Kapitola 7

Úvod

7.1 Začátky teorie množin

Představa množiny nebo souboru prvků není nijak nová a v historii matematiky se běžně objevuje. Objektem matematického zájmu se však samotné množiny staly až ve druhé polovině 19. století a vznik *teorie množin* se neobešel bez ostrých sporů.

Hlavním impulsem pro vznik teorie množin (ale také hlavním sporným bodem) byla snaha o důkladnou a korektní práci s pojmem *nekonečna*. Standardní a obecně přijímanou představou byly 'potenciálně nekonečné' veličiny — tedy takové, které v každém bodě mají konečnou hodnotu, ale ta může růst nade všechny meze. Mnohem méně akceptovaná byla představa 'aktuálního nekonečna', tedy například veličiny s nekonečnou hodnotou, nebo souboru tvořeného nekonečným množstvím prvků. Podle převládajícího názoru neměly aktuálně nekonečné objekty žádnou reálnou existenci a daly se použít přinejlepším jen jako vodítko intuitivních myšlenkových postupů (například u výpočtů pracujících s pojmem nekonečně malé veličiny).

Prvním pokusem o systematické zpracování matematických vlastností aktuálního nekonečna a obtíží, které se s ním pojí, byl vizionářský spis *Paradoxy nekonečna* (1851) českého teologa a matematika Bernarda Bolzana (1781–1848).

Základy teorie množin jako samostatného oboru položil o 20 let později německý matematik a profesor univerzity v Halle Georg Cantor (1845–1918). Motivací pro něj bylo jeho studium konvergence Fourierových řad a nutnost jemně rozlišit mezi různými nekonečnými množinami singularit. Jeho novátorský a důsledný pohled na nekonečno ale rychle našel uplatnění u řady dalších otázek, například u problému existence *transcendentních čísel* (čísel, která nejsou kořenem žádného polynomu s celočíselnými koeficienty). První taková čísla nalezl až v roce 1844 Joseph Liouville. Cantor ve svém článku z roku 1874 velmi překvapivě použil 'množinové' uvažování a ukázal, že dokonce skoro všechna reálná čísla jsou transcendentní.

V poslední čtvrtině 19. století si teorie množin postupně získávala popularitu, jednak díky podobným úspěšným aplikacím, jednak díky své roli univerzálního základu pro různá odvětví matematiky. V této roli ji doplňovala predikátová logika, která se vyvinula přibližně v téže době především v díle Gottloba Fregeho (1848–1925).

Kolem roku 1900 již byla popularita Cantorovy teorie množin dosti značná. Právě v této době se v ní však začaly objevovat zprvu nenápadné, později povážlivé trhliny v podobě takzvaných *paradoxů*, které ukazovaly na nejistý základ celé teorie. Nejjednodušší a tím také nejzávažnější mezi nimi je tzv. *Russellův paradox* (1901):

Uvažme množinu m, jejímž prvkem je každá množina, která není svým vlastním prvkem (a žádná jiná). Je množina m svým vlastním prvkem?

Snadno se přesvědčíme, že obě možnosti vedou ke sporu: pokud není svým vlastním prvkem, pak by jím podle definice měla být a naopak.

Nezbytnou reakcí na objev Russellova a dalších množinových paradoxů byla snaha omezit pravidla pro práci s množinami tak, aby jejich formulace nebyla možná. Vzniklo tak hned několik různých 'teorií množin'; v této přednášce se budeme věnovat nejrozšířenější z nich, *Zermelo–Fraenkelově teorii množin*, kterou v roce 1908 navrhl Ernst Zermelo a v roce 1921 doplnil Abraham Fraenkel.

7.2 Jazyk teorie množin

Zermelo–Fraenkelova (zkráceně ZF) teorie množin je formulována v jazyce predikátové logiky prvního řádu s jediným mimologickým symbolem, predikátovým symbolem $\in$ pro náležení ($x \in y$ čteme jako 'x je prvkem y'). Připomeňme, jak jsou definovány formule tohoto jazyka (v části o predikátové logice jsme jej označovali $\mathcal{L}_{\mathrm{ZF}}$):

- *atomické* formule jsou formule tvaru $x \in y$ nebo $x = y$, kde x a y jsou proměnné pro množiny,
- složitější formule lze získat pomocí logických spojek $\neg$ (negace), $\wedge$ (konjunkce, 'a zároveň'), $\vee$ (disjunkce, 'nebo'), $\to$ (implikace), $\leftrightarrow$ (ekvivalence),
- na libovolnou formuli lze také aplikovat obecný ($\forall$) nebo existenční ($\exists$) kvantifikátor.

Řadu příkladů takových formulí najdeme v oddílu 7.4.