Základy matematiky pro FEK

7. přednáška 5.11.2014

Blanka Šedivá

KMA

zimní semestr 2014/2015

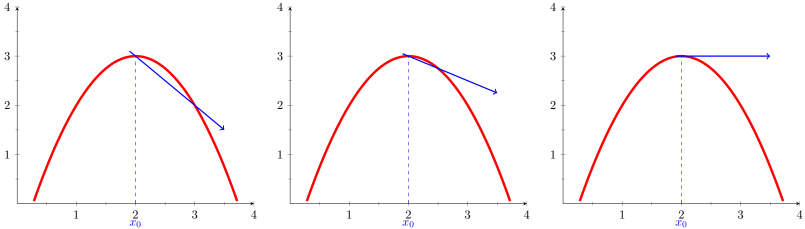
Derivace funkce

Definice:Derivace funkce

Funkce f má v bodě x_0 derivaci, pokud existuje limita

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

- derivace „dostaneme“ limitním přechodem poměru diferencí;
- geometricky limitní přechod koresponduje s přechodem od sečny k tečně;



Použití derivace pro určování tečny a normály

Věta: Vztah pro tečnu a normálu funkce

Pro funkci f, která má v bodě x_0 derivaci, lze určit rovnice tečny a normály procházející tímto bodem podle vztahů

tečna $$\tau : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

normála $$\eta : y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

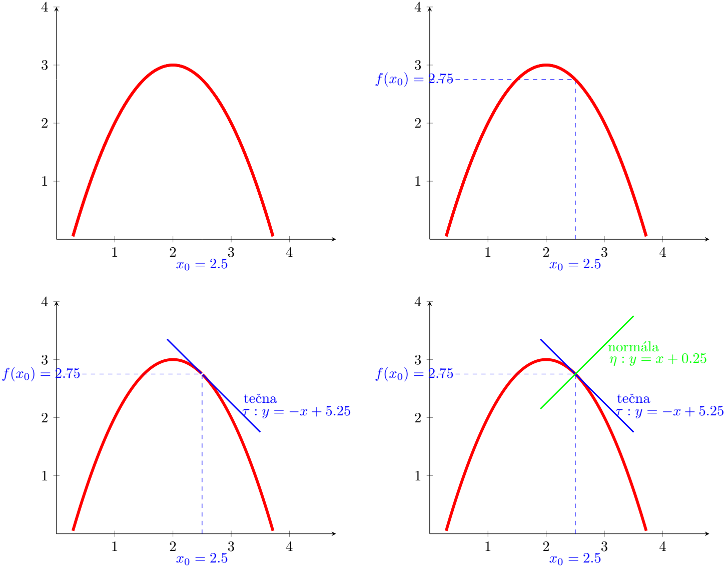
- x_0, $f(x_0)$ a $f'(x_0)$ jsou pevně dané hodnoty; y a x jsou proměnné;
- rovnici tečny v obecném tvaru $y = a \cdot x + b$ lze napsat

$$\tau : y = \underbrace{f'(x_0)}_{a} \cdot x + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0}_{b}$$

Výpočet rovnice tečny a normály

- Najděte rovnici tečny a normály pro funkci
$$f(x) = -(x-2)^2 + 3 \text{ v bodě } x_0 = 2.5.$$
- načrtneme graf funkce;
- funkční hodnota v bodě $x_0 = 2.5$ je $f(x_0 = 2.5) = -(2.5-2)^2 + 3 = 2.75$;
- derivace funkce $f'(x) = -2(x-2)$;
- derivace funkce v bodě $x_0 = 2.5$ je $f'(x_0 = 2.5) = -2(2.5-2) = -1$;
- rovnice tečny: $\tau : y = 2.75 + (-1) \cdot (x - 2.5) \Rightarrow \tau : y = -x + 5.25$;
- rovnice normály: $\eta : y = 2.75 - \frac{1}{-1} \cdot (x - 2.5) \Rightarrow \eta : y = x + 0.25$.

Znázornění tečny a normály pro $f(x) = -(x-2)^2 + 3$ v bodě $x_0 = 2.5$.



Použití derivace pro aproximaci funkce polynomy

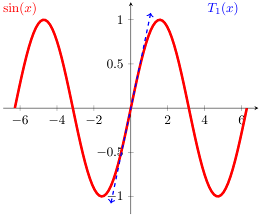
- Znalost rovnice tečny nám umožní nahradit v okolí bodů x_0 funkční hodnoty $f(x)$ hodnotami odpovídajícími lineární funkci neboli pro body x, které leží „blízko " bodu x_0 platí

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

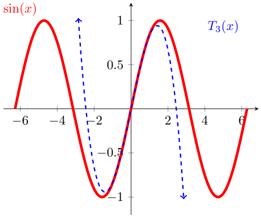
- Jestliže chceme určit funkční hodnoty $f(x)$ přesněji, můžeme využít znalosti vyšších derivací a rozvoje funkce f v polynom.
- Taylorův rozvoj (Taylorův polynom) funkce v bodě x_0.

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

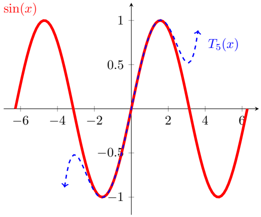
$T_1(x) = x$



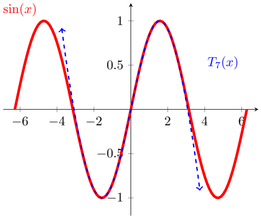
$T_3(x) = x - x^3/3!$



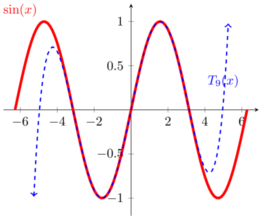
$T_5(x) = x - x^3/3! + x^5/5!$



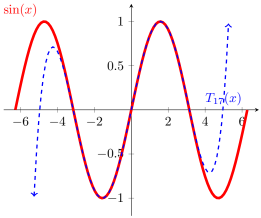
$T_7(x)$



$T_9(x)$



$T_{17}(x)$



Některé často používané rozvoje

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots,$ pro $|x| < +\infty$
- $a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots,$ pro $|x| < \infty$, $a > 0$
- $\ln x = \frac{x-1}{1!} - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \dots,$ pro $0 < x \leq 2$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots,$ pro $-1 < x \leq 1$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$ pro $|x| < +\infty$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$ pro $|x| < +\infty$
- $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \dots,$ pro $|x| < 1$
- $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} - \dots,$ pro $|x| < 1$
- $\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots,$ pro $|x| \leq 1$
- $\mathrm{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots,$ pro $|x| \leq 1$

Použití derivace pro výpočty limit typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$

Věta:l'Hospitalovo pravidlo

Jestliže

buď $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

nebo $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$ (o funkci f nemusím nic předpokládat)

a jestliže existuje $\lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$ (vlastní i nevlastní), pak existuje $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$ a platí

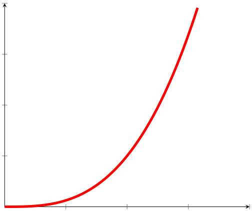
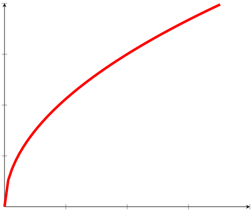
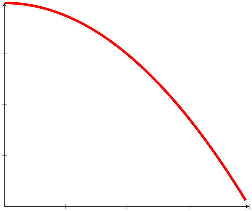
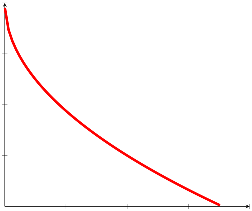
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$ nebo $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2 - x - 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}\, 2x}{2x - 1} = +\infty$

Použití derivace pro vyšetřování průběhu funkce

- Nejčastěji však používáme derivace k vyšetřování průběhu funkce.
- Využíváme základní vlastnost derivací, které vychází z toho, že derivace odpovídá přírůstku.
- Kladná derivace tedy odpovídá rostoucí funkci a naopak záporná derivace je typická pro klesající funkce.
- Druhá derivace vyjadřuje přírůstek přírůstku.
- Kladná druhá derivace odpovídá situaci, kdy přírůstek (nebo úbytek) zrychluje a záporná odpovídá situaci, kdy přírůstek (nebo úbytek) zpomaluje.

Tvary funkcí podle znaménka derivací

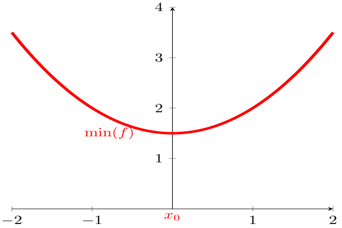
	$f'' > 0$	$f'' < 0$
$f' > 0$		
$f' < 0$		

Lokální a globální extrémy funkce

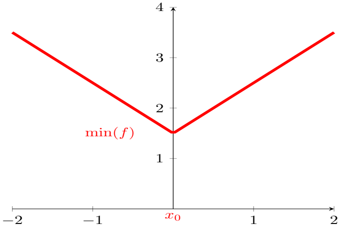
- Lokální minimum a lokální maximum jsou takové situace, kdy studujeme chování funkce f pouze na „blízkém“ okolí bodu x_0 a naopak u globálních extrémů nás zajímá největší, resp. nejmenší funkční hodnota na vybraném množině.
- Protože derivace je lokální vlastnost, lze pomocí derivace najít lokální extrémy.
- Globální extrémy mohou nastat
  - v bodech lokálních extrémů a/nebo
  - v krajních (hraničních) bodech studované množiny.

Příklady funkcí, které mají v bodě x_0 lokální minimum

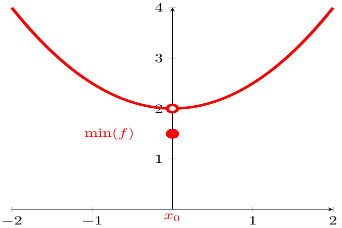
Spojitá a diferencovatelná fce



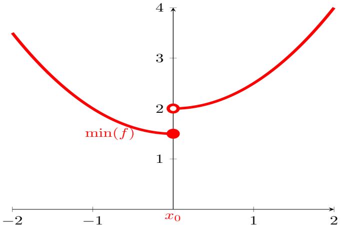
Spojitá, ale nemá derivaci



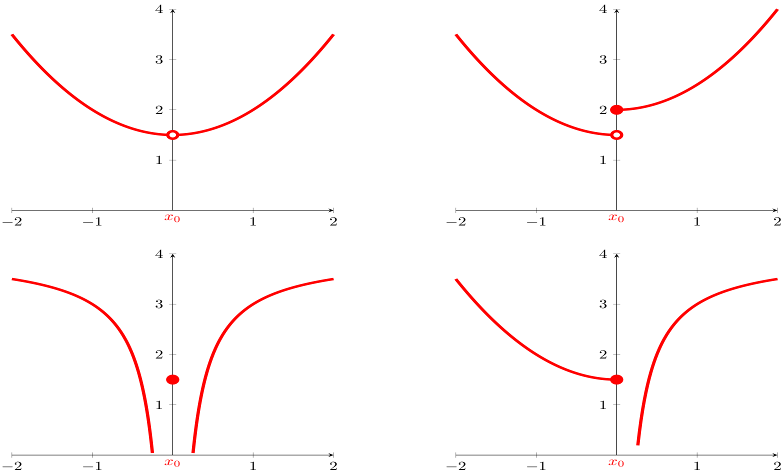
Odstranitelná nespojitost



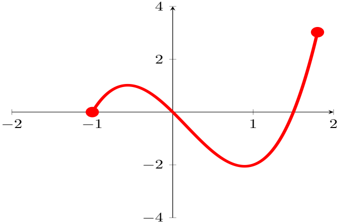
Nespojitost typu skok

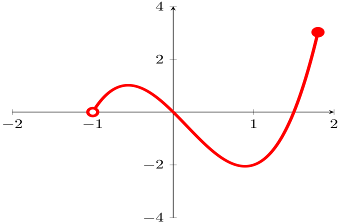


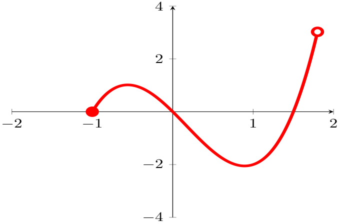
Příklady funkcí, které nemají v bodě x_0 lokální minimum

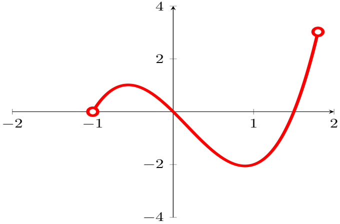


Příklady funkcí s lokálními a globálními extrémy









Monotónie funkce

- Monotónii funkce definujeme na množině nebo můžeme definovat též monotónii v bodě.
- Při monotónii na množině M porovnáváme funkční hodnoty v bodech $x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2$.
- Při monotónii v bodě x_0 porovnáváme funkční hodnoty v bodech z okolí bodu.
- Monotónie zahrnuje dvě varianty: rostoucí funkce a klesající funkce.
- Dále rozlišujeme ostře rostoucí a rostoucí funkci, resp. ostře klesající a klesající funkci.

Definice:Funkce f je rostoucí na množině M

pokud

$$\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$$

čti. . . *pro každé dva body z množiny M takové, že x_1 je menší než x_2 platí, že funkční hodnota v bodě x_1 je menší nebo rovna funkční hodnotě v bodě x_2 . . .*

Stacionární body a vztah k lokálním extrémům

Pro zjišťování monotónie funkce a hledání extrémů funkce se využívá znalost znaménka první derivace.

Definice: Stacionární bod

Bod x_0 je **stacionárním bodem** funkce f pokud $f'(x_0) = 0$.

Věta: Nutná podmínka lokálního extrému

Nechť bod x_0 je bodem lokálního extrému (minimum nebo maximum) funkce f a nechť existuje $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$.

Funkce f má lokální extrém pouze ve stacionárních bodech nebo v bodech, kde první derivace neexistuje.

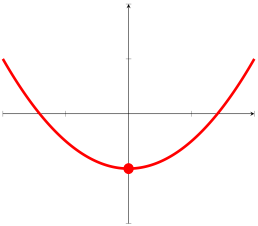
Stacionární body a vztah k lokálním extrémům - příklady

(a) Funkce, která má v bodě x_0 stacionární bod a v tomto bodě je extrém, např. $f(x) = x^2$.

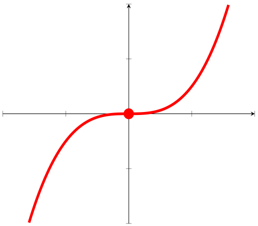
(b) Funkce, která má v bodě x_0 stacionární bod a v tomto bodě není extrém, např. $f(x) = x^3$.

(c) Funkce, která má v bodě x_0 extrém a není to stacionární bod, např. $f(x) = |x|$.

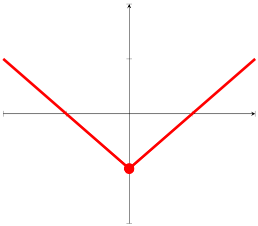
(a)



(b)



(c)



Vztah první derivace a monotónie

Věta: o vztahu první derivace a monotónie

Pro funkci spojitou a diferencovatelnou na intervalu (a, b) platí

(a) pokud pro $\forall x \in (a, b)$ je $f(x)' > 0$, pak funkce je na intervalu (a, b) ostře rostoucí;

(a) pokud pro $\forall x \in (a, b)$ je $f(x)' < 0$, pak funkce je na intervalu (a, b) ostře klesající.

- důsledkem je postačující podmínka pro lokální extrém, kdy spojitá a diferencovatelná funkce v bodě x_0 má v tomto bodě lokální maximum, pokud existuje okolí bodu tak, že v intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ je $f' > 0$ a v intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ je $f' < 0$;
- pomocí derivací lze definovat funkcí monotónní v bodě:
  Funkce je rostoucí v bodě x_0, pokud existuje okolí bodu, kde $f' > 0$.

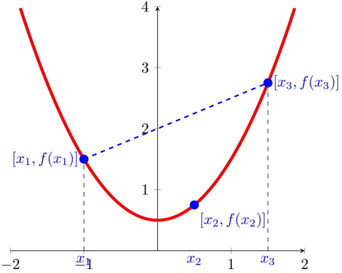
Konvexnost a konkávnost funkce

Definice:Konvexní (konkávní) funkce na intervalu I

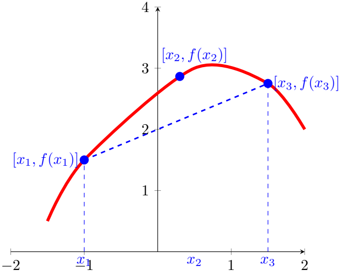
Řekneme, že funkce f je **konvexní (konkávní)** na intervalu I, pokud pro každé $x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$ platí, že

bod $[x_2, f(x_2)]$ leží pod (nad) spojnicí bodů $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_3, f(x_3)]$

Konvexní funkce



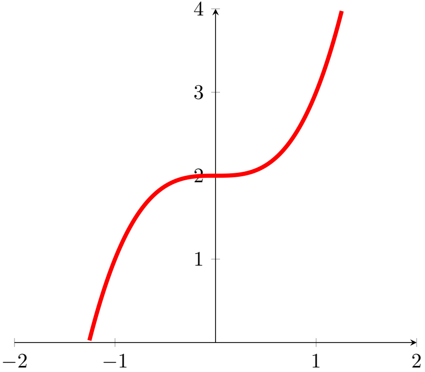
Konkávní funkce

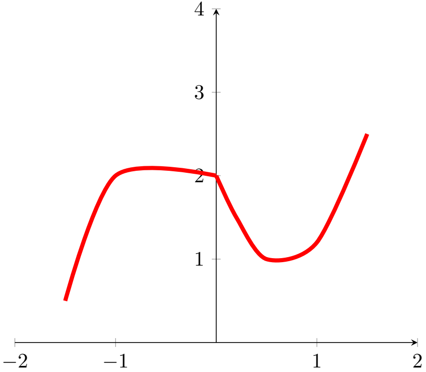


Inflexní body

Definice:Inflexní bod

Body, ve kterých funkce f mění svůj charakter z konvexní na konkávní nebo z konkávní na konvexní nazýváme **inflexní body**.





Vztah druhé derivace a konvexnosti a konkávnosti funkce

Definice:Vztah druhé derivace a konvexnosti a konkávnosti

Jestliže v bodě x_0 platí

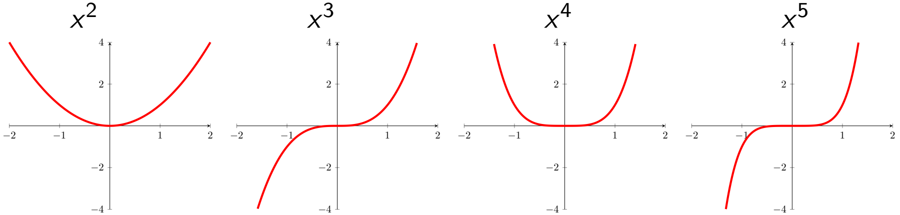
$f''(x_0) > 0$ pak	existuje okolí bodu x_0, ve kterém je funkce f konvexní graf funkce je nad tečnou v bodě x_0
$f''(x) > 0$ pro $x \in (a, b)$	funkce f je ostře konvexní v intervalu (a, b) graf funkce je pod sečnami

---

$f''(x_0) < 0$	existuje okolí bodu x_0, ve kterém je funkce f konkávní graf funkce je pod tečnou v bodě x_0
$f''(x) < 0$ pro $x \in (a, b)$	funkce f je konkávní v intervalu (a, b) graf funkce je nad sečnami

Příklady pro funkce $x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots$ v okolí bodu $x_0 = 0$

f	f'	f''	$f^{(3)}$	$f^{(4)}$	$f^{(5)}$	$f^{(6)}$	$f^{(7)}$
x^2	$2x$	2	0	0	0	0	0
x^3	$3x^2$	$6x$	6	0	0	0	0
x^4	$4x^3$	$12x^2$	$24x$	24	0	0	0
x^5	$5x^4$	$20x^3$	$60x^2$	$129x$	120	0	0

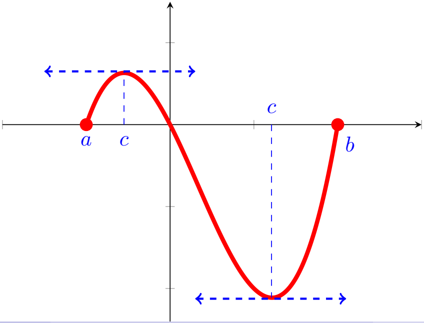


Věty o střední hodnotě I.

Rollova věta

Jestliže funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$ a má v každém bodě otevřeného intervalu $(a; b)$ první derivaci a platí $f(a) = f(b)$, pak existuje bod $c \in (a; b)$ takový, že platí $f'(c) = 0$.

čti. . . *existuje alespoň jeden bod, ve kterém je tečna vodorovná . . .*



Věty o střední hodnotě II.

Lagrandeova věta

Jestliže funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$ a má v každém bodě otevřeného intervalu $(a; b)$ první derivaci, pak existuje bod $c \in (a; b)$ takový, že platí $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.