4 - Domácí cvičení č. 4

Příklad 4.1. Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů v daných prostorech.

1. V prostoru $\mathbb{R}_4$ o vektorech $v_1 = [2, -1, 3, 5]^T$, $v_2 = [-1, 2, -3, -5]^T$, $v_3 = [4, 0, -2, -1]^T$, $v_4 = [5, 1, -2, -1]^T$.
2. V prostoru $\mathbb{R}_3$ o vektorech $v_1 = [1, 2, 5]^T$, $v_2 = [6, 1, -2]^T$, $v_3 = [2, -4, 3]^T$, $v_4 = [3, -2, 1]^T$.
3. V prostoru $\mathbb{R}_4$ o vektorech $v_1 = [3, 2, 8, 7]^T$, $v_2 = [1, 2, 2, -1]^T$, $v_3 = [5, 5, 5, 9]^T$.
4. V prostoru $\mathcal{P}_3$ o prvcích $v_1(x) = x^2 + 2$, $v_2(x) = x^2 - 2$, $v_3(x) = x$, $v_4(x) = x^3 + x + 1$.

Příklad 4.2. Podprostor V je generován vektory $v_1, v_2, \ldots$. Určete dimenzi a bázi podprostoru V.

1. V prostoru $\mathbb{R}_4$ generují podprostor V vektory $v_1 = [1, 3, -4, 5]^T$, $v_2 = [-3, 2, -1, 1]^T$, $v_3 = [2, -1, 3, -2]^T$, $v_4 = [2, 9, -17, 18]^T$.
2. V prostoru $\mathbb{R}_3$ generují podprostor V vektory $v_1 = [2, -1, 3]^T$, $v_2 = [1, 2, 4]^T$, $v_3 = [-3, -1, -7]^T$, $v_4 = [4, 3, 11]^T$.
3. V prostoru $\mathbb{R}_4$ generují podprostor V vektory $v_1 = [2, -3, 4, 2]^T$, $v_2 = [1, 2, -1, 3]^T$, $v_3 = [-3, 1, 2, -1]^T$.
4. V prostoru $\mathcal{P}_3$ generují podprostor V prvky $v_1(x) = x^2 + x + 1$, $v_2(x) = x^2 - x$, $v_3(x) = x^3 + 2x + 1$, $v_4(x) = 2x^2 + 1$.

Příklad 4.3. Určete, zda množina V je podprostorem daného lineárního vektorového prostoru. Pokud ano, určete bázi a dimenzi tohoto podprostoru V.

1. V prostoru $\mathbb{R}_5$ je $V = \{[x_1, x_2, 0, 0, x_5]^T | x_1, x_2, x_5 \in \mathbb{R}\}$.
2. V prostoru $\mathbb{R}_5$ je $V = \{[x_1, x_2, 2, x_4, x_5]^T | x_1, x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$.
3. V prostoru $\mathbb{R}_4$ je $V = \{[a + c, 2b, a + b + c, 3a - b]^T | a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
4. V prostoru $\mathbb{R}_5$ je $V = \{[a-b+2c+d, a+2b-c, b+c-d, 2a+b+c+d, a+b-2c+d]^T | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 4.4. Určete dimenzi a bázi prostoru V. Ukažte, že prvek $z \in V$ a určete $\widehat{z}$ souřadnice prvku z v této bázi.

1. $V = \mathbb{R}_4$,
   $r_1 = [2, 0, -1, 1]^T$, $r_2 = [1, -3, 1, 0]^T$, $r_3 = [-3, 2, 0, 5]^T$, $r_4 = [0, -2, 1, 1]^T$;
   $z = [0, -5, 2, 8]^T$.
2. $V = \mathcal{M}_{2,2}$,
   $$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix};$$
   $$Z = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$
3. $V = \mathcal{P}_3$,
   $r_1 = x^3 - 9x^2 - 2x + 1$, $r_2 = x^3 + 5x^2 - x$, $r_3 = 2x^3 - 17x^2 - 2x + 5$, $r_4 = -x^3 + 5x^2 - 11x$;
   $z = 4x^3 - 25x^2 - 18x + 7$.

4. $V = \mathbb{R}_4$,
   $v_1 = [1, 1, 1, 1]^T$, $v_2 = [-1, 2, -1, 2]^T$, $v_3 = [2, -3, 2, 1]^T$, $v_4 = [2, 0, 2, 4]^T$;
   $z = [-7, 19, -7, 3]^T$.

5. $V = \mathbb{R}_5$,
   $v_1 = [2, 3, -1, 2, 1]^T$, $v_2 = [-1, -2, 3, 1, -2]^T$, $v_3 = [1, 1, 2, 3, -1]^T$, $v_4 = [1, 0, 7, 7, -4]^T$;
   $z = [17, 29, -26, 3, 19]^T$.

Příklad 4.5. Podprostor V prostoru W je generován prvky $v_1, v_2, ...$ Určete dimenzi podprostoru V. Rozhodněte, zda prvek $z \in V$. Pokud ano, určete bázi podprostoru V a $\widehat{z}$ souřadnice prvku z v této bázi podprostoru V.

1. $W = \mathbb{R}_5$,
   $v_1 = [1, 0, -3, 0, 2]^T, v_2 = [-2, 0, 5, 0, -2]^T, v_3 = [1, 0, -6, 0, 1]^T, v_4 = [-2, 0, 1, 0, 3]^T$;
   $z = [-10, 0, 13, 0, -7]^T$;

2. $W = \mathcal{P}_4$,
   $v_1(x) = x^4 - 2x^3 + 4, v_2(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x, v_3(x) = 2x^4 - x^3 + 4x - 5$;
   $z(x) = 5x^4 - x^3 + 22x - 11$.

3. $W = \mathcal{M}_{2,2}$,
   $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$;
   $z = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$;

4. $W = \mathbb{R}_4$,
   $v_1 = [1, 2, -1, 5]^T, v_2 = [-2, 1, 3, -2]^T, v_3 = [-1, 3, 2, 3]^T, v_4 = [-3, 4, 5, 1]^T$;
   $z = [-4, 7, 7, 5]^T$,

5. $W = \mathbb{R}_4$,
   $v_1 = [1, -1, 2, 3]^T, v_2 = [-2, 3, -5, 1]^T, v_3 = [0, 1, -1, 7]^T$;
   $z = [-7, 13, -20, 21]^T$,

6. $W = \mathbb{R}_5$,
   $v_1 = [1, 1, -1, 1, 0]^T, v_2 = [3, 1, 2, -1, 2]^T, v_3 = [-1, 2, 1, 1, -1]^T, v_4 = [2, -3, 1, 2, 1]^T$,
   $v_5 = [1, 1, 1, 1, 1]^T; z = [8, 1, 0, 16, 1]^T$.

Příklad 4.6. Množina V je podprostor prostoru W. Určete dimenzi a bázi podprostoru V. Rozhodněte, zda prvek $z \in V$. Pokud ano, určete $\widehat{z}$ souřadnice prvku z v bázi podprostoru V.

1. $W = \mathbb{R}_5$,
   $V = \{[a, a - b, 0, b + c, -a + b - c]^T \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$,
   $z = [3, -1, 0, 9, -4]^T$;

2. $W = \mathbb{R}_5$,
   $V = \{[a + 2b - c, 2a - b + 3c, -a + 3b - 4c, 3a + b + 2c, -5b + 5c]^T \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$,
   $z = [1, 17, -16, 18, 15]^T$;

3. $W = \mathbb{R}_5$,
   $V = \{[a + b - c + d, a - b + c + d, -a + b + c + d, a + b + c - d, a + b + c + d]^T \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$,
   $z = [2, 6, 6, -1, 3]^T$;

4. $W = \mathbb{R}_6$,
   $V = \{[a + b, b + c, c + d, a - c, b - d, a + b - c - d]^T \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$,
   $z = [2, -1, -2, 3, 1, 4]^T$;

5. $W = \mathcal{M}_{2,2}$,
$V = \{\begin{bmatrix} a-b & b-c \\ d-c & a-d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}, \quad Z = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$;

6. $W = \mathcal{P}_4$,
$V = \{(2a+b)x^4 + (b+2c)x^3 + (c+2d)x^2 + (a-b+c)x + (b-c+d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$,
$z(x) = 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 6x - 1$.