

6. Charakteristické funkce náhodných veličin a vektorů

V této kapitole se budeme zabývat speciální pravděpodobnostní strukturou tzv. charakteristickou funkcí. Uvidíme, že za pomoci tohoto pojmu můžeme :

1. Hledat a určovat momenty náhodné veličiny $\mathbf{X}$
2. Ze známé charakteristické funkce určovat neznámé náhodné veličiny $\mathbf{X}$
3. Z asymptotického chování charakteristické funkce můžeme „uhodnout“ chování náhodné veličiny $\mathbf{X}$

Definice 6.1

Řekneme, že f je komplexní funkce, $f: \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ (kde $\mathbb{C}$ je množina komplexních čísel) tj. $f(x) = f_1(x) + i \cdot f_2(x)$, jestliže f_1, f_2 jsou reálné funkce jedné proměnné.

Integrálem funkce f na reálném oboru budeme chápat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) dx, \quad (6.1)$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

Definice 6.2

Nechť $\mathbf{f}$ je hustota spojitě náhodné veličiny ($\mathbf{P}$ je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny) $\mathbf{X}$. Charakteristickou funkcí náhodné veličiny $\mathbf{X}$ nazveme funkci $\varphi: \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou vztahem :

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot f(x) dx \text{ resp. } \left(\varphi(t) = \sum_k e^{i t x_k} \cdot P(X = x_k) \right) \quad (6.2)$$

Příklad 6.3

Zvolme za náhodnou veličinu $\mathbf{X}$ rovnoměrné rozdělení na intervalu $<0,1>$. Potom jeho charakteristická funkce je :

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot f(x) dx = \int_0^1 e^{i \cdot t \cdot x} dx = \left[\frac{e^{i \cdot t \cdot x}}{i \cdot t} \right]_0^1 = \frac{e^{i \cdot t} - 1}{i \cdot t}$$

Příklad 6.4

Nechť $\mathbf{X}$ je diskrétní náhodná veličina typu $\mathbf{A}(\mathbf{p})$. Potom její charakteristická funkce je rovna :

$$\varphi(t) = e^{i \cdot t \cdot 0} \cdot q + e^{i \cdot t \cdot 1} \cdot p = q + p \cdot e^{i \cdot t}$$

Příklad 6.5

Nechť $\mathbf{X}$ je opět diskrétní náhodná veličina ,pro níž $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Potom charakteristická funkce této náhodné veličiny je rovna:

$$\varphi(t) = e^{i \cdot t \cdot 1} \cdot \frac{1}{2} + e^{i \cdot t \cdot (-1)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos(t) = \cos(t)$$

Věta 6.6

Nechť φ je charakteristická funkce náhodné veličiny $\mathbf{X}$. Potom platí:

1. $\varphi(0) = 1$
2. $|\varphi(t)| \leq 1$, kde $t \in \mathbb{R}_1$
3. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$, kde $\overline{\varphi}$ je komplexně sdružená funkce k funkci φ a $t \in \mathbb{R}_1$
4. φ je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}_1$

Důkaz:

$$1. \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot 0 \cdot x} \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

2. $t \in \mathbb{R}_1$:

$$|\varphi(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{i \cdot t \cdot x} \cdot f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Při úpravě jsme použili tvrzení o nezápornosti hustoty náhodné veličiny .

$$3. \varphi(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \cdot t \cdot x} \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot f(x) dx = \overline{\varphi(t)}$$

4. Máme dokázat výrok : kdykoli $|t|, |t'| \leq K$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, t' : |t - t'| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t')| < \varepsilon$. Budeme tedy zjišťovat hodnotu rozdílu

funkčních hodnot charakteristické funkce:

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(t')| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i \cdot t \cdot x} - e^{i \cdot t' \cdot x}) \cdot f(x) dx \right| \leq \int_{|x| > A} |(e^{i \cdot t \cdot x} - e^{i \cdot t' \cdot x})| \cdot f(x) dx + \\ &+ \int_{|x| \leq A} |(e^{i \cdot t \cdot x} - e^{i \cdot t' \cdot x})| \cdot f(x) dx = \text{zvolím hodnotu } A > 0 \text{ tak, aby } P(|x| > A) < \frac{\varepsilon}{4} = \\ &\leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \int_{|x| \leq A} |(e^{i \cdot t \cdot x} - e^{i \cdot t' \cdot x})| \cdot f(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + |t - t'| \cdot A \cdot e^{K \cdot A} \leq \text{zvolím nyní } \delta = \frac{\varepsilon}{2 \cdot A \cdot e^{K \cdot A}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Q.E.D.

Poznámka 6.7

Důkaz byl proveden jen pro spojitou náhodnou veličinu, obdobně bychom mohli provést tento důkaz i pro diskrétní náhodnou veličinu.

Poznámka 6.8

V kapitole zabývající se charakteristikami náhodných veličin jsme dokázali , že pro spojitou reálnou funkci **g** a náhodnou veličinu **X** s hustotou **f** , pro kterou existuje střední

hodnota je $E(g \circ X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx$. Potom tedy je $\varphi(t) = E(e^{itx})$.

Věta 6.9

Nechť **X** je náhodná veličina , φ její charakteristická funkce , necht' dále a,b jsou reálná čísla. Potom náhodná veličina **Y** = **a** · **X** + **b** , má charakteristickou funkci rovnou

$$\varphi_Y(t) = e^{i \cdot t \cdot b} \cdot \varphi(a \cdot t) \quad (6.3)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \stackrel{\text{substituce}}{=} \frac{x-b}{a} = u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot t \cdot (a \cdot u + b)} \cdot f(u) du = \\ &= e^{i \cdot t \cdot b} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot t \cdot a \cdot u} \cdot f(u) du = e^{i \cdot t \cdot b} \cdot \varphi(a \cdot t) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Věta 6.10

Nechť φ_i jsou charakteristické funkce nezávislých náhodných veličin $\mathbf{X}_i$, $i=1, \dots, n$.
Nechť dále φ je charakteristická funkce

$$X = \sum_{i=1}^n X_i.$$

$$\text{Potom } \varphi(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(t). \quad (6.4)$$

Důkaz:

Provedeme jen pro $n=2$ (zbytek důkazu matematickou indukcí přenecháváme čtenáři). Nechť tedy $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$, nechť opět f , f_1 , f_2 jsou příslušné hustoty náhodných veličin, potom je:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i.t.(x_1+x_2)} \cdot f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i.t.(x_1+x_2)} \cdot f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) dx_1 dx_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i.t.x_1} \cdot f_1(x_1) dx_1 \right) \\ &\cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i.t.x_2} \cdot f_2(x_2) dx_2 \right) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Věta 6.11

Nechť φ je charakteristická funkce náhodné veličiny $\mathbf{X}$, Nechť pro $j=1, 2, \dots, n$ je $E(|X|^j) < +\infty$. Potom existují i j -té derivace funkce φ v bodě 0 a je

$$\varphi^{(j)}(0) = (i)^j \cdot E(X^j) \quad (6.5)$$

Důkaz:

Podle předpokladů lze provést záměnu derivace a integrálu v definici charakteristické funkce náhodné veličiny $\mathbf{X}$. Dále se důkaz provede matematickou indukcí. Tato možnost přímo dokazuje vztah (6.5). Detaily důkazu jsou provedeny [2] věta II.7.9.

Věta 6.12

Nechť náhodná veličina $\mathbf{X}$ má normální rozdělení $\mathbf{N}(\mathbf{a}, \sigma^2)$. Potom charakteristická funkce φ náhodné veličiny $\mathbf{X}$ má tvar:

$$\varphi(t) = e^{i.t.a - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}} \quad (6.6)$$

Důkaz:

Provedeme nejdříve transformaci na náhodnou veličinu $\mathbf{N}(0,1)$, tedy $Y = \frac{X-a}{\sigma}$. Její charakteristická funkce je rovna:

$$\varphi_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i.t.x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t.x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Hodnotu tohoto integrálu zjistíme sestavením určité diferenciální rovnice:

$$\varphi_Y'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \sin(t.x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2.\pi} \cdot \left\{ \left[\sin(t.x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot \cos(t.x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right\} =$$

$= -t \cdot \varphi_Y(t)$, řešením této diferenciální rovnice je $\varphi_Y(t) = C \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$. Víme dále podle věty 6.1, že $\varphi_Y(0) = 1$, proto je konstanta $C = 1$ a tedy je $\varphi_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

Poznámka 6.13

1. Jestliže je $\mathbf{X}$ náhodná veličina typu binomické rozdělení s parametry n, p ($\mathbf{Bi}(n, p)$). Potom má její charakteristická funkce tvar :

$$\varphi(t) = (q + p \cdot e^{i \cdot t})^n \quad (6.7)$$

Důkaz provedeme pomocí příkladu 6.4 a věty 6.6.

2. Necht' má je $\mathbf{X}$ náhodná veličina typu Poissonova rozdělení s parametrem λ . Potom její charakteristická funkce má tvar

$$\varphi(t) = e^{\lambda \cdot (e^{i \cdot t} - 1)} \quad (6.8)$$

Důkaz:

Podle definice charakteristické funkce diskrétní náhodné veličiny je

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{i \cdot t \cdot j} \cdot \frac{\lambda^j \cdot e^{-\lambda}}{j!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \cdot e^{i \cdot t})^j}{j!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot e^{i \cdot t}}.$$

Poznámka 6.14

Definice charakteristické funkce náhodné veličiny není nic jiného než tzv. **Fourierův** obraz distribuční funkce dané náhodné veličiny. Vlastnosti tohoto typu zobrazení jsou studovány v mnoha učebnicích, z hlediska teorie pravděpodobnosti jsou zkoumány v monografii [2] v kapitole o charakteristických funkcích. Bez důkazu uvedeme následující tvrzení.

Věta 6.15

Necht' $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ jsou dvě náhodné veličiny a φ_X, φ_Y jsou jejich charakteristické funkce. Potom z rovnosti $\varphi_X = \varphi_Y$ vyplývá rovnost $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

Důkaz:

Proveden například v [2], věta II.7.3

Věta 6.16

Pro libovolné reálné y platí :

$$|r_n(y)| = \left| e^{i \cdot y} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(i \cdot y)^j}{j!} \right| \leq \frac{|y|^n}{n!} \quad n=1, 2, \dots \quad (6.9)$$

Důkaz:

Provedeme ho matematickou indukcí.

$$n=1 : r_1(y) = e^{i \cdot y} - 1 = i \cdot \int_0^y e^{i \cdot x} dx \quad \Rightarrow \quad |r_1(y)| \leq |y|$$

$$n=2 : r_2(y) = e^{i \cdot y} - 1 - i \cdot t = i \cdot \int_0^y (e^{i \cdot t} - 1) dt \quad \Rightarrow \quad |r_2(y)| \leq \frac{y^2}{2}$$

Odtud je zřejmé, že platí vztah

$$r_n(y) = i \cdot \int_0^y r_{n-1}(t) dt \quad (6.10)$$

$$\text{Tedy } |r_n(y)| \leq \int_0^y \frac{|t|^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{|y|^n}{n!}.$$

Q.E.D.

Věta 6.17

Nechť $\mathbf{X}$ je náhodná veličina, $\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ a $\mathbf{VAR}(\mathbf{X}) = \sigma^2$, $\sigma^2 > 0$. Nechť dále je φ charakteristická funkce náhodné veličiny $\mathbf{X}$. Potom označme

$$r(t) = \varphi(t) - 1 + \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2} \quad (6.11)$$

Platí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t^2} = 0 \quad (6.12)$$

Důkaz:

Tento důkaz provedeme pro náhodnou veličinu spojitého typu. Nechť $t \in \mathbb{R}_1$, potom

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{i.t.x} - 1 - i.t.x + \frac{t^2 \cdot x^2}{2} \right) \cdot f(x) dx = \varphi(t) - 1 - i.t.E(X) + \frac{t^2}{2} \cdot \text{VAR}(X) = \varphi(t) - 1 + \frac{t^2}{2} \cdot \sigma^2.$$

V dalším ukážeme omezenost $r(t)$, zvolme tedy $M > 0$, potom je

$$r(t) = \int_{|x| \leq M} \left(e^{i.t.x} - 1 - i.t.x + \frac{t^2 \cdot x^2}{2} \right) \cdot f(x) dx + \int_{|x| > M} \left(e^{i.t.x} - 1 - i.t.x + \frac{t^2 \cdot x^2}{2} \right) \cdot f(x) dx, \text{ odtud je}$$

$$|r(t)| \leq \frac{|t|^3}{6} \cdot \int_{|x| \leq M} |x|^3 \cdot f(x) dx + \int_{|x| > M} \left(\frac{|t|^2 \cdot |x|^2}{2} + \frac{t^2 \cdot x^2}{2} \right) \cdot f(x) dx \leq \frac{M \cdot |t|^3}{6} \cdot \int_{|x| \leq M} |x|^2 \cdot f(x) dx +$$

$$+ t^2 \cdot \int_{|x| > M} x^2 \cdot f(x) dx, \quad \text{odtud je}$$

$$\frac{|r(t)|}{t^2} \leq \frac{M \cdot |t|}{6} \cdot \sigma^2 + \int_{|x| > M} x^2 \cdot f(x) dx \quad (6.13)$$

Z konečnosti hodnoty $\mathbf{VAR}(\mathbf{X})$ vyplývá, že existuje hodnota M taková, že druhý sčítanec pravé strany v (6.13) je menší než předem zadané kladné číslo. Odtud vyplývá tvrzení věty.

Q.E.D.

Tato věta bude posléze použita k důkazu jedné formy Centrální limitní věty. Pomocí ní zjišťujeme, že charakteristická funkce náhodné veličiny se střední hodnotou rovnou nule a rozptylem rovným jedné je „skoro“ rovna charakteristické funkci $\mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Další vlastnosti charakteristických funkcí náhodných veličin budou studovány v úvodu následující kapitoly o konvergenci v distribuci na pravděpodobnostním prostoru. Komplexněji se problematikou charakteristických funkcí zabývá monografie [3].