

Podpořeno z projektu FRVŠ 584/2011.

Obsah

- 1 Referenční plochy
 - Koule
 - Elipsoid
 - Rovina
- 2 Souřadnicové systémy na referenčních plochách
 - Zeměpisné souřadnice
 - Kartografické souřadnice
 - Izometrické (symetrické) souřadnice
- 3 Důležité křivky
 - Ortodroma
 - Loxodroma

Obsah

- 1 Referenční plochy
 - Koule
 - Elipsoid
 - Rovina
- 2 Souřadnicové systémy na referenčních plochách
 - Zeměpisné souřadnice
 - Kartografické souřadnice
 - Izometrické (symetrické) souřadnice
- 3 Důležité křivky
 - Ortodroma
 - Loxodroma

Referenční plocha

Definice:

Matematicky definovaná plocha, která nahrazuje zemské nebo jiné vesmírné těleso nebo jeho část, určená pro geodetické a kartografické výpočty (definice VUGTK).

Subsection 1

Koule

Referenční koule

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

- Pomocí koule lze snadněji řešit úlohy kartografie a geodézie.
- Často používáme kouli jako mezistupeň přizobrazení elipsoidu do roviny.
- Využití pro konstrukci map malých měřítek

Referenční koule

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

- Pomocí koule lze snadněji řešit úlohy kartografie a geodézie.
- Často používáme kouli jako mezistupeň přizobrazení elipsoidu do roviny.
- Využití pro konstrukci map malých měřítek

Volba poloměru: Poloměr koule jako tzv. střední poloměr křivosti:

$$R_m = \sqrt{(M \cdot N)} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cdot \sin \varphi}$$

Pro ČR se střední geodetickou šířkou $\varphi = 49^{\circ}30'$ a použití Besselova elipsoidu je $R_m = 6380703.6105m$.

Volba poloměru:

- Koule o stejném objemu:

$$R = (a^2 b)^{1/3}$$

- Koule se stejným povrchem

Diferenciály rovnoběžkového a poledníkového oblouku na kouli:

$$ds_p = R \cdot dU$$

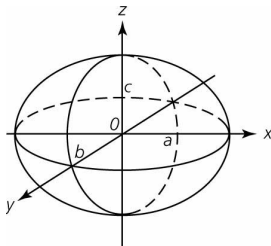
$$ds_r = R \cdot \cos(U) dV$$

Subsection 2

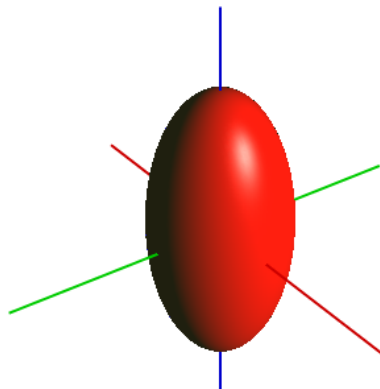
Elipsoid

Elipsoid: je prostorové těleso tvořené množinou všech bodů, jejichž poloha vůči zadanému bodu (středu) splňuje podmínky dané následující nerovnicí.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$



Elipsoid trojosý:



Rotační elipsoid (sféroid)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow a = c$$

Rotační elipsoid je určen dvěma konstantami:

- a - hlavní poloosa
- b - vedlejší poloosa elipsoidu

Další parametry elipsoidu:

- e - numerická výstřednost (první excentricita) $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$
- i - zploštění elipsoidu - $i = \frac{a - b}{a}$

Rotační elipsoid (sféroid)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow a = c$$

Rotační elipsoid je určen dvěma konstantami:

- a - hlavní poloosa
- b - vedlejší poloosa elipsoidu

Další parametry elipsoidu:

- e - numerická výstřednost (první excentricita) $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$
- i - zploštění elipsoidu - $i = \frac{a - b}{a}$

Rotační elipsoid (sféroid)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow a = c$$

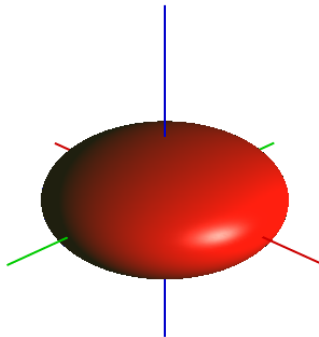
Rotační elipsoid je určen dvěma konstantami:

- a - hlavní poloosa
- b - vedlejší poloosa elipsoidu

Další parametry elipsoidu:

- e - numerická výstřednost (první excentricita) $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$
- i - zploštění elipsoidu - $i = \frac{a - b}{a}$

Elipsoid rotační:



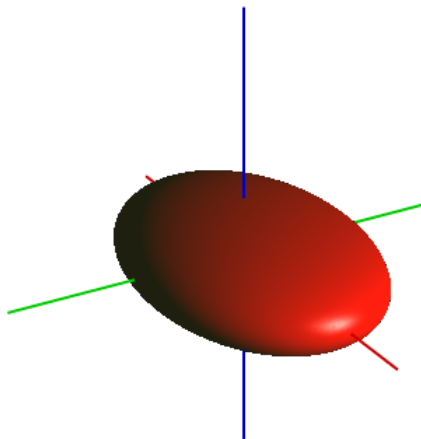
Oběm:

$$\frac{4}{3}\pi abc$$

Druhy elipsoidů:

- jestliže $a > b > c$, jde o obecný (trojosý) elipsoid
- jestliže $a > b = c$, jde o protáhlý sferoid
- jestliže $a = b > c$, jde o zploštělý (diskovitý) sferoid
- jestliže $a = b = c$, jde o kouli

Elipsoid trojosý (3:2:1):



Příklady používaných elipsoidů

	a [m]	b [m]	e
Zachův el.	6 376 045	6 355 477	0,0802571310
Besselův el. (r. 1841)	6 377 397	6 356 078	0,081 696
Hayfordův el. (r. 1909)	6 378 388	6 356 911	0,081 991 889
Krasovského el. (r. 1940)	6 378 245	6 356 863	0,081 813 333
IAG (r. 1967)	6 378 160	6 356 774	0,081 820 565
WGS-84(r. 1984)	6 378 137	6 356 752	0,081 191 910

<http://cs.wikipedia.org/wiki/Elipsoid>

Elipsoid a hlavní poloměry křivosti:

- Poloměr křivosti křivky: Poloměr křivosti křivky je poloměrem její oskulační kružnice.
- Elipsoid má v bodě P normálu, tou lze proložit nekonečné množství normálových rovin
- Průnikem normálové roviny a elipsoidu je křivka s poloměrem křivosti.
- V bodě P existují dvě normálové roviny jimž odpovídá minimální a maximální poloměr křivosti - tzv. hlavní křivosti.
- Minimální a maximální poloměr křivosti má meridiánový řez (řez rovinou poledníku) a příčný řez (řez rovinou kolmou na poledník).

http://old.gis.zcu.cz/studium/mk2/multimedialni_texty/index_soubory/hlavni_soubory/zaklady.html

Meridiánový poloměr křivosti:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Příčný poloměr křivosti:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

Diferenciály rovnoběžkového a poledníkového oblouku na elipsoidu:

$$ds_p = M \cdot d\varphi$$

$$ds_r = N \cdot \cos(\varphi) d\lambda$$

Délka oblouku:

$$s_p = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi$$

$$s_r = N \cos \varphi (\lambda_2 - \lambda_1)$$

Subsection 3

Rovina

Referenční rovina

- Tečná rovině ve zvoleném bodě
- Použití pro malá území (20 x 20 km).
- Pro větší území značné výškové a polohové odchylky.
- Nulová křivost, nebere v potaz zakřivení Země.
- Mapy velkých měřítek: státní mapové dílo.
- Nelze použít pro mapy malých a středních měřítek, velké zkreslení
- Tečná rovina v bodě, princip azimutálních zobrazení.

Matematická kartografie - převod elipsoidu resp. koule do roviny

Oprava délek při náhradě tečnou rovinou:

- 10 km - 0.3 cm
- 25 km - 3.5 cm
- 50 km - 25.8 cm

Obsah

- 1 Referenční plochy
 - Koule
 - Elipsoid
 - Rovina
- 2 Souřadnicové systémy na referenčních plochách
 - Zeměpisné souřadnice
 - Kartografické souřadnice
 - Izometrické (symetrické) souřadnice
- 3 Důležité křivky
 - Ortodroma
 - Loxodroma

Section 2

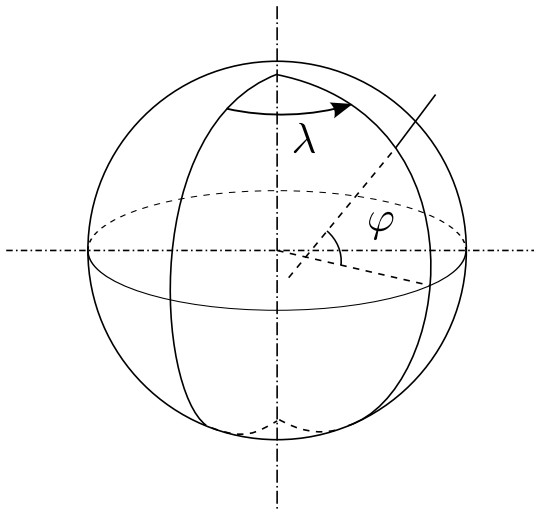
Souřadnicové systémy na referenčních plochách

Souřadnice na elipsoidu:

- Zeměpisné souřadnice φ, λ
- Geocentrická šířka β
- Redukovaná šířka Ψ
- Pravoúhlé prostorové souřadnice X, Y, Z

Zeměpisné souřadnice (Geodetic coordinates)

- Zeměpisná šířka φ - úhel, který svírá normála elipsoidu s rovinou rovníku.
- Zeměpisná délka λ - úhel, který svírá rovina poledníku s rovinou nultého poledníku



Geocentrická a redukováaná šířka

- Geocentrická šířka β : Úhel spojnice středu elipsoidu se bodem na elipsoidu s rovinou rovníku.

$$\beta = (1 - e^2) \tan \varphi$$

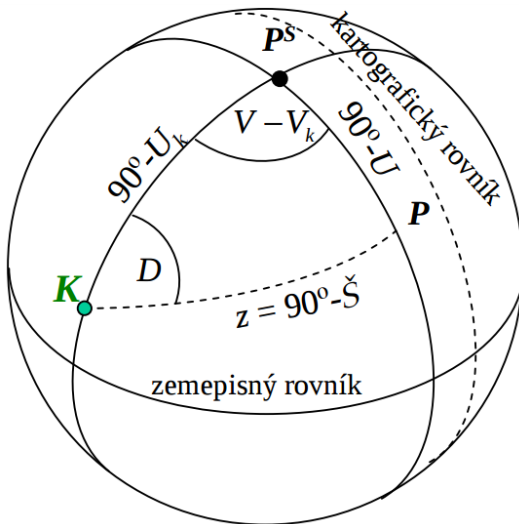
- Redukovaná šířka Ψ : Úhel spojnice průmětu bodu ležícího na oskulační kružnici s rovinou rovníku.

$$\tan \Psi = \sqrt{(1 - e^2) \tan \varphi}$$

- Těchto souřadnic používáme pro řešení některých teoretických úloh na ploše referenčního elipsoidu. Pro kulovou referenční plochu platí $U = \beta = \Psi$.

Kartografické souřadnice

Pro optimální volbu zobrazení a s tím související polohou zobrazovací plochy je vhodné určovat polohu bodů pomocí tzv. kartografických souřadnic. Osa zobrazovací plochy již nebude totožná s osou zemskou a definujeme nový kartografický systém souřadnic. Průsečík osy plochy s referenční plochou je kartografickým pólem Q . Definice kartografických souřadnic $\bar{S}$ (kartografická šířka) a $\bar{D}$ (kartografická délka) je pak analogická k souřadnicím zeměpisným U, V .



Kartografické souřadnice

`http://old.gis.zcu.cz/studium/mk2/multimedialni\_texty/index.html`

Izometrické souřadnice

$$ds^2 = f(\xi, \eta) \cdot (\xi^2 + \eta^2)$$

Pro geografické souřadnice

Delkový element na elipsoidu

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos \varphi d\lambda^2$$

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{M^2}{N^2 \cos^2 \varphi} d\varphi^2 + d\lambda^2 \right)$$

$$\frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi = dq$$

pak bude:

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + d\lambda^2)$$

Pro geografické souřadnice

Izometrická šířka:

$$q = \int_0^\varphi \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi,$$

po integraci dostaneme:

$$q = \ln \left[\tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \right]$$

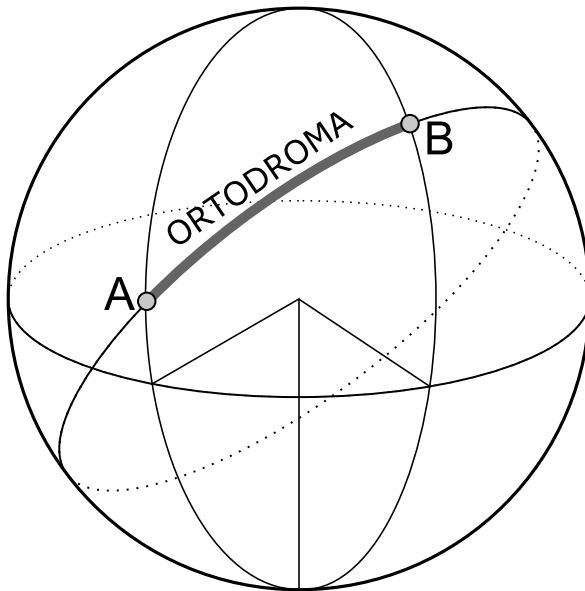
Obsah

- 1 Referenční plochy
 - Koule
 - Elipsoid
 - Rovina
- 2 Souřadnicové systémy na referenčních plochách
 - Zeměpisné souřadnice
 - Kartografické souřadnice
 - Izometrické (symetrické) souřadnice
- 3 Důležité křivky
 - Ortodroma
 - Loxodroma

Ortodroma - definice

Ortodroma (řecky orthos - přímý, dromos - cesta) je nejkratší spojnice dvou bodů na kulové ploše (např. povrchu Země). Tvoří ji kratší oblouk hlavní kružnice (její střed splývá se středem Země).





Délka ortodromy (dle SUS):

$$\cos \sigma_{12} = \sin U_1 \cdot \sin U_2 + \cos U_1 \cdot \cos U_2 \cdot \cos \Delta V$$

Azimut ortodromy (dle sinové věty):

$$\sin \alpha = \frac{\cos U_2}{\sin \sigma_{12}} \sin(\Delta V),$$

Po úpravě:

$$\tan A_{12} = \frac{\sin(\Delta V) \cdot \cos U_2}{\sin U_2 \cdot \cos U_1 - \cos U_2 \cdot \sin U_1 \cdot \cos \Delta V}$$

Ortodroma demo

- GoogleEarth
- GoogleMaps
- ...

Loxodroma - křivka na referenční ploše, která protíná všechny poledníky pod stále stejným úhlem - azimutem.

$$\tan A = \frac{R \cdot \cos U \cdot dV}{R \cdot dU},$$

čili

$$dV = \tan A \frac{dU}{\cos U}$$

Po integraci:

$$\tan A = \frac{U_2 - U_1}{\operatorname{arctanh}(\sin V_2) - \operatorname{arctanh}(\sin V_1)},$$

resp.:

$$V_2 - V_1 = \tan A (\ln \tan (U_2/2 + 45^\circ) - \ln \tan (U_1 + 45^\circ))$$

Délka loxodromy:

$$s = R \frac{U_2 - U_1}{\cos A}$$

<http://cs.wikipedia.org/wiki/Loxodroma>

<http://www.jasondavies.com/maps/loxodrome/>

<http://www.movable-type.co.uk/scripts/latlong.html>

`http://www.progonos.com/furuti/MapProj/Normal/
CartProp/Rhumb/rhumb.html`

Zdroje:

-  Grafarend E., Krumm F.: *Map Projections*, Springer, Germany, 2006
-  Buchar P.: *Matematická kartografie 10*, Skriptum ČVUT, 2002
-  Hložek M.: *Sférická trigonometrie*, Diplomová práce ZČU, 2005