitá.

- Obrácená implikace neplatí. Funkce spojitá v bodě $x_0 \not\Rightarrow$ funkce má v bodě x_0 vlastní derivaci.
- Například funkce $f(x) = |x|$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$, ale nemá v tomto bodě derivaci.
- Vlastnost diferencovatelnosti je silnější než spojitost.
- Spojité funkce, které nemají v bodě x_0 derivaci, mají v tomto bodě „hrot“, ve kterém nejde nakreslit tečna.

- Funkce, které mají v bodě x_0 derivaci



- Funkce, které nemají v bodě x_0 derivaci



Derivace vyšších řádů

Stejným postupem jako první derivaci můžeme zavést též derivace vyšších řádů. Pokud první derivace odpovídá přírůstku (diferenci) funkce, pak druhá derivace popisuje přírůstek přírůstku a tak dále.

Definice: derivace druhého řádu

Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0)$$

říkáme, že funkce f má v bodě x_0 druhou derivaci.
Tuto limitu označujeme $f''(x_0)$ nebo $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\, x^2}(x_0)$ nebo $\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\, x^2}\right| x_0$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)$ nebo $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| x_0$ nebo $\ddot{f}(x_0)$.

Přehled derivací elementárních funkcí I

- $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$
- $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}, x \neq 0$
- $(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $a \in \mathbb{R}, x > 0$
- $(a^x)' = a^x \ln a$ pro $a > 0$
- speciálně $(e^x)' = e^x$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ pro $x > 0, a > 0, a \neq 1$
- speciálně $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Přehled derivací elementárních funkcí II

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$
- $(\mathrm{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $|x| < 1$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $|x| < 1$
- $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\mathrm{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Pravidla pro derivování

Věta: pravidla pro derivování

Nechť $u, v, f, g, u_1, u_2, \ldots$ jsou diferencovatelné funkce proměnné x. Pak platí

1. $(konst)' = 0$
2. $(u_1 + u_2 + \ldots)' = u_1' + u_2' + \ldots$
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ pro $v(x) \neq 0$
5. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ (derivace složené fce)