# Řešené příklady z lineární algebry - část 1

## Typové příklady s řešením

Příklady jsou určeny především k zopakování látky před zkouškou, jsou proto řešeny se znalostmi učiva celého semestru. Tento fakt se projevuje hlavně při řešení soustav lineárních algebraických rovnic, kdy je využívána Gaussova eliminační metoda. Není ale problém použít k řešení soustav metodu sčítací či dosazovací, známé ze střední školy, nebo využijte Gaussovu eliminační metodu využívající redukovaný stupňovitý tvar matice - viz 0.část řešených úloh. Výsledky získané libovolnou metodou jsou samozřejmě totožné.

**Příklad 1.1:**
Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Určete součiny $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, $\mathbf{B}.\mathbf{A}$, $\mathbf{A}.\mathbf{C}$, $\mathbf{C}.\mathbf{A}$.

**Řešení:**
Zadané matice jsou čtvercové matice řádu tři, proto jsou všechny součiny definovány, tj. je vždy splněna podmínka, že počet sloupců v první matici se rovná počtu řádků ve druhé matici. Výsledné matici budou také čtvercové matice řádu tři, typ výsledné matice je určen počtem řádků první matice a počtem sloupců druhé matice.
Spočítejme součin $\mathbf{A}.\mathbf{B}$. Označme matici $\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{M}$, pro její prvky platí:

$$m_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j}; \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Pro zjednodušení si můžeme představit, že prvek $m_{ij}$ určíme jako "skalární součin $i$-tého řádku matice $\mathbf{A}$ a $j$-tého sloupce matice $\mathbf{B}$ ". Tedy prvek $m_{11}$ vypočítáme pomocí prvního řádku matice $\mathbf{A}$ a prvního sloupce matice $\mathbf{B}$:

$$m_{11} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} = 1.(-2) + (-1).1 + 2.1 = -1.$$

Z prvního řádku matice $\mathbf{A}$ a druhého sloupce matice $\mathbf{B}$ se určí prvek $m_{12}$:

$$m_{12} = a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} = 1.1 + (-1).1 + 2.(-2) = -4,$$

z prvního řádku matice **A** a třetího sloupce matice **B** se určí prvek $m_{13}$:

$$m_{13} = a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{33} = 1.1 + (-1).(-2) + 2.1 = 5.$$

Podobně určíme i zbylé prvky v druhém a třetím řádku matice **M**.

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.(-2) + (-1).1 + 2.1, & 1.1 + (-1).1 + 2.(-2), & 1.1 + (-1).(-2) + 2.1 \\ 3.(-2) + 2.1 + 1.1, & 3.1 + 2.1 + 1.(-2), & 3.1 + 2.(-2) + 1.1 \\ 1.(-2) + 1.1 + (-1).1, & 1.1 + 1.1 + (-1).(-2), & 1.1 + 1.(-2) + (-1).1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 \\ -3 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Součin matic **B**.**A** vypočítáme analogicky, uvědomme si jen, že nyní počítáme se řádky matice **B** a sloupci matice **A** .

$$\mathbf{B}.\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-2).1 + 1.3 + 1.1, & (-2).(-1) + 1.2 + 1.1, & (-2).2 + 1.1 + 1.(-1) \\ 1.1 + 1.3 + (-2).1, & 1.(-1) + 1.2 + (-2).1, & 1.2 + 1.1 + (-2).(-1) \\ 1.1 + (-2).3 + 1.1, & 1.(-1) + (-2).2 + 1.1, & 1.2 + (-2).1 + 1.(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Všimněme si, že změna pořadí násobených matic změnila i výsledek, což potvrzuje fakt, že násobení matic obecně **není komutativní operace**.
Při výpočtu zbývajících dvou součinů matic postupujeme podobně:

$$\mathbf{A}.\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.(-3) + (-1).4 + 2.1, & 1.1 + (-1).(-3) + 2.(-2), & 1.(-5) + (-1).5 + 2.5 \\ 3.(-3) + 2.4 + 1.1, & 3.1 + 2.(-3) + 1.(-2), & 3.(-5) + 2.5 + 1.5 \\ 1.(-3) + 1.4 + (-1).1, & 1.1 + 1.(-3) + (-1).(-2), & 1.(-5) + 1.5 + (-1).5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}.\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-3).1 + 1.3 + (-5).1, & (-3).(-1) + 1.2 + (-5).1, & (-3).2 + 1.1 + (-5).(-1) \\ 4.1 + (-3).3 + 5.1, & 4.(-1) + (-3).2 + 5.1, & 4.2 + (-3).1 + 5.(-1) \\ 1.1 + (-2).3 + 5.1, & 1.(-1) + (-2).2 + 5.1, & 1.2 + (-2).1 + 5.(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Pro dvojici matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$ platí $\mathbf{A}.\mathbf{C} = \mathbf{C}.\mathbf{A} = (-5).\mathbf{I}$, kde $\mathbf{I}$ značí jednotkovou matici řádu tři. To je ale spíše vyjímečná situace. Takové dvojice matic, u nichž nezáleží na pořadí násobení, se nazývají záměnné matice nebo též matice komutující.

**Příklad 1.2:**
V prostoru $\mathcal{P}_2$ všech polynomů do stupně 2 (včetně nulového polynomu) uvažujme polynomy $p_1(x) = x^2 + 2x + 1, p_2(x) = 5x^2 + x + 3, p_3(x) = 7x^2 - 4x + 3$.

1. Rozhodněte, zda polynomy $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ jsou lineárně závislé nebo lineárně nezávislé.

2. Určete dimenzi podprostoru $\mathcal{V}$ a nalezněte alespoň jednu bázi podprostoru $\mathcal{V}$, je-li $\mathcal{V}$ podprostor prostoru $\mathcal{P}_2$ generovaný polynomy $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$.

3. Rozhodněte, zda polynom $q(x) = x^2 + 1$ leží v podprostoru $\mathcal{V}$ . Pokud ano, určete souřadnice $\widehat{q(x)}$ polynomu $q(x)$ vzhledem k bázi zvolené výše.

4. Rozhodněte, zda polynom $r(x) = -3x^2 + 12x + 1$ leží v podprostoru $\mathcal{V}$ . Pokud ano, určete souřadnice $\widehat{r(x)}$ polynomu $r(x)$ vzhledem k bázi zvolené výše.

**Řešení:**

1. Lineární kombinaci polynomů $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ položíme rovnu nulovému polynomu a ptáme se, pro jaké koeficienty je tato rovnost splněna.

$$c_1p_1(x) + c_2p_2(x) + c_3p_3(x) = 0$$
$$c_1(x^2 + 2x + 1) + c_2(5x^2 + x + 3) + c_3(7x^2 - 4x + 3) = 0$$
$$(c_1 + 5c_2 + 7c_3)x^2 + (2c_1 + c_2 - 4c_3)x + (c_1 + 3c_2 + 3c_3) = 0$$

Tyto polynomy se budou rovnat, budou-li splněny rovnice následující soustavy lineárních algebraických rovnic, které získáme porovnáním koeficientů u odpovídajících si mocnin $x$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & 5c_2 & + & 7c_3 & = & 0\,, \\ 2c_1 & + & c_2 & - & 4c_3 & = & 0\,, \\ c_1 & + & 3c_2 & + & 3c_3 & = & 0\,. \end{array}$$

Soustavu vyřešíme např. Gaussovou eliminační metodou. Matici homogenní soustavy upravíme na stupňovitý tvar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & -9 & -18 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že tato soustava má nekonečně mnoho řešení, pro libovolně zvolené $c_3 \in \mathbf{R}$ musí být $c_2 = -2c_3,\ c_1 = 3c_3$. Existuje tedy netriviální řešení, např. pro $c_3 = 1$ je $c_1 = 3, c_2 = -2$. To ale znamená, že existuje netriviální lineární kombinace polynomů $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$, která se rovná nulovému polynomu:

$$3p_1(x) - 2p_2(x) + p_3(x) = 0\,.$$

Proto jsou zadané polynomy $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ lineárně závislé.

2. Hledáme-li bázi podprostoru $\mathcal{V}$, potřebujeme najít lineárně nezávislou množinu generátorů tohoto podprostoru. Z řešení části 1. víme, že polynomy $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ jsou lineárně závislé, že můžeme např. polynom $p_3(x)$ vyjádřit jako lineární kombinaci zbylých dvou polynomů $p_3(x) = -3p_1(x) + 2p_2(x)$, a proto lze polynom $p_3(x)$ vynechat. Je zřejmé, že zbylé dva polynomy už jsou lineárně nezávislé, tvoří proto bázi podprostoru $\mathcal{V}$ .

   Dimenze prostoru je počet prvků libovolné báze. Pro podprostor $\mathcal{V}$ generovaný polynomy $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ je $\dim(\mathcal{V}) = 2$, jednu bázi podprostoru $\mathcal{V}$ tvoří polynomy $p_1(x), p_2(x)$.

3. Prvek leží v podprostoru $\mathcal{V}$, pokud jej lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze tohoto podprostoru. To znamená, že se pokusíme vyjádřit polynom $q(x)$ jako lineární kombinaci polynomů $p_1(x), p_2(x)$, které tvoří bázi podprostoru $\mathcal{V}$ ( viz část řešení 2. ) a určit koeficienty $c_1, c_2$ v této kombinaci.

$$c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) = q(x)$$

$$c_1(x^2 + 2x + 1) + c_2(5x^2 + x + 3) = x^2 + 1$$

$$(c_1 + 5c_2)x^2 + (2c_1 + c_2)x + (c_1 + 3c_2) = x^2 + 1$$

Rovnost pro tyto polynomy bude platit, bude-li mít řešení soustava lineárních algebraických rovnic:

$$\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & 5c_2 & = & 1\,, \\ 2c_1 & + & c_2 & = & 0\,, \\ c_1 & + & 3c_2 & = & 1\,. \end{array}$$

Při řešení této soustavy můžeme využít Gaussovu eliminační metodu, rozšířenou matici soustavy upravíme pomocí elementárních řádkových úprav na stupňovitý tvar:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Vidíme, že hodnost rozšířené matice soustavy se nerovná hodnosti matice soustavy ( $3 \neq 2$ ), soustava proto nemá řešení. Polynom $q(x)$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci bázových prvků $p_1(x), p_2(x)$ podprostoru $\mathcal{V}$, proto polynom $q(x)$ neleží v podprostoru $\mathcal{V}$.

4. Podobně jako výše u polynomu $q(x)$ se pokusíme vyjádřit polynom $r(x)$ jako lineární kombinaci polynomů $p_1(x), p_2(x)$ - vektorů báze podprostoru $\mathcal{V}$ a zároveň určit koeficienty $c_1, c_2$ této kombinace.

$$c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) = r(x)$$

$$c_1(x^2 + 2x + 1) + c_2(5x^2 + x + 3) = -3x^2 + 12x + 1$$

$$(c_1 + 5c_2)x^2 + (2c_1 + c_2)x + (c_1 + 3c_2) = -3x^2 + 12x + 1$$

Tyto polynomy se budou rovnat, bude-li mít řešení soustava lineárních algebraických rovnic:

$$\begin{array}{rcrcr} c_1 & + & 5c_2 & = & -3\,, \\ 2c_1 & + & c_2 & = & 12\,, \\ c_1 & + & 3c_2 & = & 1\,. \end{array}$$

Soustavu vyřešíme například Gaussovou eliminační metodou, nejdříve rozšířenou matici soustavy upravíme pomocí elementárních řádkových úprav na stupňovitý tvar:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 12 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Soustava má právě jedno řešení $c_1 = 7, c_2 = -2$, polynom $r(x)$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci $r(x) = 7p_1(x) - 2p_2(x)$ prvků $p_1(x)$, $p_2(x)$, které tvoří bázi podprostoru $\mathcal{V}$. Proto je polynom $r(x)$ prvkem podprostoru $\mathcal{V}$ a spočítané koeficienty v lineární kombinaci jsou hledané souřadnice polynomu $r(x)$ vzhledem k bázi $p_1(x), p_2(x)$ podprostoru $\mathcal{V}$:

$$\widehat{r(x)} = [7, -2]^T.$$

**Příklad 1.3:**
V prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ všech reálných matic typu 2/3 uvažujme podmnožiny

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} a+b-3c, & 2a+b-5c, & b+c \\ a-b-2c, & -3a-b+4c, & 2a-4c \end{bmatrix};\ a,b,c \in \mathbf{R} \right\}$$

a

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a-3c+d, & 2a+b-3, & b-3c-3d \\ b+c+2d, & a-2b+c+d, & 3a-b+4c \end{bmatrix};\ a,b,c,d \in \mathbf{R} \right\}.$$

Ověřte, zda množiny $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ jsou podprostory prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$. Pokud ano, nalezněte alespoň jednu bázi podprostoru a určete jeho dimenzi.

**Řešení:**
Věnujme se napřed podmnožině $\mathcal{V}$. Podmnožina je podprostorem lineárního vektorového prostoru, pokud jsou na ní uzavřeny obě základní operace z prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$, tj. pokud do této podmnožiny patří součet libovolných dvou prvků z této podmnožiny a násobek libovolného prvku této podmnožiny libovolným reálným číslem (obecně prvkem tělesa $T$). Označíme-li

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_1+b_1-3c_1, & 2a_1+b_1-5c_1, & b_1+c_1 \\ a_1-b_1-2c_1, & -3a_1-b_1+4c_1, & 2a_1-4c_1 \end{bmatrix}$$

a $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_2+b_2-3c_2, & 2a_2+b_2-5c_2, & b_2+c_2 \\ a_2-b_2-2c_2, & -3a_2-b_2+4c_2, & 2a_2-4c_2 \end{bmatrix}$ libovolné dvě matice z množiny $\mathcal{V}$, jejich součtem je matice

$$\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_1+b_1-3c_1, & 2a_1+b_1-5c_1, & b_1+c_1 \\ a_1-b_1-2c_1, & -3a_1-b_1+4c_1, & 2a_1-4c_1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} a_2+b_2-3c_2, & 2a_2+b_2-5c_2, & b_2+c_2 \\ a_2-b_2-2c_2, & -3a_2-b_2+4c_2, & 2a_2-4c_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{matrix} a_1+b_1-3c_1+a_2+b_2-3c_2, & 2a_1+b_1-5c_1+2a_2+b_2-5c_2, \\ a_1-b_1-2c_1+a_2-b_2-2c_2, & -3a_1-b_1+4c_1+(-3a_2-b_2+4c_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} b_1+c_1+b_2+c_2 \\ 2a_1-4c_1+2a_2-4c_2 \end{matrix} \right] =$$

$$= \left[ \begin{matrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2)-3(c_1+c_2), & 2(a_1+a_2)+(b_1+b_2)-5(c_1+c_2), \\ (a_1+a_2)-(b_1+b_2)-2(c_1+c_2), & -3(a_1+a_2)-(b_1+b_2)+4(c_1+c_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (b_1+b_2)+(c_1+c_2) \\ 2(a_1+a_2)-4(c_1+c_2) \end{matrix} \right] .$$

Toto je zřejmě matice z podmnožiny $\mathcal{V}$ (součty reálných čísel $a_1+a_2$, $b_1+b_2$, $c_1+c_2$ jsou opět reálná čísla).

Dále určíme pro libovolné reálné číslo $\lambda$ a libovolnou matici
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a+b-3c, & 2a+b-5c, & b+c \\ a-b-2c, & -3a-b+4c, & 2a-4c \end{bmatrix}$ z podmnožiny $\mathcal{V}$ její $\lambda$-násobek

$$\lambda.\mathbf{A} = \lambda. \begin{bmatrix} a+b-3c, & 2a+b-5c, & b+c \\ a-b-2c, & -3a-b+4c, & 2a-4c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\lambda.a)+(\lambda.b)-3(\lambda.c), & 2(\lambda.a)+(\lambda.b)-5(\lambda.c), & (\lambda.b)+(\lambda.c) \\ (\lambda.a)-(\lambda.b)-2(\lambda.c), & -3(\lambda.a)-(\lambda.b)+4(\lambda.c), & 2(\lambda.a)-4(\lambda.c) \end{bmatrix} .$$

Výsledná matice je také prvkem podmnožiny $\mathcal{V}$ ( $\lambda.a$ , $\lambda.b$, $\lambda.c$ jsou opět reálná čísla). Ověřili jsme, že součet dvou prvků z podmnožiny $\mathcal{V}$ i $\lambda$ -násobek prvku z $\mathcal{V}$ opět leží v podmnožině $\mathcal{V}$, proto podmnožina $\mathcal{V}$ je podprostorem lineárního prostoru .
V případě podprosoru potřebujeme dále nalézt alespoň jednu jeho bázi. Libovolnou matici $\mathbf{A}$ z podprostoru $\mathcal{V}$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a+b-3c, & 2a+b-5c, & b+c \\ a-b-2c, & -3a-b+4c, & 2a-4c \end{bmatrix} =$$

$$= a.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + c.\begin{bmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix},$$

tedy matice $\mathbf{A}$ je lineární kombinací matic $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ s koeficienty $a, b, c \in \mathbf{R}$. Matice $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ jsou proto generátory podprostoru $\mathcal{V}$. Aby se jednalo o bázi tohoto podprostoru, musí být tyto generátory navíc ještě lineárně nezávislé. Ověřme proto nezávislost matic $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$.

Matice $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ budou lineárně nezávislé, pokud jediná jejich lineární kombinace, která se rovná nulové matici, je triviální. Položme proto lineární kombinaci $c_1.\mathbf{M}_1 + c_2.\mathbf{M}_2 + c_3.\mathbf{M}_3$ rovnu nulové matici (řádu 2/3) a určeme, pro jaké koeficienty tato rovnost nastane.

$$c_1.\mathbf{M}_1 + c_2.\mathbf{M}_2 + c_3.\mathbf{M}_3 = \mathbf{0}$$

$$c_1.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} + c_2.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + c_3.\begin{bmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 - 3c_3 & 2c_1 + c_2 - 5c_3 & c_2 + c_3 \\ c_1 - c_2 - 2c_3 & -3c_1 - c_2 + 4c_3 & 2c_1 - 4c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aby se dvě matice rovnaly, musí mít stejné prvky na odpovídajících si pozicích, tedy musí být splněny splněny rovnice následující soustavy lineárních algebraických rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & c_2 & - & 3c_3 & = & 0\,, \\ 2c_1 & + & c_2 & - & 5c_3 & = & 0\,, \\ & & c_2 & + & c_3 & = & 0\,, \\ c_1 & - & c_2 & - & 2c_3 & = & 0\,, \\ -3c_1 & - & c_2 & + & 4c_3 & = & 0\,, \\ 2c_1 & & & - & 4c_3 & = & 0\,. \end{array}$$

Soustavu vyřešíme např. Gaussovou eliminační metodou. Matici homogenní soustavy upravíme na stupňovitý tvar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že řešená homogenní soustava má pouze triviální řešení $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$. To ale znamená, že pouze triviální lineární kombinace matic $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ se rovná nulové matici:

$$0.\mathbf{M}_1 + 0.\mathbf{M}_2 + 0.\mathbf{M}_3 = \mathbf{0}\ .$$

Proto jsou uvažované matice $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ lineárně nezávislé.
Máme tedy matice $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$, které generují podprostor $\mathcal{V}$ a navíc jsou lineárně nezávislé. Matice $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ tvoří jednu možnou bázi podprostoru $\mathcal{V}$. Dimenze podprostoru je počet prvků jeho libovolné báze, báze podprostoru $\mathcal{V}$ je tvořena třemi maticemi, proto

$$\dim(\mathcal{V}) = 3\ .$$

Věnujme se nyní podmnožině $\mathcal{W}$. Podobně jako u podprostoru $\mathcal{V}$ budeme nejdříve ověřovat, zda je podmnožina $\mathcal{W}$ uzavřená na operace sčítání matic a násobení matice reálným číslem. Označíme-li
$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} a_1 - 3c_1 + d_1, & 2a_1 + b_1 - 3, & b_1 - 3c_1 - 3d_1 \\ b_1 + c_1 + 2d_1, & a_1 - 2b_1 + c_1 + d_1, & 3a_1 - b_1 + 4c_1 \end{bmatrix}$
a $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} a_2 - 3c_2 + d_2, & 2a_2 + b_2 - 3, & b_2 - 3c_2 - 3d_2 \\ b_2 + c_2 + 2d_2, & a_2 - 2b_2 + c_2 + d_2, & 3a_2 - b_2 + 4c_2 \end{bmatrix}$ libovolné dvě matice z $\mathcal{W}$, jejich součtem je matice

$$\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} a_1 - 3c_1 + d_1, & 2a_1 + b_1 - 3, & b_1 - 3c_1 - 3d_1 \\ b_1 + c_1 + 2d_1, & a_1 - 2b_1 + c_1 + d_1, & 3a_1 - b_1 + 4c_1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} a_2 - 3c_2 + d_2, & 2a_2 + b_2 - 3, & b_2 - 3c_2 - 3d_2 \\ b_2 + c_2 + 2d_2, & a_2 - 2b_2 + c_2 + d_2, & 3a_2 - b_2 + 4c_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{matrix} a_1 - 3c_1 + d_1 + a_2 - 3c_2 + d_2, & 2a_1 + b_1 - 3 + 2a_2 + b_2 - 3, \\ b_1 + c_1 + 2d_1 + b_2 + c_2 + 2d_2, & a_1 - 2b_1 + c_1 + d_1 + a_2 - 2b_2 + c_2 + d_2, \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} b_1 - 3c_1 - 3d_1 + b_2 - 3c_2 - 3d_2 \\ 3a_1 - b_1 + 4c_1 + 3a_2 - b_2 + 4c_2 \end{matrix} \right] =$$

$$= \left[ \begin{matrix} (a_1 + a_2) - 3(c_1 + c_2) + (d_1 + d_2), & 2(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) - 6, \\ (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) + 2(d_1 + d_2), & (a_1 + a_2) - 2(b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) + (d_1 + d_2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (b_1 + b_2) - 3(c_1 + c_2) - 3(d_1 + d_2) \\ 3(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) + 4(c_1 + c_2) \end{matrix} \right]\ .$$

Součet matic $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ není prvkem podmnožiny $\mathcal{W}$. Součty reálných čísel $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, $c_1 + c_2$, $d_1 + d_2$ jsou opět reálná čísla, ale prvek v prvním řádku a ve druhém sloupci obsahuje konstantu -6, zatímco matice z $\mathcal{W}$ tam musí mít konstantu $-3$. Operace sčítání není na podmnožině $\mathcal{W}$ uzavřená, podmnožina $\mathcal{W}$ proto není podprostorem. Nemá proto smysl hledat její bázi ani určovat její dimenzi.