DIFERENCIÁLNÍ RCE N-TÉHO ŘÁDU

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots x^{(n-1)}(t)) \quad (1)$$

→ Řešením je n-krát diferencovatelná fce $\varphi(t)$ definovaná na intervalu I: (1) splňuje $\forall t \in I$

$\boxed{\text{Definice}}$ (Cauchyova úloha)

Úloha nalezení řešení (1) splňující poč. podmínky ve tvaru $x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0',\ \dots\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$ (2)

$\boxed{\text{Věta}}$ Počáteční úloha (1)+(2) je ekvivalentní s počáteční úlohou ve tvaru:

$$x_1'(t) = x_2(t)$$
$$x_2'(t) = x_3(t)$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1}'(t) = x_n(t)$$
$$x_n'(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t) \dots, x_{n-1}(t))$$

Příklad

$$x''(t) + \sin(x(t)) = \cos 2t \qquad \left(x''(t) = -\sin(x(t)) + \cos 2t \right)$$

$$x_1'(t) = x_2(t)$$
$$x_2'(t) = -\sin(x_1(t)) + \cos 2t \qquad (*)$$

$\varphi(t)$ ... řešení $(*)$ $\qquad \varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix}$

$$(\varphi_1' = \varphi_2)'$$
$$\varphi_2' = -\sin \varphi_1 + \cos 2t$$
$$\varphi_1'' = -\sin \varphi_1 + \cos 2t \; \checkmark$$

$\Rightarrow$ φ_1 je řešením původní rovnice

Definice (Wronskián)

$$W(u_1, u_2, \dots u_n) := \det \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ u_1' & & u_n' \\ u_1'' & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n)} & & u_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ analogie s posloupností

Př

$$x'' + 4x = 0$$

1) Přepis do soustavy

$$x_1' = x_2 \qquad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_2' = -4x_1$$

2) vlastní čísla:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mp 2i$$

$\lambda_1 = 2i$ $\qquad\qquad$ $\lambda_2 = -2i$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2i & 1 & 0 \\ -4 & -2i & 0 \end{array}\right] \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 2i & 1 & 0 \\ -4 & 2i & 0 \end{array}\right] \to v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} e^{2i} & e^{-2i} \\ 2ie^{2i} & -2ie^{-2i} \end{bmatrix}$$

$$\quad y_1 \qquad\quad y_2$$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

– Eulerova identita

$$y_1 = \begin{bmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ 2i\cos 2t + \underbrace{2i \cdot i \cdot \sin 2t}_{-2\sin 2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \underbrace{-2\sin 2t}_{\text{je řešením } z_1} \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin 2t \\ \underbrace{2\cos 2t}_{\text{je řeš. } z_2} \end{bmatrix}$$

$$W(z_1, z_2) = \begin{vmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} = 2\cos^2 2t + 2\sin^2 2t = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow z_1, z_2$ je řešením naší soustavy řešením $x''(t) + 4x(t) = 0$ jsou fce

$\sin 2t$, $\cos 2t$ ... bereme se z_1, z_2

$$W(\sin 2t, \cos 2t) = \det \begin{bmatrix} \sin 2t & \cos 2t \\ 2\cos 2t & -2\sin 2t \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Metody Řešení}}$

- nelin. rce – neex. univ. postup
- lineární rce $a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) x^{(n-1)}(t) + \dots a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$

$\boxed{\text{Eulerova rovnice}}$

$$a_n t^n x^{(n)}(t) + a_{n-1} t^{(n-1)} x^{(n-1)}(t) + \dots + t \cdot x'(t) a_1 + a_0 x(t) = 0$$

Řešení předpokládáme ve tvaru:

$$x(t) = t^\lambda$$

$\boxed{\text{Př.}}$ $t^2 y'' + 4ty - 5y = 0$

$$t^2 (t^\lambda)'' + 4t(t^\lambda)' - 5t^\lambda = 0$$

$$t^2 \lambda(\lambda-1) t^{\lambda-2} + 4t\lambda t^{\lambda-1} - 5t^\lambda = 0 \; / : t^\lambda$$

$$\lambda(\lambda-1) + 4\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-3 \mp \sqrt{9+20}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-3+\sqrt{29}}{2} \\ -\dfrac{3-\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

$y(t) = c_1 \cdot t^{\lambda_1} + c_2 t^{\lambda_2}$ ... $W = ?$ DCV

~~Př~~ $\boxed{\text{násobné kořeny}}$

λ_0 ... k-násobný kořen

$$y_1 = t^{\lambda_0},\ y_2 = t^{\lambda_0} \ln t, \dots, y_k = t^{\lambda_0} \ln^{k-1} t$$

$\boxed{\text{Př}}$

$$t^2 y'' + 3t y' + y = 0$$

$$\lambda(\lambda-1) + 3\lambda + 1 = 0$$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ ... 2-násob. kořen

$$FS = \left\{ \frac{1}{t}, \frac{1}{t} \cdot \ln t \right\}$$

$\boxed{\text{Komplexně sdružené kořeny}}$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = a + ib \\ \lambda_2 = a - ib \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(t^{a+ib}, t^{a-ib} \right) \rightarrow \left\{ t^a \cos(bt), t^a \sin(bt) \right.$$

Rce s konst. koeficienty

$$L(y) := a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (4)$$

METODA CHARAKTERISTICKÉ RCE

Funkce $e^{\lambda t}$ je řešením (4) $\Longleftrightarrow$ λ je řešením charakteristického polynomu ve tvaru:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (5)$$

Příklad

$$u'' + 4u' + 13u = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} -2+3i \\ -2-3i \end{cases}$$

$$u_1 = C_1 \cdot e^{(-2+3i)t} = C_1 e^{-2t} \cdot \cos 3t$$

$$u_2 = C_2 e^{(-2+3i)t} = C_2 e^{-2t} \sin 3t$$

Příklad

$$u'' - 2u' + u = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

1 řešení: $C_1 e^t$

analogicky se soustavou: $u_2 = C_2\, t \cdot e^t$

DCV.: ověřit, že u_2 je řešením.

$$W(u_1, u_2) = \dots$$

SCHÉMA:

1) sestavení char. rce (5)

2) kořeny (5)

3) λ_i 1 nás... $\rightarrow e^{\lambda_i t}$

4) λ_i - k-nás. kořen $\rightarrow e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \dots t^{k-1} e^{\lambda_i t}$

5) $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2} = a \mp ib \rightarrow (e^{at} \cos bt, e^{at} \sin bt)$