

2. Náhodná veličina

Vyšetřovat jen náhodné jevy, které jsme definovali v předchozí kapitole se může mnohdy jevit jako bezúčelné. V praxi se velmi často soustředujeme na práci s jistými funkcemi definovanými právě na množině náhodných jevů. Ukazuje se však, že taková funkce musí mít určité vlastnosti, abychom ji vůbec mohli jednoduše vyšetřovat. To vede k následující definici.

Definice 2.1 Náhodná veličina

Nechť $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ je pravděpodobnostní prostor. Zobrazení $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1$ nazveme náhodnou

veličinou $\Leftrightarrow \begin{matrix} \text{def} & \forall \\ & c \in \mathbb{R}_1 \end{matrix} X^{-1}((-\infty; c)) \in \mathcal{A}.$

Poznámka 2.1

Takovéto zobrazení se někdy nazývá **borelovsky měřitelné**.

Vztah mezi definicí 2.1 a poznámkou 2.1 vyjasňuje následující věta.

Věta 2.1

Nechť $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ je pravděpodobnostní prostor. Potom X je náhodnou veličinou na Ω

$$\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{B}; X^{-1}(E) \in \mathcal{A}, \text{ kde } \mathcal{B} \text{ je borelovská } \sigma\text{-algebra na } \mathbb{R}_1.$$

Důkaz:

Důkaz implikace $\Leftarrow$ je zřejmý, neboť pro libovolné $c \in \mathbb{R}_1$ je interval $(-\infty, c)$ borelovskou množinou.

Nechť E je borelovská množina v $\mathbb{R}_1$. Potom podle tvrzení příkladu 1.5.2.1 část 3. je σ -algebra vytvořená z množiny všech otevřených intervalů typu $(-\infty, c)$ rovna borelovské σ -algebře $\mathcal{B}$. Odtud vyplývá, že je možno množinu E napsat jako spočetné sjednocení množin typu interval $(-\infty, c)$ nebo jeho doplněk. Protože ale platí pro libovolné zobrazení X

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} X^{-1}(A_i) \text{ a dále } X^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} X^{-1}(A_i). \text{ Je implikace zřejmá.}$$

Q.E.D.

Z této věty je možno odvodit „různé“ definice náhodné veličiny pomocí různých druhů intervalů $I_{a,b}$. Jedinou podmínkou je, aby σ -obal tohoto systému takovýchto intervalů byl roven borelovské σ -algebře v $\mathbb{R}_1$. V některých situacích můžeme takovouto možnou změnu definice využít.

Pokud se nám podařilo definovat **náhodnou veličinu**, je zřejmé, že nás bude zajímat vůči jakým matematickým operacím bude množina všech náhodných veličin uzavřená. Velmi široce to řeší následná věta.

Věta 2.2

Nechť $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ je pravděpodobnostní prostor. Nechť $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1$ je náhodná veličina a nechť dále zobrazení $F : \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_1$ je **borelovsky měřitelné** (tedy $\forall E \in \mathcal{B}; F^{-1}(E) \in \mathcal{B}$).

Potom je $F \circ X$ náhodná veličina.

Důkaz:

Podle předchozí věty stačí dokázat, že platí výrok

$$\forall E \in \mathcal{B} ; (F \circ X)^{-1}(E) \in \mathcal{A}, \text{ ale } (F \circ X)^{-1} = X^{-1} \circ F^{-1}. \text{ Dále je jistě}$$

$F^{-1}(E) \in \mathcal{B}$, označme $F^{-1}(E) = H$. Potom je $(F \circ X)^{-1}(E) = X^{-1}(H) \in \mathcal{A}$, právě podle předchozí věty 2.1.

Q.E.D.

Poznámka 2.2

Protože každé spojitě zobrazení na množině $\mathbb{R}_1$ je zároveň borelovsky měřitelné, je složení libovolné spojitě funkce a náhodné veličiny opět náhodná veličina. Takže například libovolná přirozená mocnina náhodné veličiny X je opět náhodná veličina.

Věta 2.3

Nechť $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ je pravděpodobnostní prostor. Potom

- Množina všech náhodných veličin je neprázdná
- Nechť k je reálné číslo a X je náhodná veličina. Potom $k \cdot X$ je také náhodná veličina.
- Nechť X a Y jsou náhodné veličiny. Potom také $Z = X + Y$ je náhodná veličina.

Důkaz:

- Nechť $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1$ je zobrazení definované jako libovolná reálná konstanta k . Dokážeme, že takovéto zobrazení je náhodná veličina. Zvolme si libovolné reálné číslo c , potom mohou nastat dva různé případy:

- $c \leq k$, potom $X^{-1}((-\infty, c)) = \emptyset \in \mathcal{A}$

- $c > k$, potom $X^{-1}((-\infty, c)) = \Omega \in \mathcal{A}$.

Tedy množina náhodných veličin je neprázdná.

- Budeme vyšetřovat samostatně tři různé možnosti :

- $k > 0$. Potom $(k \cdot X)^{-1}((-\infty, c)) = X^{-1}((-\infty, \frac{c}{k})) = X^{-1}((-\infty, C)) \in \mathcal{A}$, kde C je

reálné číslo

- $k = 0$. Potom $k \cdot X = 0$ a podle předchozího je náhodnou veličinou

- $k < 0$. Potom je $(k \cdot X)^{-1}((-\infty, c)) = X^{-1}((\frac{c}{k}, \infty)) = X^{-1}((C, \infty)) \in \mathcal{A}$.

Interval (C, ∞) je pro libovolné reálné číslo C borelovskou množinou (je dokonce otevřeným intervalem).

- Náš úkol bude vhodným způsobem rozepsat množinu součtů $X + Y$. Zvolíme tedy libovolné reálné číslo c a napíšeme níže uvedenou množinu jako spočetné sjednocení náhodných jevů (sjednocení se provádí přes množinu všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$, pro každé racionální q je níže uvedený průnik náhodným jevem)

$$\{\omega; X(\omega) + Y(\omega) < c\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{\omega; X(\omega) < q\} \cap \{\omega; Y(\omega) < c - q\}) \in \mathcal{A}$$

Q.E.D.

Přirozeným zobecněním našeho postupu je zavedení podobného pojmu pro případ zobrazení z množiny Ω do prostoru $\mathbb{R}_n$. Uvedme tedy následující definici.

Definice 2.2 náhodný vektor

Nechť $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ je pravděpodobnostní prostor. **n – rozměrným náhodným vektorem** $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ nazveme takové zobrazení $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_n$, pro něž pro libovolný prvek $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}_n$ platí

$$\bigcap_{i=1}^n \{\omega; X_i(\omega) < c_i\} \in \mathcal{A} \quad (2.1)$$

Pro vlastní zjištění, zda je určité zobrazení $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_n$ náhodným vektorem je většinou určení předchozího vztahu (2.1) velmi náročné. Proto dokážeme následující větu, kterou si můžeme zapamatovat pod úslovím – náhodný vektor je náhodná veličina po složkách.

Věta 2.4

Nechť $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ je pravděpodobnostní prostor. Zobrazení $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_n$ je náhodným vektorem právě když pro všechny $i=1, \dots, n$ jsou X_i náhodné veličiny.

Důkaz:

Dokažme nejdříve implikaci $\Rightarrow$.

Nechť tedy $\mathbb{X}$ je náhodný vektor. Zvolme dále $\mathbf{c} \in \mathbb{R}_1$. Důkaz provedeme například pro složku X_1 . Pro $i \in \mathbb{N}$ označme

$$\begin{aligned} A_i &= \{\omega; X_1(\omega) < c\} \cap \{\omega; X_2(\omega) < i\} \cap \dots \cap \{\omega; X_n(\omega) < i\} = \\ &= \{\omega; X_1(\omega) < c\} \cap \bigcap_{k=2}^n \{\omega; X_k(\omega) < i\}, \text{ pro } i=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Protože $\mathbb{X}$ je náhodný vektor, jsou všechny $A_i \in \mathcal{A}$, ale

$$\{\omega; X_1(\omega) < c\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{ \{\omega; X_1(\omega) < c\} \cap \bigcap_{k=2}^n \{\omega; X_k(\omega) < i\} \right\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}. \quad \text{Z tohoto vztahu}$$

vyplývá, že X_1 je náhodná veličina.

Nyní dokážeme implikaci $\Leftarrow$.

Nechť nyní pro libovolné $k = 1, 2, \dots, n$ jsou X_k náhodné veličiny. Potom ale jistě platí

$$\{\omega; X_k(\omega) < c_k\} \in \mathcal{A} \text{ a tedy také } \bigcap_{k=1}^n \{\omega; X_k(\omega) < c_k\} \in \mathcal{A}, \text{ kde hodnoty } c_k \text{ jsou postupně } k$$

– té souřadnice prvku $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}_n$.

Q.E.D.

Vlastní práce s právě definovanými náhodnými veličinami a vektory by byla velmi komplikovaná, proto byla pro každou náhodnou veličinu zavedena speciální reálná funkce nazývaná **distribuční** funkce. Z chování této funkce je možno usoudit na chování také náhodné veličiny.

Definice 2.3 distribuční funkce náhodné veličiny

Nechť $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ je pravděpodobnostní prostor, nechť dále je X náhodná veličina.

Distribuční funkcí této náhodné veličiny budeme rozumět zobrazení $F : \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_1$ definované vztahem

$$F : x \mapsto P(\{\omega; X(\omega) \leq x\}) \quad (2.2)$$

Příklad

Nechť $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, $\mathcal{A} = \exp(\Omega)$ a $P(A) = \frac{|A|}{6}$.

$X(1) = X(2) = X(3) = -1$; $X(4) = X(5) = 1$; $X(6) = 4$. Takto definovanou náhodnou veličinu můžeme například interpretovat tak, že při hodu kostkou v případě, že padne 1, 2, 3 body platíme 1; padnou-li 4, 5 dostaneme 1 a padne-li 6 bereme 4.

Proveďme nyní analýzu hodnot funkce F :

1. Jestliže $x \leq -1$ potom

$$\{\omega; X(\omega) < x\} = \emptyset \quad \text{tedy} \quad P(\emptyset) = 0 \Rightarrow F(x) = 0$$

2. Jestliže $-1 < x \leq 1$ potom

$$\{\omega; -\infty < X(\omega) < x\} = \{1, 2, 3\} \Rightarrow F(x) = P(\{\omega; -\infty < X(\omega) < x\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. Jestliže $1 < x \leq 4$ potom

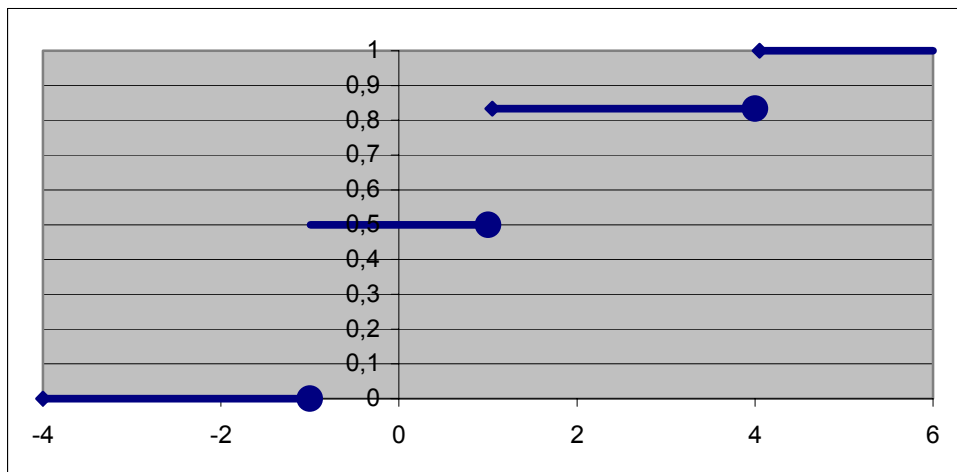
$$\{\omega; -\infty < X(\omega) < x\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow F(x) = P(\{\omega; -\infty < X(\omega) < x\}) = \frac{5}{6}$$

4. Jestliže $x > 4$ potom

$$\{\omega; -\infty < X(\omega) < x\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow F(x) = P(\{\omega; -\infty < X(\omega) < x\}) = \frac{6}{6} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & , \quad x \in (-1, 1) \\ \frac{5}{6} & , \quad x \in (1, 4) \\ 1 & , \quad x > 4 \end{cases}$$

Graf dané distribuční funkce potom vypadá takto:



V následující větě uvedeme základní vlastnosti **distribuční funkce náhodné veličiny X**.

Věta 2.5

Vlastnosti distribuční funkce

Nechť F je distribuční funkce náhodné veličiny X . Potom platí:

1. Jestliže $a < b$ jsou reálná čísla potom

$$P(\{\omega; a \leq X(\omega) < b\}) = F(b) - F(a)$$

2. F je neklesající funkce

3. F je spojitá zleva v každém bodě

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

Důkaz:

1. Položme $A = \{\omega; X(\omega) < a\}$, $B = \{\omega; X(\omega) < b\}$, jistě $A, B \in \mathfrak{A}$, dále $A \subset B$. Tedy podle Tvzení 1.5.2.2 je $P(B) - P(A) = P(B \setminus A) = F(b) - F(a) = P(\{\omega; a \leq X(\omega) < b\})$

2. Podle tvrzení 1.5.2.2 je pro libovolný náhodný jev A $P(A) \geq 0$, proto je také $F(b) - F(a) = P(\{\omega; a \leq X(\omega) < b\}) \geq 0 \Rightarrow F(b) \geq F(a)$

3. Necht' $x \in \mathbb{R}_1$, zvolme $\{x_n\}, x_n \nearrow x$. Označme

$$A_n = \{\omega; X(\omega) < x_n\} \Rightarrow A_n \in \mathfrak{A}, A_n \subset A_{n+1} (n = 1, 2, \dots). \text{ Zároveň platí}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega; X(\omega) < x\}. \text{ Potom je jistě}$$

$$F(x) = P(\{\omega; X(\omega) < x\}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n). \text{ Tento vztah vyplývá}$$

opět z tvrzení 1.5.2.2.

4. Položíme – li v předchozím tvrzení $x = +\infty$ a $\{x_n\} = \{n\}$, dostáváme rovnost

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\Omega) = 1$$

5. Tuto vlastnost ukážeme obdobně s využitím tvrzení 1.5.2.2. Zvolíme klesající posloupnost $\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n = -\infty$. Označme dále

$$B_n = \{\omega; X(\omega) < x_n\}. \text{ Potom } B_n \in \mathfrak{A} \text{ a } B_n \supset B_{n+1} (n = 1, 2, \dots). \text{ Proto}$$

$$0 = P(\emptyset) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$$

Q.E.D.

V této kapitole jsme definovali postupně náhodnou veličinu, tento pojem jsme zobecnili na pojem náhodného vektoru. Podobně v dalším zavedeme pojem distribuční funkce náhodného vektoru. Dříve však vyřešíme terminologickou poznámku.

Poznámka 2.3

Vzhledem k častému používání zjednodušíme následující zápisy takto:

Necht' $\mathbf{X}$ je náhodná veličina a $x \in \mathbb{R}_1$ potom množinu $\{\omega; X(\omega) < x\}$ budeme zapisovat jako $\{X < x\}$.

Pro případ vícerozměrný bude množina $\{\omega; X_1(\omega) < x_1, X_2(\omega) < x_2, \dots, X_n(\omega) < x_n\}$ rovna

množině $\bigcap_{k=1}^n \{\omega; X_k(\omega) < x_k\}$, kde hodnoty $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_1$, budeme ji prostě

zapisovat $\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\}$. Takováto označení podržíme i po zbytek přednášek.

Zavedeme dále definici distribuční funkce náhodného vektoru, která by měla být vícerozměrnou verzí distribuční funkce náhodné veličiny, včetně vlastností.

Definice 2.4

Distribuční funkcií náhodného vektoru $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ na pravděpodobnostním prostoru $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ nazveme reálnou funkci $F: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_1$, definovanou takto

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\}), \quad (2.3)$$

kde $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$. Takovouto distribuční funkci budeme označovat $F_{\mathbb{X}}$.

Podobně jako ve větě 2.5 můžeme zkoumat vlastnosti **distribuční funkce náhodného vektoru**.

Věta 2.6

Distribuční funkce $F_{\mathbb{X}}$ náhodného vektoru $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ má následující vlastnosti:

1. Funkce $F_{\mathbb{X}}$ je neklesající v každé své proměnné x_i
2. Funkce $F_{\mathbb{X}}$ je zleva spojitá v každé své proměnné x_i
3.
$$\lim_{\substack{x_i \rightarrow +\infty \\ i=1,2,\dots,n}} F_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$
4.
$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0, \quad \forall_{i=1,\dots,n}$$
5. V případě dvourozměrném, necht' $-\infty < a_1 \leq b_1 < +\infty$ a $-\infty < a_2 \leq b_2 < +\infty$. Potom platí $0 \leq P(\{a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2\}) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$

Důkaz:

Provedeme ho stejně jako v případě věty 2.5. Část 5. lze ještě zobecnit pro případ více rozměrů.

Příklad

Zjistěte, zda následující funkce F je distribuční funkcí náhodného vektoru:

$$F: (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 0, & (x_1 + x_2 < 1) \quad \text{nebo} \quad x_1 < 0 \quad \text{nebo} \quad x_2 < 0 \\ 1 & , \text{jinak} \end{cases}.$$

Řešení:

Na první pohled je zřejmé, že funkce splňuje vlastnosti 1. – 4. předchozí věty. Avšak podle (2.3) je $P(\{-1 \leq X_1 < 2, -1 \leq X_2 < 2\}) = F(2, 2) - F(-1, 2) - F(2, -1) + F(-1, -1) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1$. Ale podle definice pravděpodobnosti **P** musí být výsledek nezáporný. Tedy uvedená funkce není distribuční funkcí náhodného vektoru.

Pro další případné šetření má hluboký smysl následující věta, která šetří variantu části 3. z předchozí věty. Zkoumáme v ní případy, kdy jsou hodnoty v jedné pevné proměnné libovolně velké.

Vzniklou funkci podrobíme analýze. Ukazuje se, že takováto funkce je opět funkcí distribuční, ale je nutno ji vztahovat k jinému náhodnému vektoru. Takovéto distribuční funkce nazýváme **marginálními** (okrajovými) distribučními funkcemi původní distribuční funkce $F_{\mathbb{X}}$.

Věta 2.7

Necht' $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ je pravděpodobnostní prostor a $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je náhodný vektor. Potom pro $i=1, 2, \dots, n$ platí

$$\lim_{x_i \rightarrow +\infty} \mathbb{F}_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{F}_{\mathbb{Y}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad \text{kde} \quad \mathbb{Y} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Důkaz:

Označme $A_{li} = \bigcap_{j=1}^{i-1} \{X_j < x_j\} \cap \{X_i < l\} \bigcap_{j=i+1}^n \{X_j < x_j\}$. Tedy platí $A_{li} \subset A_{2i} \subset \dots$.

$$\lim_{x_i \rightarrow +\infty} \bigcap_{j=1}^n \{X_j < x_j\} = \lim_{l \rightarrow +\infty} A_{li} = \bigcup_{l=1}^{+\infty} A_{li} = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \{X_j < x_j\}.$$

Q.E.D.

Poznámka 2.4

- A. Jestliže budeme předchozí větu používat k – krát postupně pro indexy $\{i_1, \dots, i_k\} = I \subset J = \{1, \dots, n\}$ dostaneme postupně

$$\lim_{\substack{x_i \rightarrow +\infty \\ i \in J \setminus I}} \mathbb{F}_{\mathbb{X}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{F}_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}).$$

- B. Speciálně pro $n = 2$ existují dvě různé marginální distribuční funkce :

$$\mathbb{F}_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \mathbb{F}_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \mathbb{F}_{(X_1, X_2)}(x_1, +\infty), \text{ poslední výraz je jen}$$

symbolický zápis předchozí rovnosti. Podobně tedy můžeme vytvořit i druhou marginální distribuční funkci $\mathbb{F}_{X_2}(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \mathbb{F}_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \mathbb{F}_{(X_1, X_2)}(+\infty, x_2)$.

- C. Distribuční funkce náhodného vektoru určuje podle A. jednoznačně marginální distribuční funkce. Naopak příslušné marginální distribuční funkce nemusí dokonce určovat žádnou distribuční funkci náhodného vektoru.

Příklady na práci s distribučními funkcemi jsou uvedeny postupně v následujících souborech.

Základní typy náhodných veličin

Náhodné veličiny popisují reálné děje, které je možné modelovat pomocí náhodných jevů. Popis těchto náhodných jevů může mít ve své obecnosti tři různé tvary:

1. Náhodná veličina nabývá na celém $\mathbb{R}_1$ jen konečně nebo spočetně mnoha hodnot
2. Náhodná veličina nabývá na celém $\mathbb{R}_1$ hodnot z nějakého reálného intervalu
3. Náhodná veličina je kombinací předchozích dvou možností 1. a 2.

V celé této přednášce se soustředíme jen na první a druhý případ.

Definice 2.5

Náhodná veličina $\mathbf{X}$ se nazývá **diskrétní**, jestliže nabývá jen konečně nebo spočetně mnoha hodnot $x_1, x_2, \dots$ s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \dots$, kde

$$p_i = P(X = x_i). \quad (2.4)$$

Definice 2.6

Náhodná veličina $\mathbf{X}$ se nazývá **spojitá**, jestliže existuje nezáporná integrovatelná funkce $\mathbf{f}$ na $\mathbb{R}_1$, že pro všechny $x \in \mathbb{R}_1$, platí

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (2.5)$$

Funkce $\mathbf{f}$ se nazývá hustota náhodné veličiny $\mathbf{X}$.

Definice 2.7

Nechť $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ je pravděpodobnostní prostor a $\mathbf{X}$ je diskrétní náhodná. Potom **pravděpodobnostní funkci** P náhodné veličiny $\mathbf{X}$ definujeme takto:

$$\mathcal{P} : x \mapsto P(X = x) \quad (2.6)$$

Věta 2.8

Nechť $\mathbf{X}$ je náhodná veličina spojitěho typu. Potom má hustota $\mathbf{f}$ této náhodné veličiny následující vlastnosti:

1. Funkce $\mathbf{f}$ je nezáporná pro „s.v.“ prvky z $\mathbf{R}_1$
2. Na rozdíl od distribuční funkce náhodné veličiny $\mathbf{X}$ není funkce $\mathbf{f}$ určena přesně
3. $P(X = x_0) = 0$, pro všechny $x_0 \in \mathbf{R}_1$
4. Nechť $\mathbf{F}$ je distribuční funkce náhodné veličiny $\mathbf{X}$. Potom pro libovolné $x_0 \in \mathbf{R}_1$ platí
$$P(X = x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) - F(x_0).$$

Důkaz:

1. Podle definice 2.6 a věty 2.5 je pro libovolné $a < b$ $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \geq 0$, musí být proto funkce $\mathbf{f}$ nezáporná s.v. (klasická vlastnost integrálu)
2. Hodnotu hustoty $\mathbf{f}$ lze měnit postupně v konečném počtu bodů, dokonce lze hodnotu hustoty $\mathbf{f}$ změnit na množině míry 0, aniž se změní hodnota distribuční funkce $\mathbf{F}$.
3. Bude vyplývat z následujícího tvrzení, neboť v tomto případě je podle definice 2.6 distribuční funkce $\mathbf{F}$ dokonce absolutně spojitá a proto $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$, pro libovolné x_0 .
4.
$$P(X = x_0) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (x_0 \leq X < x_0 + \frac{1}{n})\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_0 \leq X < x_0 + \frac{1}{n}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) - F(x_0)$$

Definice 2.8

Nechť $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ je pravděpodobnostní prostor a $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je náhodný vektor.

Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X}$ je **spojitý**, jestliže existuje nezáporná integrovatelná funkce $f : \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}_1$, $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ taková, že pro všechna $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_n$

$$\mathbb{F}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n, \quad (2.7)$$

kde $\mathbb{F}$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Funkci $\mathbf{f}$ nazýváme sdruženou hustotou náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

Definice 2.9

Nechť $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ je pravděpodobnostní prostor a $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je náhodný vektor.

Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X}$ je **diskrétní**, jestliže existuje funkce $\mathbb{P} : \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}_1$ a taková posloupnost bodů $x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i) \in \mathbf{R}_n, i = 1, 2, \dots$, že platí

$$\sum_i \mathbb{P}(x^i) = \sum_i P(X_1 = x_1^i, \dots, X_n = x_n^i) = 1, \quad (2.8)$$

funkci $\mathbb{P}$ nazýváme sdruženou pravděpodobnostní funkcí náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

2.1 Náhodné veličiny diskrétního typu

2.1.1 Degenerované rozdělení

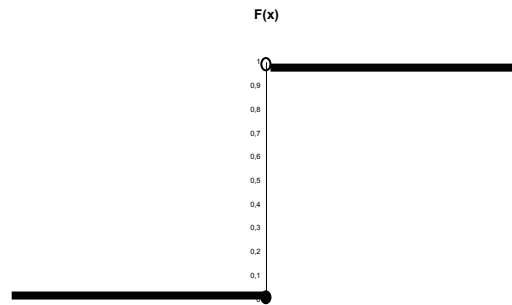
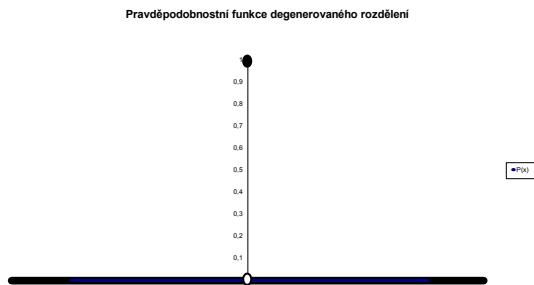
Nejjednodušší typ náhodné veličiny. Zvolme $x_0 \in \mathbb{R}_1$.

$$\text{Necht' } P : x \mapsto \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}.$$

Pravděpodobnostní funkce tedy nabývá jen hodnoty 0 a 1

Pravděpodobnostní funkce

Distribuční funkce



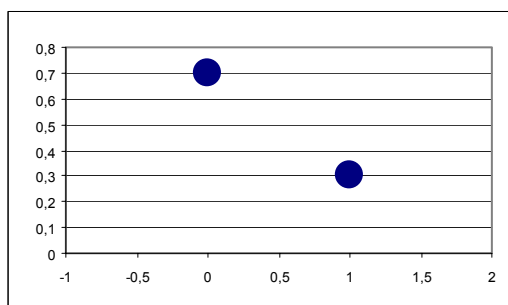
2.1.2 Alternativní rozdělení

Tento typ náhodné veličiny hraje již významnější roli jak v praktickém uplatnění náhodných veličin. Pomocí ní můžeme snadno modelovat situace, které mají dvě alternativní odpovědi např. pokus se podařil, pokus nedopadl dobře; odpověď na otázku je pozitivní, odpověď je negativní. Toto rozdělení je i základním rozdělením pro binomické rozdělení. Budeme ho definovat podobně jako v předchozím případě pomocí pravděpodobnostní funkce (všimněme si , že hodnota závisí na parametru p):

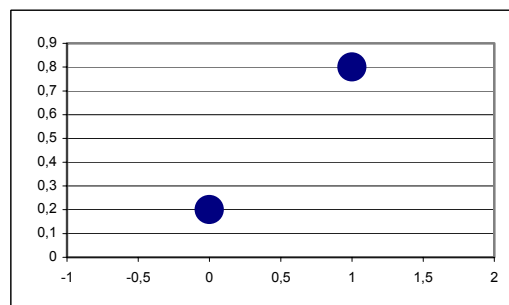
$$P : x \mapsto \begin{cases} 1 - p, & x = 0 \\ p, & x = 1 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad (2.9)$$

Pravděpodobnostní funkce

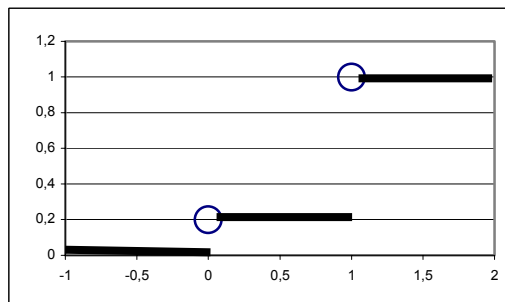
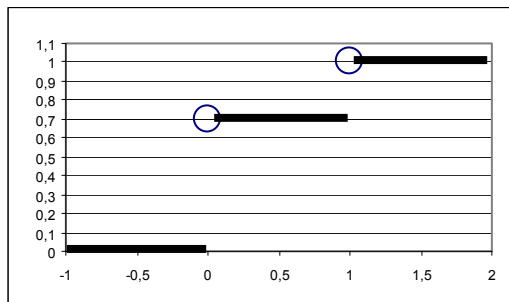
p = 0,3



p = 0,8



Distribuční funkce



2.1.3 Binomické rozdělení

Jde o případ jedné z nejdůležitějších diskretních náhodných veličin. Toto rozdělení odpovídá případu, kdy zjišťujeme při provedení n nezávislých pokusů počet úspěšných provedení pokusu, přičemž pravděpodobnost úspěšného provedení pokusu je rovno hodnotě p (jde o číslo z intervalu $(0, 1)$) a pravděpodobnost neúspěšného provedení pokusu je rovno $1 - p$. Je zřejmé, že toto rozdělení může nabývat hodnot od 0 do n . Pokud porovnáme toto rozdělení s předchozím alternativním rozdělením vidíme, že binomické rozdělení vzniká jako součet n alternativních rozdělení se stejným parametrem p .

Je-li v každém pokusu pravděpodobnost úspěšného provedení pokusu rovna p , potom pravděpodobnost, že v n nezávislých pokusech nastane přesně k úspěšných provedení pokusu je rovna

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, \text{ pro } k = 0, 1, \dots, n \quad (2.10)$$

Připomínáme, že symbol $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo udávající počet k -členných kombinací z n prvků bez opakování, vypočte se následujícím způsobem:

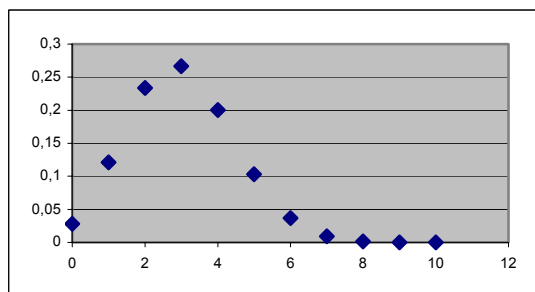
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} \quad (2.11)$$

Poznamenejme, že hodnota $n!$ se nazývá n faktoriál a určuje se jen pro nezáporná celá čísla jako součin přirozených čísel menších nebo rovných n ; $0! = 1$.

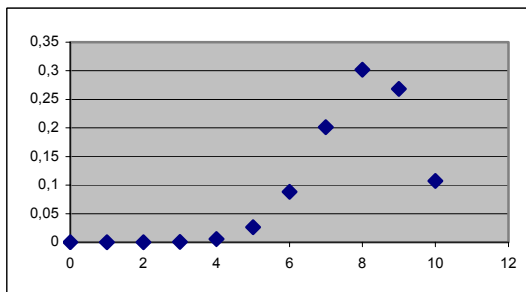
Pro vlastní práci se binomické rozdělení označuje symbolicky jako **Bi(n,p)**. Vidíme tedy, že toto rozdělení má dva parametry. Většinou toto rozdělení určujeme tabulkou.

Uveďme si dále pravděpodobnostní funkce několika binomických rozdělení.

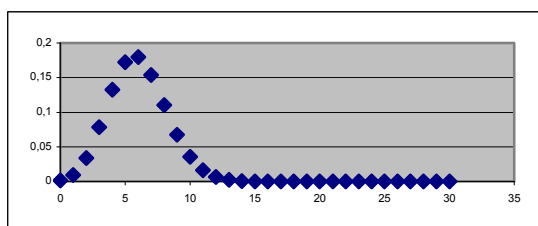
$n=10$; $p = 0,3$



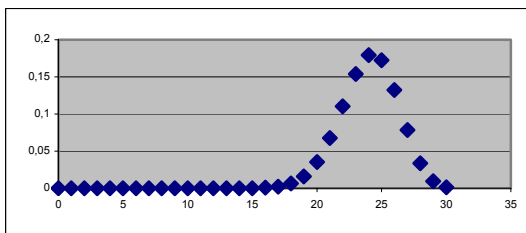
$n = 10$; $p = 0,8$



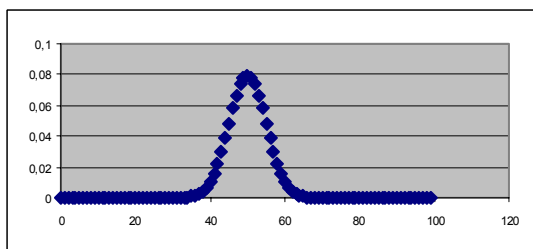
$n = 30; p = 0,2$



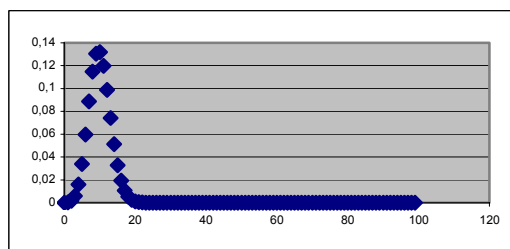
$n = 30; p = 0,8$



$n = 100; p = 0,5$



$n=100; p=0,1$



Uvedeme několik příkladů vedoucích na binomické rozdělení.

Příklad 2.1.3.1

Předpokládejme, že narození chlapce je 0,5. Zjistěte jaká je pravděpodobnost, že v rodině s 5 dětmi jsou právě dva chlapci!

Řešení:

Uvedeme tabulku binomického rozdělení $Bi(5;0,5)$:

k(počet chlapců)	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

Z tabulky je zřejmé, že tato hodnota je rovna $5/32 = 0,15625$.

Příklad 2.1.3.2

Zjistěte jaká je pravděpodobnost, že v rodině s 5 dětmi je více než 2 chlapci?

Řešení:

Využijeme předchozí tabulku a daná pravděpodobnost je tedy rovna součtu : $10/32 + 5/32 + 1/32 = 16/32 = \frac{1}{2} = 0,5$. Daná pravděpodobnost je rovna 0,5.

Při konkrétním způsobu vyčíslování hodnot (2.1) velmi často narážíme na problém vyčíslení faktoriálů pro velké hodnoty n nebo k . Protože platí tzv. zákon velkých čísel, je možno aproximovat binomické rozdělení normálním rozdělením. Konkrétní způsob si ukážeme v části .

Platí pravidlo : Binomické rozdělení můžeme aproximovat s postačující přesností pomocí normálního rozdělení jestliže

$$n > \frac{9}{p(1-p)} \quad (2.12)$$

2.1.4 Poissonovo rozdělení

Náhodná veličina tohoto druhu vzniká buď tehdy, kdy události určitého druhu nastávají náhodně v prostoru nebo v čase (poruchy , onemocnění atd.) nebo jako limitní případ binomického rozdělení. Je – li pravděpodobnost p oné náhodné události relativně malá a rozsah opakování velký potom Poissonovo rozdělení podstatě splývá s binomickým rozdělením (viz Poissonova věta). Jak uvidíme Poissonovo rozdělení je pro vlastní výpočet mnohem jednodušší, než výpočet binomických koeficientů.

Nechť X je náhodná veličina, která odpovídá počtu výskytů výjimečné události např. poruše v daném časovém intervalu. Veličina X může nabývat celočíselných hodnot

od 0 do ∞ . Necht' λ je konstanta, která odpovídá průměrnému počtu událostí v intervalu . Potom

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \quad (2.13)$$

Náhodnou veličinu X nazveme Poissonovým rozdělením s parametrem λ (číslo e je základ přirozených logaritmů $e \doteq 2,71828$.Symbolicky značíme Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$, parametr $\lambda > 0$.

Pokud chceme použít Poissonovo rozdělení je nutno splnit následující pravidla:

- Pravděpodobnost výskytu jedné události v daném intervalu je úměrné délce tohoto intervalu
- Události se vyskytují nezávisle jak ve stejném intervalu, tak v po sobě jdoucích intervalech

Příklad 2.1.4.1

Předpokládejme, že v lidské populaci se vyskytne vzácná choroba s pravděpodobností 0,001. Ve vzorku 1 000 lidí máme určit pravděpodobnost, že vzorek neobsahuje žádného nemocného, jednoho nemocného!

Řešení:

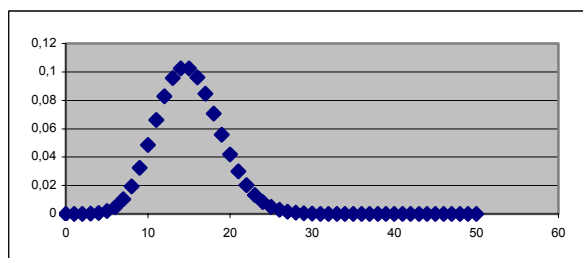
Pravděpodobnost výskytu choroby je 0,001, předpokládaný počet nemocných je tedy $\lambda = 0,001 \cdot 1000 = 1$. K výpočtu použijeme vzorec (2.4)

$$x = 0 \Rightarrow \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} = 0,367879$$

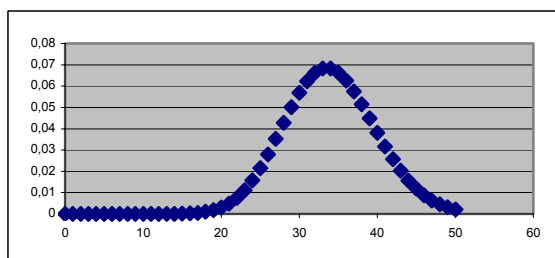
$$x = 1 \Rightarrow \frac{e^{-1} \cdot 1^1}{1!} = 0,367879.$$

Na závěr si uvedeme pravděpodobnostní funkce dvou Poissonových rozdělení.

$\lambda = 15$



$\lambda = 34$



2.2 Spojité náhodné veličiny

Podle definice je spojitá náhodná veličina charakterizována tím, že její obor hodnot je celý reálný interval I . Jak již víme můžeme ji popsat pomocí distribuční funkce nebo častěji pomocí funkce hustoty.

Distribuční funkce přiřazuje každému reálnému číslu x pravděpodobnost toho, že náhodná veličina X bude mít hodnotu menší než x .

Jestliže vycházíme z grafického znázornění funkce hustoty , potom pravděpodobnost, že náhodná veličina X leží v intervalu (a,b) je rovna ploše vymezené grafem funkce hustoty a osou x v intervalu (a,b) .

2.2.1 Rovnoměrné rozdělení

Toto rozdělení je charakteristické jednoduchou funkcí hustoty, která nabývá jen dvou hodnot. Nechť $a, b \in \mathbf{R}_1$; $a < b$. Definujme hustotu f takto :

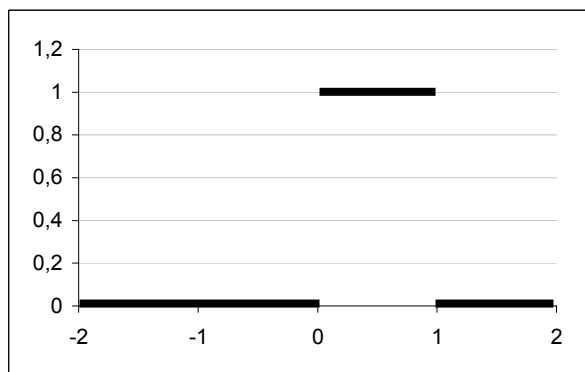
$$f : x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{R}_1 \setminus (a, b) \\ \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \end{cases} \quad (2.14)$$

Hodnota distribuční funkce je potom dána následujícím předpisem:

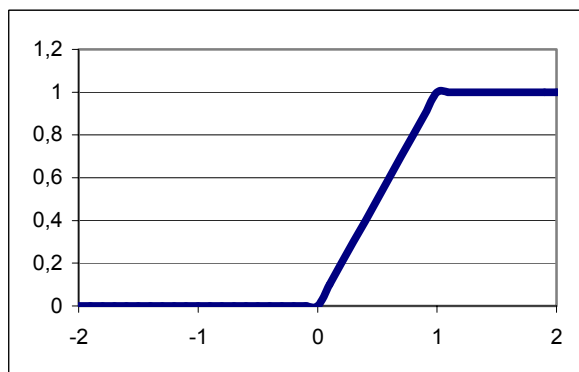
$$F : x \mapsto \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (2.15)$$

Toto rozdělení má především teoretický charakter, nejužívanější je případ volby parametrů $a = 0$ a $b = 1$. Pro tento případ zobrazíme hodnotu hustoty a distribuční funkce:

Hustota $f(x)$



Distribuční funkce $F(x)$



2.2.2 Cauchyho rozdělení

Jde opět o případ rozdělení, které je důležité především z teoretických důvodů. Nechť $a > 0$, potom je hustota rozdělení definována takto:

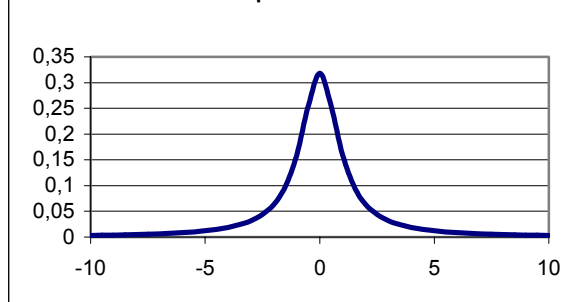
$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad (2.16)$$

Podle vztahu (2.3) je distribuční funkce rovna :

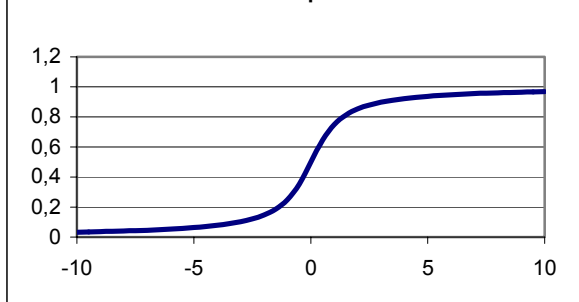
$$F : x \mapsto \frac{1}{\pi} \left(\arctg\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.17).$$

V dalším uvedeme ukázkou hustoty a distribuční funkce pro případ $a=1$:

hustota pro hodnotu $a=1$



Distribuční funkce pro hodnotu $a=1$



2.2.3 Normální rozdělení

Jestliže budeme provádět nějaký pokus (ne nutně náhodný) zjistíme , že výsledek je ovlivněn částmi nenáhodného charakteru (např. přírodní zákony) a částí náhodnou (měřicí přístroje atd.). Proto může být výsledek za stejných podmínek různý. Pokud ale opakujeme takovéto pokusy mnohokrát zjistíme, že průměrné hodnoty výsledků se budou postupně velmi málo od sebe lišit , náhodná část výsledků se potom realizuje v poloze výsledku vůči průměrné hodnotě.

V praxi jsou velmi často splněny předpoklady (formulované již Gaussem při stanovení zákona rozdělení chyb):

- Působí velmi mnoho náhodných navzájem nezávislých a aditivních veličin (náhodné vlivy se sčítají)
- Vliv každého každé náhodné veličiny na skutečnou měřenou hodnotu je zanedbatelně malý
- Kladné vlivy jsou stejně pravděpodobné jako záporné.

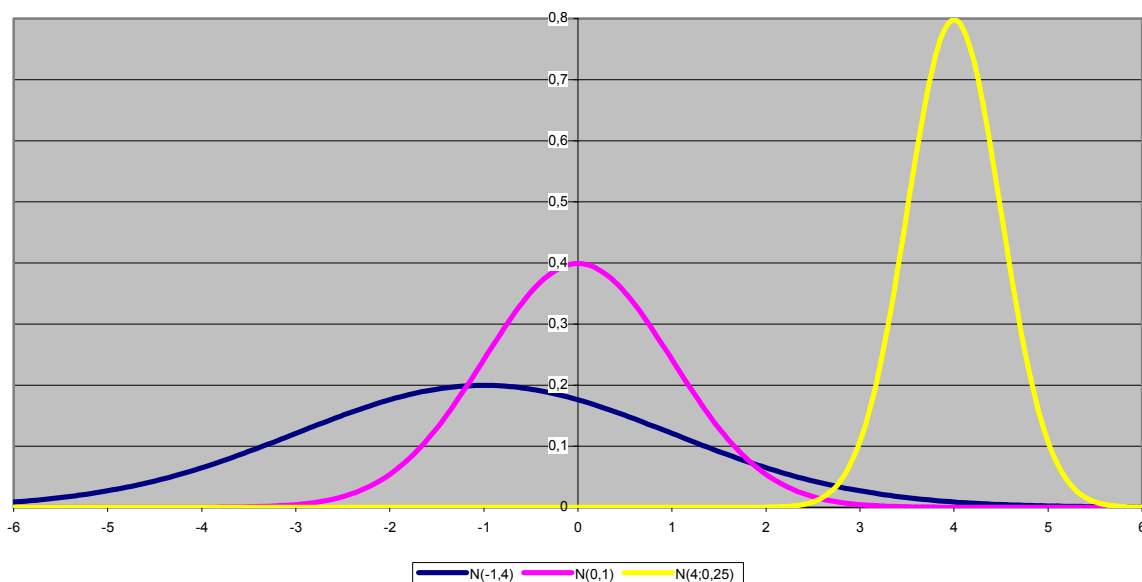
Za těchto předpokladů získáme rozdělení zákonu chyb, které se nazývá normální rozdělení. Slovo normální je zde použito ve významu „řídící se zákonem či modelem“. Normální rozdělení se někdy také nazývá Gaussovo.

2.2.3.1 Obecné normální rozdělení

Hustota normálního rozdělení má následující tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \quad (2.18).$$

V tomto vyjádření jsou $e \doteq 2,718$ (Eulerova konstanta); $\pi \doteq 3,14$; konstanta μ je střední hodnota rozdělení ; konstanta σ je směrodatná odchylka rozdělení. Protože je hustota určena přesně při znalosti dvou parametrů μ a σ , označujeme toto rozdělení jako $N(\mu, \sigma^2)$. Na obrázku níže uvedeme tři různé hustoty normálních rozdělení.



Z předchozích grafů můžeme usoudit na některé vlastnosti grafu hustoty normálního rozdělení:

- Funkce hustoty nabývá svého maxima v bodě $x = \mu$.
- Hustota je tím menší , čím je bod x dále od hodnoty μ
- Graf hustoty je symetrický podle přímky $x = \mu$.

- d) Všechny grafy mají zvonovitý tvar
- e) Žádný graf neprotíná osu x, leží stále nad ní
- f) Plocha pod každým grafem je rovna jedné

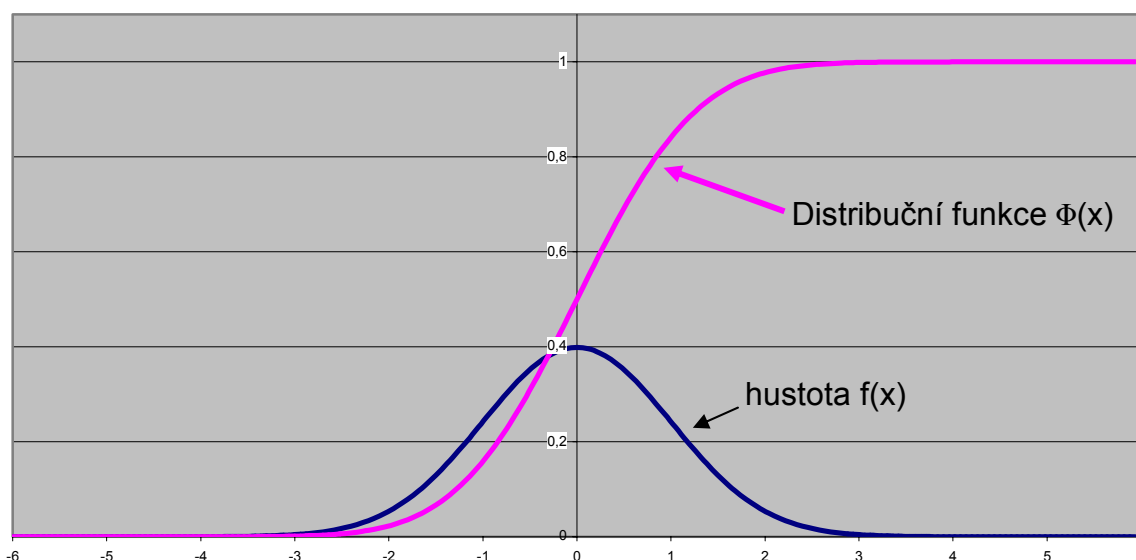
Jak je již známo z tvrzení 2.1.1 je pravděpodobnost, že náhodná veličina typu $N(\mu, \sigma^2)$, nabude hodnot z určitého intervalu, je rovna ploše pod hustotou nad tímto intervalem. Tedy platí následující údaje:

- 1) **68,27%** hodnot leží v intervalu $(\mu - \sigma, \mu, +\sigma)$
- 2) **95%** hodnot leží v intervalu $(\mu - 2 \cdot \sigma, \mu, +2 \cdot \sigma)$
- 3) **99%** hodnot leží v intervalu $(\mu - 3 \cdot \sigma, \mu, +3 \cdot \sigma)$

Důležitou součástí práce s normálním rozdělením je znalost distribuční funkce. Dříve bylo nutno pracovat s tabulkami, které měli hodnoty distribuční funkce tabelovány. To je dnes samozřejmě nahrazeno prací s počítačem. Je proto možno nalézt prakticky libovolné hodnoty distribuční funkce. Z historických, ale i teoretických důvodů je nejdůležitější rozdělení tohoto typu náhodná veličina $N(0, 1)$. V další části se proto budeme speciálně věnovat této náhodné veličině.

2.2.3.2 Normované normální rozdělení

Toto rozdělení získáme volbou $\mu = 0$ a $\sigma = 1$ v předchozí části.



Jde o jedno z nejdůležitějších rozdělení, jeho distribuční funkce má speciální označení $\Phi(x)$ a samo rozdělení se někdy označuje jako rozdělení $Z \sim N(0, 1)$. Pomocí lineární transformace lze nalézt hodnoty náhodné veličiny $N(\mu, \sigma^2)$ pomocí hodnot rozdělení $N(0, 1)$. Proto byly hodnoty tohoto rozdělení tabelovány. Tato transformace je rovna

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (2.19).$$

Jestliže je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ bude náhodná veličina

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad (2.20)$$

Hodnota $f(x)$ hustoty normovaného normálního rozdělení je rovna

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.21).$$

Protože toto rozdělení hraje velmi důležitou roli v konkrétních případech statistických šetření, má jako jediné speciálně označenou distribuční funkci $\Phi(x)$. V mnoha reálných

situacích je toto rozdělení limitním případem a lze ho tedy používat např. při práci s binomickým, poissonovým rozdělením.

Protože funkce hustoty $f(x)$ rozdělení $N(0,1)$ je symetrická podle počátku viz (2.21). Musí platit pro distribuční funkci $\Phi(x)$ následující rovnost :

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad (2.22)$$

Hodnoty distribuční funkce $N(0,1)$ jsou uvedeny v tabulce 3.

Příklad 2.2.3.2.1

Jaká je pravděpodobnost, že hodnota proměnné typu $N(0,1)$ leží v intervalu $<-2,2>$?

Řešení:

V tabulce jsou tabelovány jen kladné hodnoty. Pro záporné hodnoty se vychází ze vztahu (2.16). Protože $\Phi(2) = 0,97725$, musí být tedy $\Phi(-2) = 1 - 0,97725 = 0,02275$. Podle vlastnosti c) v tvrzení 2.1.1 je hledaná pravděpodobnost rovna rozdílu mezi hodnotami $\Phi(2)$ a $\Phi(-2)$. Tedy $P = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0,97725 - 0,02275 = 0,9545$.

Příklad 2.2.3.2.2

Řešme stejný příklad pro případ $N(1,4)$; $N(-2,10)$ a $N(0,40)$!

Řešení:

Podle vztahu (2.14) $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$ je $N(0,1)$

Je-li $X \sim N(1,4)$, je $U = (X-1)/2 \sim N(0,1)$. Přepočteme nejprve meze intervalu $<-2,2>$; $u_1 = (-2-1)/2 = -1,5$ a $u_2 = (2-1)/2 = 0,5$. Hledaná pravděpodobnost je potom $P = \Phi(0,5) - \Phi(-1,5) = 0,691462 - 0,066807 = 0,624655$.

Je-li $X \sim N(-2,10)$, je $U = (X+2)/\sqrt{10} \sim N(0,1)$. Přepočteme opět meze intervalu $<-2,2>$; $u_1 = (-2 + 2)/\sqrt{10} = 0$; $u_2 = (2 + 2)/\sqrt{10} \doteq 1,264911$. Hledaná pravděpodobnost $P = \Phi(1,264911) - \Phi(0) = 0,97725 - 0,5 = 0,397048$.

Je-li $X \sim N(0,40)$, je $U = (X)/\sqrt{40} \sim N(0,1)$. Přepočteme opět meze intervalu $<-2,2>$; $u_1 = (-2 - 0)/\sqrt{40} = -0,31623$; $u_2 = (2 - 0)/\sqrt{40} \doteq 0,31623$. Hledaná pravděpodobnost $P = \Phi(0,31623) - \Phi(-0,31623) = 0,624085 - 0,375915 = 0,24817$.

Příklad 2.2.3.2.3

Nechť $X \sim N(0,1)$. Nalezněte hodnoty intervalů $<-a,a>$, pro které $P(X \in <-a,a>) = p$. Proveďte pro hodnoty $p=0,9; 0,95; 0,975; 0,99; 0,995$!

Řešení:

Vzhledem k vlastnostem distribuční funkce $\Phi(x)$ budeme hledat hodnoty x_p takové, že $\Phi(x_p) = (1+p)/2$. Tyto hodnoty x_p budou potom rovny hodnotě a . Řešení uvedeme v tabulce:

p	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
$x_p = a$	1,644853	1,959963	2,241401	2,575831	2,807042