

SOUSTAVA LIN. DIF. EC. S KONST. KOEF.

→ nařicel: matematická FS

$$\vec{y}' = A \vec{y} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}; i, j = 1, \dots, n$$

Příklad

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y_1' &= 2y_1 \Rightarrow y_1(t) = C e^{2t} \\ y_2' &= 3y_2 \Rightarrow y_2(t) = D e^{3t} \end{aligned}$$

A - maticu můžeme diagonalizovat λ_i

$$A = T \cdot \Lambda \cdot T^{-1}$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$$

$$T = [v_1 | v_2 | \dots | v_n] \quad (\lambda_i, v_i)$$

$$y' = A y$$

$$y' = T \Lambda T^{-1} y \quad | \cdot T^{-1}$$

$$T^{-1} y' = \underbrace{(T^{-1} y)'}_{z'} = \Lambda \underbrace{T^{-1} y}_z$$

Fundamentál!
↓ notice

$$z' = \Lambda z \dots \rightarrow \text{máme } \vec{z} = \text{diag}(e^{\lambda_i t}) \cdot \vec{c} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

→ řešíme dosazením:

$$y = T \cdot \vec{z} = T \cdot \text{diag}(e^{\lambda_i t}) \cdot \vec{c}$$

Priklad

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

① Vlastní čísla:

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-(1-\lambda)^2 \lambda + 2 - 1) - (2 - 2\lambda + \lambda + 1 - \lambda) = 0$$
$$= \dots = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\boxed{\lambda_1 = -1} \quad \boxed{\lambda_2 = 1} \quad \boxed{\lambda_3 = 2}$$

② Vlastní vektory:

$$\boxed{\lambda_1 = -1}$$

$$(A - \lambda I) v = 0; \|v\| \neq 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_3 = 2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

③ Řešení:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

PÉRIÉAD

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \vec{y} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x' = \lambda x + y$$

$$\underline{y' = \lambda y} \Rightarrow y(t) = C e^{\lambda t}$$

$$x' = \lambda x + C e^{\lambda t} \dots \text{variable constante}$$

① homogène !

$$x' = \lambda x \Rightarrow x(t) = B e^{\lambda t}$$

② partic. h. inhomogène !

$$x' = B' e^{\lambda t} + B \lambda e^{\lambda t} = \lambda B e^{\lambda t} + C e^{\lambda t}$$

vl. caract. : $\lambda_{1,2} = \lambda$

vl. rellog :

$$B' = C \Rightarrow \boxed{B(t) = Ct + D}$$

$$x(t) = Ct e^{\lambda t} + D e^{\lambda t}$$

$$y(t) = C e^{\lambda t}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \pi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \pi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \overset{D}{C_1} \underset{\text{vl. rel}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} e^{\lambda t} + \overset{C}{C_2} \left(\underset{\text{vl. rel}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} t e^{\lambda t} + \underset{\text{vl. rel.}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} e^{\lambda t} \right)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & : & t e^{\lambda t} \\ 0 & : & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

DEV

Révision pour $\vec{y}' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \vec{y}$

A - lineární 'transformace'

$$\vec{y}' = A \vec{y} \quad ; \quad A = T J T^{-1} \quad ; \quad J - \text{jord. matice}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{bmatrix} \quad J_i \dots \text{jordanův blok} \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

pro p -násobek λ_i

p

$$T = [T_1 \dots T_m] \quad T_i \dots \text{vektory (robtčiny) vlastní}$$

$$y' = T J T^{-1} y \quad | \cdot T^{-1}$$

$$T^{-1} y' = (T^{-1} y)' = J \cdot T^{-1} y$$

$$\boxed{\vec{z}' = J \cdot \vec{z}} \quad - \text{bloky diagonální soustava}$$

→ roztáhneme jednotlivé bloky odděleně.

Příklad

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

hl. otázka:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^2(\lambda+4) + 4 - 0 = \\ = -(1+2\lambda+\lambda^2)(\lambda+4) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -3} \quad \boxed{\lambda_3 = 0}$$

② Klassen' velocity

$$\boxed{\lambda_1 = -3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 4 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \pi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

H. rel.

$$\boxed{\lambda_2 = -3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 4 & | & -2 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \pi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

H. rel. rel.

$$\boxed{\lambda_3 = 0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 4 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \pi_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_3 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} \right)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 4 & e^{-3t} & t e^{-3t} \\ 4 & -2e^{-3t} & (1-2t)e^{-3t} \\ 1 & e^{-3t} & (-1+t)e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Priklad

$$x' = y - 5 \cos t$$

$$y' = 2x + y$$

① Homog. re

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \dots \text{sl. vlna: } \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

sl. vlny:

$$\boxed{\lambda_1 = 2}$$

$$\boxed{\lambda_2 = -1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

② $Y = Y(t) \cdot c(t)$... variace konstant

$$Y' = \cancel{Y'} C + Y \cancel{C'} = A Y C + b \quad b = \begin{bmatrix} -5 \cos t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y C' = b \Rightarrow \boxed{C' = Y^{-1} b}$$

$$Y^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & -e^{-t} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-e^t - 2e^t} \begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -2e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -2e^t & e^t \end{bmatrix}$$

$$C' = Y^{-1}(t) \cdot b \dots \rightarrow \text{integrujeme } C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

za zoceni:

$$x' = 4x - y$$

$$y' = 3x + y - z$$

$$\underline{z' = x + z + 1}$$