6 - Domácí cvičení č. 6

Příklad 6.1. Určete $\mathbf{T}$ matici přechodu od báze $g_1, g_2, ...$ k bázi $b_1, b_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$ a $\mathbf{H}$ matici přechodu od báze $b_1, b_2, ...$ k bázi $g_1, g_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$. Určete $\mathbf{T} \cdot \mathbf{H}$.

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$,
   $b_1 = [1, 2, 3]^T$, $b_2 = [2, 3, 1]^T$, $b_3 = [3, 1, 2]^T$,
   $g_1 = [1, 1, -1]^T$, $g_2 = [-1, 1, 1]^T$, $g_3 = [1, -1, 1]^T$,
2. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1$,
   $b_1 = 2x - 3$, $b_2 = -5x + 1$,
   $g_1 = 3x + 1$, $g_2 = 2x + 3$,
3. $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{2,2}$,
   $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $b_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,
   $g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $g_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $g_4 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,
4. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_2$,
   $b_1 = x^2 + 4x - 1$, $b_2 = 2x^2 - x + 1$, $b_3 = -x^2 + x + 2$,
   $g_1 = x^2 + x + 3$, $g_2 = x^2 + 3x + 1$, $g_3 = 3x^2 + x + 1$.

Příklad 6.2. Určete $\mathbf{T}_1$ matici přechodu od báze $e_1, e_2, ...$ k bázi $b_1, b_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$, matici $\mathbf{T}_2$ matici přechodu od báze $v_1, v_2, ...$ k bázi $e_1, e_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$ a matici $\mathbf{T}_3$ matici přechodu od báze $v_1, v_2, ...$ k bázi $b_1, b_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$. Určete $\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1$.

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$,
   $b_1 = [1, -2, 4]^T$, $b_2 = [4, 1, -2]^T$, $b_3 = [-2, 4, 1]^T$,
   $e_1 = [1, 0, 0]^T$, $e_2 = [0, 1, 0]^T$, $e_3 = [0, 0, 1]^T$,
   $v_1 = [2, 3, 0]^T$, $v_2 = [3, 0, 2]^T$, $v_3 = [0, 2, 3]^T$,
2. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1$,
   $b_1 = 2x + 5$, $b_2 = x + 3$,
   $e_1 = x$, $e_2 = 1$,
   $v_1 = -3x + 2$, $g_2 = 4x - 5$,
3. $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{2,2}$,
   $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$,
   $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
   $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,
4. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_2$,
   $b_1 = x^2 - x + 2$, $b_2 = -x^2 + x + 3$, $b_3 = x^2 + x - 1$,
   $e_1 = x^2$, $e_2 = x$, $e_3 = 1$,
   $v_1 = x^2 + 1$, $v_2 = x - 2$, $v_3 = x^2 - 3x$,
5. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_6$,
   $b_1 = [1, 1, 0, 0, -1, 1]$, $b_2 = [1, 0, 0, -1, 1, 1]$, $b_3 = [1, -1, 1, 0, 0, 1]$, $b_4 = [-1, 1, 1, 1, 0, 0]$, $b_5 = [0, 1, -1, 1, 1, 0]$, $b_6 = [1, 0, 1, -1, 1, 0]$;
   $e_1 = [1, 0, 0, 0, 0, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0, 0, 0, 0]$, $e_3 = [0, 0, 1, 0, 0, 0]$, $e_4 = [0, 0, 0, 1, 0, 0]$,

$e_5 = [0,0,0,0,1,0]$, $e_6 = [0,0,0,0,0,1]$;
$v_1 = [1,2,-1,0,1,2]$, $v_2 = [0,1,2,-1,0,1]$, $v_3 = [1,0,1,-2,0,1]$, $v_4 = [1,-2,0,1,1,1]$,
$v_5 = [0,2,-1,0,1,1]$, $v_6 = [1,0,1,-1,2,0]$.

Příklad 6.3. Určete $\mathbf{A}$ matici lineárního zobrazení $L{:}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ v bázi $e_1, e_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$, a matici $\mathbf{B}$ matici lineárního zobrazení $L{:}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ v bázi $b_1, b_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$. Dále určete $\mathbf{T}$ matici přechodu od báze $e_1, e_2, ...$ k bázi $b_1, b_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$ a matici $\mathbf{T}^{-1}$ matici přechodu od báze $b_1, b_2, ...$ k bázi $e_1, e_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$. Určete $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$.

1. $\mathcal{U} = \mathbb{R}_3$, $L([a,b,c]^T) = [2a-b+c, a+b+c, a-2b]^T$,
   $e_1 = [1,0,0]^T$, $e_2 = [0,1,0]^T$, $e_3 = [0,0,1]^T$,
   $b_1 = [1,2,-2]^T$, $b_2 = [2,-2,1]^T$, $b_3 = [-2,1,2]^T$,
2. $\mathcal{U} = \mathcal{P}_1$, $L(ax+b) = (4a+7b)x + (a-3b)$,
   $e_1 = x$, $e_2 = 1$,
   $b_1 = 2x-3$, $b_2 = x+5$,
3. $\mathcal{U} = \mathcal{M}_{2,2}$, $L(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a-b+c & 2a+b-c+d \\ b-2c+3d & a+c-d \end{bmatrix}$,
   $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
   $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $b_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,
4. $\mathcal{U} = \mathcal{P}_2$, $L(ax^2+bx+c) = (3a-5b+6c)x^2 + (a+2b-3c)x + (4a-3b+3c)$,
   $e_1 = x^2$, $e_2 = x$, $e_3 = 1$,
   $b_1 = x^2-3x+2$, $b_2 = 2x^2-x+3$, $b_3 = x^2+x+1$.

Příklad 6.4. Určete $\mathbf{A}$ matici lineárního zobrazení $L{:}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ v bázi $v_1, v_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$, a matici $\mathbf{B}$ matici lineárního zobrazení $L{:}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ v bázi $b_1, b_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$. Dále určete $\mathbf{T}$ matici přechodu od báze $v_1, v_2, ...$ k bázi $b_1, b_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$ a matici $\mathbf{T}^{-1}$ matici přechodu od báze $b_1, b_2, ...$ k bázi $v_1, v_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$. Určete $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$.

1. $\mathcal{U} = \mathbb{R}_3$, $L([a,b,c]^T) = [a-3b+c, -2a+b+c, -a-2b+2c]^T$,
   $v_1 = [2,-1,5]^T$, $v_2 = [-1,-5,2]^T$, $v_3 = [5,2,-1]^T$,
   $b_1 = [1,0,1]^T$, $b_2 = [0,1,1]^T$, $b_3 = [1,1,0]^T$,
2. $\mathcal{U} = \mathcal{P}_1$, $L(ax+b) = (2a+4b)x + (a-3b)$,
   $v_1 = x-2$, $v_2 = 2x+1$,
   $b_1 = 3x+5$, $b_2 = 5x-3$,
3. $\mathcal{U} = \mathcal{M}_{2,2}$, $L(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2a+3b-c+d & -a-b+2c+2d \\ a+b+c-2d & 2a+3b+2c+d \end{bmatrix}$,
   $v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$,
   $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,
4. $\mathcal{U} = \mathcal{P}_2$, $L(ax^2+bx+c) = (3a-2b+c)x^2 + (a+b-4c)x + (-2a+3b+2c)$,
   $v_1 = x^2+2x-5$, $v_2 = -x^2+x+3$, $v_3 = 2x^2-3x+4$,
   $b_1 = x^2-x+1$, $b_2 = x^2+x-1$, $b_3 = -x^2+x+1$.

Příklad 6.5. Určete $\mathbf{A}$ matici lineárního zobrazení $L{:}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ v bázi $e_1, e_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$ a v bázi $f_1, f_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$. Dále určete $\mathbf{B}$ matici lineárního zobrazení $L{:}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ v bázi $u_1, u_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$ a v bázi $v_1, v_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$. Určete $\mathbf{T}$ matici přechodu od báze $e_1, e_2, ...$ k bázi $u_1, u_2, ...$ v prostoru $\mathcal{U}$ a $\mathbf{H}$ matici přechodu od báze $v_1, v_2, ...$ k bázi $f_1, f_2, ...$ v prostoru $\mathcal{V}$. Určete $\mathbf{H} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$.

1. $\mathcal{U} = \mathbb{R}_2$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}_4$, $\quad L([a,b,c]^T) = [a+2b, 2a-b, a+b, a-b]^T$,
   $\mathbb{R}_2$: $e_1 = [1,0]^T$, $e_2 = [0,1]^T$,
   $\mathbb{R}_2$: $u_1 = [1,3]^T$, $u_2 = [2,1]^T$,
   $\mathbb{R}_4$: $f_1 = [1,0,0,0]^T$, $f_2 = [0,1,0,0]^T$, $f_3 = [0,0,1,0]^T$, $f_4 = [0,0,0,1]^T$,
   $\mathbb{R}_4$: $v_1 = [1,1,1,1]^T$, $v_2 = [1,1,2,1]^T$, $v_3 = [1,3,1,1]^T$, $v_4 = [4,1,1,1]^T$

2. $\mathcal{U} = \mathbb{R}_3$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}_2$, $\quad L([a,b,c]^T) = [a-b+4c, 2a+b-c]^T$,
   $\mathbb{R}_3$: $e_1 = [1,0,0]^T$, $e_2 = [0,1,0]^T$, $e_3 = [0,0,1]^T$,
   $\mathbb{R}_3$: $u_1 = [1,1,0]^T$, $u_2 = [1,1,1]^T$, $u_3[1,2,1]^T$,
   $\mathbb{R}_2$: $f_1 = [1,0]^T$, $f_2 = [0,1]^T$,
   $\mathbb{R}_2$: $v_1 = [1,4]^T$, $v_2 = [1,-1]^T$,

3. $\mathcal{U} = \mathcal{P}_2$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}_4$, $\quad L(ax^2+bx+c) = [a-b+2c, a+2b-c, 2a+b+c, -a+b+c]^T$,
   $\mathcal{P}_2$: $e_1 = x^2$, $e_2 = x$, $e_3 = 1$,
   $\mathcal{P}_2$: $u_1 = x^2+x$, $u_2 = x^2-x+1$, $u_3 = x+1$,
   $\mathbb{R}_4$: $f_1 = [1,0,0,0]^T$, $f_2 = [0,1,0,0]^T$, $f_3 = [0,0,1,0]^T$, $f_4 = [0,0,0,1]^T$,
   $\mathbb{R}_4$: $v_1 = [1,1,1,0]^T$, $v_2 = [1,1,0,1]^T$, $v_3 = [1,0,1,1]^T$, $v_4 = [0,1,1,1]^T$.

Příklad 6.6. Určete $\mathbf{A}$ matici lineárního zobrazení $L{:}\mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ v bázi $v_1, v_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}_1$ a v bázi $p_1, p_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}_2$. Dále určete $\mathbf{B}$ matici lineárního zobrazení $L{:}\mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ v bázi $b_1, b_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}_1$ a v bázi $q_1, q_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}_2$. Určete $\mathbf{T}$ matici přechodu od báze $v_1, v_2, ...$ k bázi $b_1, b_2, ...$ v prostoru $\mathcal{L}_1$ a $\mathbf{H}$ matici přechodu od báze $q_1, q_2, ...$ k bázi $p_1, p_2, ...$ v prostoru $\mathcal{L}_2$. Určete $\mathbf{H} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$.

1. $\mathcal{L}_1 = \mathbb{R}_3$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{P}_1$, $\quad L([a,b,c]^T) = (a+2b+c)x + (3a-b+2c)$,
   $\mathbb{R}_3$: $v_1 = [1,2,-1]^T$, $v_2 = [2,-1,1]^T$, $v_3 = [-1,1,2]^T$,
   $\mathbb{R}_3$: $b_1 = [2,3,0]^T$, $b_2 = [3,0,2]^T$, $b_3 = [0,2,3]^T$,
   $\mathcal{P}_1$: $p_1 = x+2$, $p_2 = 2x+1$,
   $\mathcal{P}_1$: $q_1 = x-3$, $q_2 = -3x+1$,

2. $\mathcal{L}_1 = \mathbb{R}_2$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{P}_2$, $\quad L([a,b]^T) = (4a-5b)x^2 + (a+3b)x + (6a+b)$,
   $\mathbb{R}_2$: $v_1 = [1,2]^T$, $v_2 = [1,1]^T$,
   $\mathbb{R}_2$: $b_1 = [2,-3]^T$, $b_2 = [-3,1]^T$,
   $\mathcal{P}_2$: $p_1 = x^2+2x-3$, $p_2 = -x^2+x+2$, $p_3 = 2x^2-3x+1$,
   $\mathcal{P}_2$: $q_1 = x^2-x-1$, $q_2 = -x^2+x-1$, $q_3 = -x^2-x+1$,

3. $\mathcal{L}_1 = \mathcal{P}_2$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{M}_{2,3}$, $\quad L(ax^2+bx+c) = \begin{bmatrix} a-b & b+c & a+c \\ 2a+c & b-a & b+2c \end{bmatrix}$,
   $\mathcal{P}_2$: $v_1 = x^2+x-3$, $v_2 = x^2-2x+1$, $v_3 = -x^2+x+1$,
   $\mathcal{P}_2$: $b_1 = x^2+2x$, $b_2 = x+2$, $v_3 = 2x^2+1$,
   $\mathcal{M}_{2,3}$: $p_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $p_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $p_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,
   $p_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $p_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,
   $\mathcal{M}_{2,3}$: $q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $q_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,
   $q_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $q_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.