

8. Zákony velkých čísel

V této části budeme studovat velmi často užívaná tvrzení o součtech posloupnosti náhodných veličin. Nejdříve budeme vyšetřovat tvrzení nazývaná souhrnně jako slabé zákony velkých čísel. Veškeré úvahy jsou prakticky zaměřené, snažíme se najít odpověď na otázku po „četnosti“, součtu náhodných veličin, v matematické statistice má četnost výsledků velký význam, proto nás tyto teoretické četnosti tolik zajímají. Budeme je zkoumat z pohledu slabé a silné konvergence náhodných veličin.

8.1 Slabé zákony velkých čísel

Definice 8.1

Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost náhodných veličin, pro která existují střední hodnoty $E X_n$. Řekneme, že pro posloupnost $\{X_n\}$ platí **slabý zákon velkých čísel**, jestliže

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n E X_i \xrightarrow{P} 0 \quad (8.1)$$

V další části budeme hledat postačující podmínky pro platnost (8.1). Mohutným aparátem je následující věta o jistém typu nerovnosti.

Věta 8.2

Čebyševova nerovnost

Nechť X je náhodná veličina, $\varepsilon > 0$ a $\alpha \geq 0$. Nechť dále existuje $E(|X|^\alpha)$. Potom

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X|^\alpha)}{\varepsilon^\alpha} \quad (8.2)$$

Speciálně pro hodnotu $\alpha = 2$ a po úpravě je

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{VAR(X)}{\varepsilon^2} \quad (8.3).$$

Důkaz:

Provedeme ho pro případ spojité náhodné veličiny, diskrétní případ ponechávám studentům. Předpokládejme tedy, že f je hustota náhodné veličiny X . Potom

$$E(|X|^\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha \cdot f(x) dx = \int_{\{x; |x| \geq \varepsilon\}} |x|^\alpha \cdot f(x) dx + \int_{\{x; |x| < \varepsilon\}} |x|^\alpha \cdot f(x) dx \quad \Rightarrow$$

$$E(|X|^\alpha) \geq \int_{\{x; |x| \geq \varepsilon\}} |x|^\alpha \cdot f(x) dx \geq \varepsilon^\alpha \cdot \int_{\{x; |x| \geq \varepsilon\}} f(x) dx = \varepsilon^\alpha \cdot P(|X| \geq \varepsilon).$$

Vztah (8.3) získáme dosazením náhodné veličiny $X - E(X)$ za náhodnou veličinu X a volbou $\alpha = 2$ do vztahu (8.2).

Q.E.D.

Takto zformulovanou Čebyševovu nerovnost využijeme dále pro formulaci základních tvrzení o postačujících podmínkách platnosti slabého zákona velkých čísel.

Věta 8.3

Čebyševova

Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, nechť existuje kladné reálné číslo $k > 0$ takové, že pro všechna n platí $VAR(X_n) \leq k$, potom pro posloupnost $\{X_n\}$ platí slabý zákon velkých čísel.

Důkaz:

Použijeme označení z definice 8.1 a verze Čebyševovy nerovnosti (8.3), potom je

$$P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{VAR\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)}{\varepsilon^2}, \quad (8.4)$$

ale podle předpokladů jsou náhodné veličiny X_n nezávislé, tedy podle .. je

$$VAR\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n VAR(X_i), \quad (8.5)$$

podle předpokladů věty jsou všechny rozptyly omezené číslem k , dosadíme tedy do (8.4) a máme:

$$P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{VAR\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)}{\varepsilon^2} \leq \frac{n \cdot k}{n^2 \cdot \varepsilon^2} = \frac{k}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n} \quad (8.6)$$

použijeme – li nyní na (8.6) limitní přechod získáme požadované tvrzení.

Q.E.D.

Poznamenejme, že ve znění věty nemusíme požadovat nezávislost náhodných veličin, stačí, aby náhodné veličiny byly nekorelované viz , potom vztah (8.5) platí také. V další větě budeme vyšetřovat skupinu speciálního druhu diskrétní náhodné veličiny.

Věta 8.4

Bernoulliho

Nechť B_n je náhodná veličina, která se rovná počtu případů, v nichž při n nezávislých pokusech nastala jistá událost A , přičemž $P(A) = p$ ($0 < p < 1$) v každém pokuse.

Potom

$$\frac{B_n}{n} - p \xrightarrow{P} 0 \quad (8.7)$$

Náhodná veličina uvedená v této větě není nic jiného než binomické rozdělení s parametry n, p .

Důkaz:

Náhodnou veličinu B_n můžeme napsat jako $B_n = \sum_{i=1}^n X_i$, kde X_i jsou nezávislé náhodné

veličiny typu alternativní rozdělení viz . Víme podle , že $E(X_i) = p$ a podle $VAR(X_i) = p \cdot (1 - p)$. Protože hodnota $p \in (0, 1)$, platí podle Cauchyovy nerovnosti

$$VAR(X_i) = p \cdot (1 - p) \leq \frac{p^2 + (1 - p)^2}{2} \leq 1 \quad (\text{tento odhad lze samozřejmě vylepšit, pro}$$

naše účely ale postačuje). Tedy tím jsou splněny předpoklady věty 8.3 a proto platí

$$\frac{1}{n} \cdot B_n - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n p = \frac{B_n}{n} - \frac{n \cdot p}{n} = \frac{B_n}{n} - p \xrightarrow{P} 0$$

Q.E.D.

Věta 8.5

Markovova

Nechť posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ splňuje následující tzv. Markovovu podmínku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \text{VAR} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = 0, \quad (8.8)$$

potom pro ni platí slabý zákon velkých čísel.

Důkaz:

Jestliže platí vztah (8.8), potom po úpravě (8.4) a limitním přechodu získáme kladnou odpověď na naše tvrzení.

Q.E.D.

Přirozeným zobecněním věty 8.4 je tvrzení, v němž nebudeme požadovat splnění stejných podmínek v jednotlivých náhodných pokusech.

Věta 8.6

Nechť B_n je náhodná veličina, která se rovná počtu případů, v nichž při n nezávislých pokusech nastala událost A , přičemž v každém k – tém pokusu je $P(A) = p_k$, kde $0 < p_k < 1$. Potom

$$\frac{B_n}{n} - \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{n} \xrightarrow{P} 0 \quad (8.9)$$

Důkaz:

Probíhá stejně jako ve větě 8.4, náhodná veličina B_n je součtem náhodných veličin, které mají omezené rozptyly např. konstantou 1. Tedy protože platí předpoklady věty 8.3 platí i slabý zákon velkých čísel na posloupnost náhodných veličin B_n , vyjádřením této platnosti je právě vztah (8.9).

Q.E.D.

Příklad 8.7

V tomto příkladě budeme ilustrovat výklad asymptotického chování binomického rozdělení. Zvolíme klasický případ hodu kostkou (očíslovanou postupně čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6). Jako B_n označíme počet padlých ok rovných 6.

a) Ukážeme, že jistě neplatí $P\left(\frac{B_n}{n} = \frac{1}{6}\right) \rightarrow 1$. Nejdříve si připomeneme Stirlingovu

formuli pro aproximaci hodnoty $n!$:

$$n! = e^{-n} \cdot n^n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot (1 + u_n), \quad \text{kde } u_n \rightarrow 0 \quad (8.10)$$

Pokud má platit $P\left(\frac{B_n}{n} = \frac{1}{6}\right) \rightarrow 1$ musí platit i $P\left(\frac{B_{6n}}{6n} = \frac{1}{6}\right) \rightarrow 1$. Použijeme – li Stirlingovu formuli dostaneme:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{B_{6n}}{6n} = \frac{1}{6}\right) &= P(B_{6n} = n) = \binom{6n}{n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{5n} = \frac{(6n)!}{n! \cdot (5n)!} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{5n} = \\ &= \frac{e^{-6n} \cdot (6n)^{6n} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 6n}}{e^{-n} \cdot n^n \cdot \sqrt{2\pi \cdot n} \cdot e^{-5n} \cdot (5n)^{5n} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 5n}} \cdot \frac{5^{5n}}{6^{6n}} \cdot (1 + v_n) = \sqrt{\frac{3}{5\pi n}} \cdot (1 + v_n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

b) Pokusíme se nyní ověřit výpočtem platnost slabého zákona velkých čísel pro náš případ . Protože jde o binomické rozdělení je možno odhadnout hodnotu pravděpodobnosti náhodného jevu $\left\{\left|\frac{B_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < \varepsilon\right\}$ pomocí Čebyševovy nerovnosti.

Tedy $P\left(\left\{\left|\frac{B_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < \varepsilon\right\}\right) \geq 1 - \frac{1}{30n\varepsilon}$, zvolíme – li ε libovolné kladné , pevné ,

potom předchozí výraz samozřejmě konverguje k 1. Tedy tím je dokázána platnost slabého zákona velkých čísel pro tento případ.

8.2 Silný zákon velkých čísel

V slabém zákonu velkých čísel nejde přímo o limitní chování náhodných veličin, ale o limitní chování pravděpodobností v okolí určitého bodu (v našem případě náhodných veličin $\mathbf{B}_n$ v okolí bodu $\frac{n}{6}$). Ze zkušenosti je ale známo, že hodnota $\frac{B_n}{n}$ se skoro jistě přibližuje nezávisle na počátečních hodnotách ke konstantní veličině (v našem případě víme, že je to hodnota $\frac{1}{6}$).

Věta 8.8

Kolmogorovova nerovnost

Nechť $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, pro které existuje rozptyl. Potom pro libovolné kladné $\varepsilon > 0$ platí:

$$P\left(\left[\max_{j \leq n} |S_j| > \varepsilon\right]\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sum_{j=1}^n \text{VAR}(X_j), \quad (8.11)$$

kde je $S_j = \sum_{i=1}^j (X_i - E(X_i))$.

Důkaz:

Zvolme $\varepsilon > 0$. Důkaz provedeme pomocí pomocných náhodných veličin

Zřejmě $E(S_j) = 0$, pro $j=1, \dots, n$. Stejně tak je $\text{VAR}(S_j) = \sum_{i=1}^j \text{VAR}(X_i)$. Pro $i=1, \dots, n$

definujme pomocnou náhodnou veličinu

$$p_i = \begin{cases} 1, & (|S_1| < \varepsilon) \wedge \dots \wedge (|S_{i-1}| < \varepsilon), (|S_i| \geq \varepsilon) \\ 0, & \text{v ostatních případech} \end{cases} \quad (8.12)$$

Zřejmě dále platí:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \Leftrightarrow \max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \varepsilon \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 0 \Leftrightarrow \max_{1 \leq i \leq n} |S_i| < \varepsilon, \text{ protože hodnota } p_i \text{ je rovna}$$

jedné jen pro jeden index, pro ostatní musí být rovna nule. Budeme nyní počítat střední hodnotu výše uvedeného součtu náhodných veličin p_i .

$$E\left(\sum_{i=1}^n p_i\right) = 1 \cdot P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \varepsilon\right) + 0 \cdot P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| < \varepsilon\right) = P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \varepsilon\right) \quad (8.13)$$

Podle definice náhodné veličiny p_i je zřejmé, že tato náhodná veličina závisí jen na prvních i členech $\{S_i\}$ a na ostatních $n-i$ členech této posloupnosti.

Pro $j > i$ jsou náhodné veličiny $X_j - E(X_j)$ nezávislé na $p_i \cdot S_i$. Dále pro $i=1, \dots, n-1$ je

$$E(p_i \cdot S_i \cdot (S_n - S_i)) = E\left(p_i \cdot S_i \cdot \left(\sum_{k=i+1}^n (X_k - E(X_k))\right)\right) = E(p_i \cdot S_i) \cdot E\left(\sum_{k=i+1}^n (X_k - E(X_k))\right) = 0,$$

Pro $j = n$ získáme

$$E(p_n \cdot S_n \cdot (S_n - S_n)) = 0.$$

Dále je pro $j=1, \dots, n$ $p_j \cdot S_j^2 \geq \varepsilon^2 \cdot p_j$. Tedy celkem můžeme vypočítat:

$$E(S_n^2) \geq E\left(\sum_{i=1}^n p_i \cdot S_n^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^n p_i \cdot (S_i^2 + 2 \cdot S_i \cdot (S_n - S_i) + (S_n - S_i)^2)\right) \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq E\left(\sum_{i=1}^n p_i \cdot (S_i^2 + 2 \cdot S_i \cdot (S_n - S_i))\right) = \sum_{i=1}^n E(p_i \cdot S_i^2) + 2 \cdot \sum_{i=1}^n E(p_i \cdot (S_n - S_i) \cdot S_i) \geq \\ &\geq \varepsilon^2 \cdot \sum_{i=1}^n E(p_i). \end{aligned}$$

Ale $E(S_n^2) = \sum_{i=1}^n \text{VAR}(X_i)$. Spojením poslední rovnosti a (8.13) získáme požadovanou nerovnost.

Q.E.D.

Věta 8.9

Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel, přičemž

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i < +\infty \wedge 0 < b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_i \rightarrow +\infty.$$

Potom

$$\frac{1}{b_i} \cdot \sum_{j=1}^i a_j \cdot b_j \rightarrow 0.$$

Důkaz :

Ponechávám čtenáři, pro nápovědu, jde o tzv. Kronekerovo lemma.

Věta 8.10

Nechť $\mathbf{X}_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, takové, že $\sum_{i=1}^{+\infty} \text{VAR}(X_i) < +\infty$ potom řada

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (X_i - E(X_i)) \text{ konverguje skoro jistě.}$$

Důkaz:

Zavedeme opět označení $S_j = \sum_{i=1}^j (X_i - E(X_i))$. Podle věty 8.8 je pro $k \in \mathbb{N}$

$$P\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} [|S_k - S_j| \geq \varepsilon]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\max_{k \leq i \leq n} |S_i - S_k| \geq \varepsilon\right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sum_{i=k}^{\infty} \text{VAR}(X_i), \quad (8.14)$$

limitním přechodem v (8.14) dostáváme

$$P\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} [|S_k - S_j| \geq \varepsilon]\right) = 0, \text{ tedy posloupnost } S_n \text{ je cauchyovská skoro jistě, odtud již}$$

vyplývá tvrzení věty.

Q.E.D.

Věta 8.11

Kolmogorovův silný zákon velkých čísel

Nechť $\{\mathbf{X}_n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, pro které existuje konečný rozptyl. Nechť dále $0 < b_n \nearrow +\infty$ taková, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{VAR}(X_i)}{b_i^2} < +\infty.$$

Potom

$$\frac{1}{b_n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \xrightarrow{s.j.} 0. \quad (8.15)$$

Důkaz:

Jestliže jsou X_i nezávislé náhodné veličiny, jsou také $\frac{X_i - E(X_i)}{b_i}$ nezávislé náhodné veličiny. Dále podle vlastnosti rozptylu $\sum_{i=1}^{\infty} \text{VAR}\left(\frac{X_i - E(X_i)}{b_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{VAR}(X_i)}{b_i^2} < \infty$, podle předchozí věty (8.10) je tedy řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{X_i - E(X_i)}{b_i} \right), \text{ skoro jistě konvergentní. K dokončení důkazu použijeme nyní 8.9}$$

, kde budeme volit za $a_i = \frac{X_i - E(X_i)}{b_i}$ a hodnota posloupnosti b_i zůstane nezměněna.

Q.E.D.