8 - Domácí cvičení č. 8

Příklad 8.1. Určete ortogonální bázi $b_1, b_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{V} = \mathbb{R}_4$, $(u, v) = u^T v$,
2. $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathbb{R}_5$ generovaný prvky $g_1 = [1, 2, 0, 1, -1]^T$, $g_2 = [-1, 1, 1, 2, -1]^T$, $g_3 = [1, 5, 1, 4, -3]^T$, $g_4 = [0, 3, 1, 3, -2]^T$, $(u, v) = u^T v$,
3. $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathbb{R}_5$ generovaný prvky $g_1 = [1, -1, 0, 1, 1]^T$, $g_2 = [-1, 1, 1, -1, 1]^T$, $g_3 = [0, 1, -1, 1, -1]^T$, $g_4 = [1, 0, 0, 2, 2]^T$, $(u, v) = u^T v$,
4. $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2$, $(u, v) = \int_{-1}^{2} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
5. $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathcal{P}_5$ generovaný prvky $g_1 = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 2$, $g_2 = 2x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 1$, $g_3 = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 3$, $g_4 = 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x + 3$, $(u, v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
6. $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathbb{R}_6$ generovaný prvky $g_1 = [1, 2, -1, 1, 1, 0]^T$, $g_2 = [0, 1, 2, -1, 1, 1]^T$, $g_3 = [1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$, $g_4 = [-1, 0, 1, 0, -2, 1]^T$, $g_4 = [1, 4, 3, 1, 1, 3]^T$, $(u, v) = u^T v$.

Příklad 8.2. Ukažte, že množina $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathcal{L}$ a určete dimenzi a ortogonální bázi $b_1, b_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_4$, $\mathcal{V} = \{[a + b, 2a + b + c, -a + b + 2c, b + c]^T : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $(u, v) = u^T v$,
2. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$, $\mathcal{V} = \{[a - b + c + d, a + c + 2d, -a + b + c + d, a + b + 2d, b - c]^T : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, $(u, v) = u^T v$,
3. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_4$, $\mathcal{V} = \{[a - b + c - 2d, 2a + b - 3c + d, 3a - 2c - d, -a - 2b + 4c - 3d]^T : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, $(u, v) = u^T v$
4. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_6$, $\mathcal{V} = \{[a + b - c + d, a - b + c + d, -a + b + c + d, a + b + c + 3d, 2b - 2c, 2a - 2b]^T : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, $(u, v) = u^T v$
5. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_3$, $\mathcal{V} = \{(a + c)x^3 + (b + c)x^2 + (-a - c)x + (b + c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $(u, v) = \int_0^2 u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
6. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$, $\mathcal{V} = \{[a + c - d, b + c + d, a + b + 3c - d, -a + d, a - b + c - 4d]^T : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, $(u, v) = u^T v$.

Příklad 8.3. Určete ortonormální bázi $e_1, e_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathbb{R}_4$ generovaný prvky $g_1 = [1, 1, -1, 2]^T$, $g_2 = [2, -2, 1, 1]^T$, $g_3 = [8, -4, 1, 7]^T$, $(u, v) = u^T v$,
2. $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathbb{R}_5$ generovaný prvky $g_1 = [1, 1, 0, -1, 1]^T$, $g_2 = [1, -1, 1, 0, 1]^T$, $g_3 = [-1, 0, 1, 1, -1]^T$, $g_4 = [1, 0, 2, 0, 1]^T$, $(u, v) = u^T v$,
3. $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2$, $(u, v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
4. $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathbb{R}_6$ generovaný prvky $g_1 = [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T$, $g_2 = [0, 1, 1, 1, 0, 0]^T$, $g_3 = [0, 0, 1, 1, 1, 0]^T$, $g_4 = [0, 0, 0, 1, 1, 1]^T$, $g_5 = [1, 2, 3, 3, 2, 1]^T$, $(u, v) = u^T v$,

Příklad 8.4. Určete dimenzi a ortonormální bázi $e_1, e_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{V} = \{[a+b, a-b+c, a+2b-c, b+c]T : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $(u, v) = u^T v$,
2. $\mathcal{V} = \{[a+b-c+d, -a+b+c+2d, 2b+3d, a+3b-c+4d, -2a-4b+2c-5d]T : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, $(u, v) = u^T v$,
3. $\mathcal{V} = \{(a-c)x^2 + (b+c)x + (a+b) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
4. $\mathcal{V} = \{[a-b+c+d, 2a+b-2c, -a+3b-c+d, 2a+3b-2c+2d, -a-2b+3c+d, a+4b-3c+d]^T : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, $(u, v) = u^T v$,
5. $\mathcal{V} = \{[a-b+c, 2a+b-c+d, b+c-2d, a+b+c+d, a-2b+3c]^T : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, $(u, v) = u^T v$.

Příklad 8.5. Určete ortogonální průmět v_0 prvku v do podprostoru $\mathcal{L}_1$ prostoru $\mathcal{L}$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$, $\mathcal{L}_1 = \{[a, b, c, d, 0]^T : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$; $v = [1, 2, -4, 5, 6]^T$, $(u, v) = u^T v$,
2. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$, $\mathcal{L}_1$ je generován prvky $b_1 = [1, -1, 1, 0, 1]^T$, $b_2 = [0, 1, 1, -1, 1]^T$, $b_3 = [2, 1, 0, 2, -1]^T$; $v = [17, -4, -8, 7, -6]^T$, $(u, v) = u^T v$,
3. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$, $\mathcal{L}_1$ je generován prvky $b_1 = [2, 1, -1, 3, 0]^T$, $b_2 = [1, -2, 1, -1, 2]^T$, $b_3 = [3, -1, 0, 2, 2]^T$; $v = [3, 23, -11, 21, -11]^T$, $(u, v) = u^T v$,
4. $\mathcal{L} = \mathcal{C}(-1, 1)$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{P}_2$; $v = \frac{1}{x+2}$, $(u, v) = \int_{-1}^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
5. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$, $\mathcal{L}_1 = \{[a+b-c+d, -2a-b+3c-d, -a+2c, b+c+d, a+2b+2d]^T : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$; $v = [-5, -4, -5, -4, 3]^T$, $(u, v) = u^T v$,
6. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_6$, $\mathcal{L}_1 = \{[a-b+c+d, 2a+b-c+2d, a+2c+3d, -a+2b+d, 2a+c+3d, a-b]^T : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$; $v = [28, 4, 1, -1, 3, -9]^T$, $(u, v) = u^T v$,
7. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_4$, $\mathcal{L}_1 = \{[a+b-c, a-b+5c, a+2b-4c, -b+3c]^T : a, b, c \in R\}$; $v = [5, -6, 3, -7]^T$, $(u, v) = u^T v$.

Příklad 8.6. Metodou nejmenších čtverců určete funkci $f(x)$, která nejlépe aproximuje naměřené hodnoty.

1. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 2.

x	-2	-1	0	1	2	3
y(x)	-3,2	-5,5	-5,3	-0,1	9,1	22

2. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 1.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y(x)	-18	-16,3	-10,9	-7,1	-2,8	1,1	5	8,9	13,1	17

3. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 1.

x	-4	-3	-2	-1	0	0	1	1	2	2	3	4	5
y(x)	-18	-16,3	-10,9	-7,1	-2,8	-2,8	1,1	1,1	5	5	8,9	13,1	17

4. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 2.

x	-2	-1	-1	0	0	1	2	2	3
y(x)	-13,6	-8,8	-8,2	-3,4	-3,9	-2,1	-2	-1,9	-4,1

5. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 1.

x	-6	-5	-4	-4	-3	-3	-1	0	1	2
y(x)	19,2	17,9	14	14,1	10,9	11	5,1	1,9	-1,1	-4

6. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 3, který má v bodě 0 hodnotu 0.

x	-4	-3	-2	-1	1	1	2	3
y(x)	4,525	13,3	15,65	6,9	-1,1	-0,9	10,1	39