

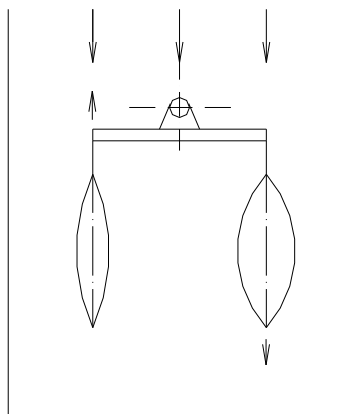
Obsah

1. Úvod	3
2. Základní vlastnosti	4
2.1 Stavové parametry	4
2.2 Stlačitelnost	5
2.3 Roztažnost	6
2.4 Rozpínavost	6
2.5 Rychlost zvuku v klidném prostředí	7
2.6 Vazkost	7
2.7 Povrchové napětí	8
2.8 Rozdělení sil	10
3. Matematika v mechanice tekutin	10
3.1 Parciální a totální derivace	11
3.2 Skaláry a vektory	11
3.3 Gradient, divergence, rotor	12
3.4 Integrální věty	13
3.5 Tenzor zrychlení	13
4. Statika tekutin	14
4.1 Tlak v tekutině	14
4.2 Eulerova rovnice statiky tekutin	15
4.3 Pascalův zákon	16
4.4 Hydraulický lis	17
4.5 Kapalina v gravitačním poli	18
4.6 Kapalinové tlakoměry	20
4.7 Relativní klid kapalin	23
4.8 Síla kapaliny na stěnu	27
4.9 Síla kapaliny na plovoucí tělesa	31
4.10 Stabilita plovoucího tělesa	32
5. Dynamika tekutin	34
5.1 Eulerovo a Lagrangevo vyjádření pohybu tekutin	35
5.2 Proudnice	37
5.3 Dráha částice	37
5.4 Proudová trubice-vírové vlákno	38
5.5 Rovnice spojitosti pro proudovou trubici	38
5.6 Eulerova rovnice pro proudovou trubici	39
6. Potenciální proudění	40
6.1 Proudová funkce	40
6.2 Potenciál rychlosti	41
6.3 Rotor rychlosti	42
6.4 Cirkulace rychlosti	43
6.5 Laplaceovy rovnice	45
6.6 Tlak v potenciálním proudění	46
6.7 Vztah mezi Φ a Ψ	47
7. Jednoduchá proudění	47
7.1 Rovnoběžkový proud	47
7.2 Zřídlo, propad	48
7.3 Potenciální vír	49
7.4 Přenos tlakového signálu trubici	50
8. Složená proudění	56
8.1 Skládání rovnoběžkových proudů	56
8.2 Složení zřídla a propadu o stejné vydatnosti	57
8.3 Zřídlový propad - dipól	59
8.4 Obtékání válce	60
9. Konformní zobrazení	64
9.1 Princip konformního zobrazení	65
9.2 Transformační pól a transformační rovnice	66

9.3	Přehled Žukovských transformací válce	68
10.	Vazké proudění	69
10.1	Molekulární vazkost	69
10.2	Laminární, přechodové, turbulentní proudění v potrubí	71
10.3	Tenzor napětí v tekutině	72
10.4	Pohybová rovnice	75
10.5	Rovnice kontinuity	77
10.6	Rovnice turbulentního proudění	78
10.7	Molární vazkost	80
11.	Podobnost v mechanice tekutin	81
11.1	Teorie podobnosti	82
11.2	Odvození kritérií podobnosti	82
11.3	Tvorba kritériálních rovnic	84
12.	Bernoulliho rovnice	84
12.1	Bernoulliho rovnice při různých podmínkách	85
12.2	Použití rozšířené Bernoulliho rovnice	86
12.3	Bernoulliho rovnice pro stlačitelné proudění	87
12.4	Bod nulové rychlosti	88
12.5	Měření tlaků a rychlostí	89
12.6	Měření průtočného množství	91
13.	Výtok kapaliny	93
13.1	Výtok malým otvorem do ovzduší	93
13.2	Výtok válcovým nátrubkem	94
13.3	Výtok malým ponořeným otvorem	95
13.4	Výtok velkým otvorem do ovzduší	95
13.5	Přepad kapaliny	96
13.6	Doba výtoku	97
13.7	Doba vyrovnání hladin ve spojitých nádobách	98
14.	Věta o změně toku hybnosti	99
14.1	Podstata VZTH a návod na použití	99
14.2	Síla od proudu kapaliny na pevnou desku	101
14.3	Síla paprsku kapaliny na lopatku v pohybu	102
14.4	Síla od proudící tekutiny na pevnou lopatkovou mříž	102
14.5	Tah proudového a raketového motoru	103
14.6	Výpočet výkonu radiální turbíny	104
14.7	Výpočet výkonu odstředivého čerpadla, kompresoru	105
14.8	Lopatkový stroj s axiálním průtokem	105
15.	Rychlostní profily	106
15.1	Laminární proudění v trubici kruhového průřezu	106
15.2	Laminární průtok mezi rovnoběžnými deskami	107
15.3	Laminární průtok klínovou mezerou	108
15.4	Laminární proudění mezikruhovou mezerou	110
15.5	Turbulentní mocninový zákon	111
15.6	Turbulentní logaritmický zákon	113
16.	Tlakovou ztráty v potrubí	114
16.1	Místní ztráty	115
16.2	Hydraulicky hladké a drsné potrubí	117
16.3	Třecí ztráty	117
	Literatura	120
	Značení veličin	120

1. Úvod

Tekutiny, tj. hlavně kapaliny a plyny, jsou mediem, se kterým člověk nejčastěji přichází do styku - prakticky celé tělo máme vystavené vzduchu, pohybujeme se v něm různou vzájemnou rychlostí, dýcháme jej,



Obr. 1

koupeme se ve vodě, pijeme ji, manipulujeme s různými kapalinami. Díky těmto zkušenostem člověk brzy objevil nezákladnější vlastnosti tekutin, jako je např. chování kapalin v gravitačním poli (kapalina neteče do vrchu), pozice tlakových hladin ve spojených nádobách, silové účinky tekutin na obtékaná tělesa (ohybání větví ve větru), atp. Poznatky tohoto druhu umožnily stavbu zavlažovacích kanálů, primitivních vodních kol a čerpadel, větrných mlýnů, lodních trupů, plachetnic, atd.

Mechanika tekutin jako věda se začala rozvíjet ve starověku, především experimentálně. Víme, že Féničané prováděli srovnávací měření, při nichž určovali lodní trup s menším hydraulickým odporem. Do řeky zarazili kůl, k němu přivázali vahadlo a na konce vahadla porovnávané lodě plovoucí ve vodě. Loď s větším odporem byla stržena proudem řeky a prostřednictvím vahadla vynesla hydraulicky lepší trup proti toku řeky. U vesly poháněných galér byl hydraulický odpor důležitým parametrem a je významným i u dnešních plavidel.

O rozvoj mechaniky tekutin se zasloužily tisíce badatelů, z nichž bych si dovolil uvést několik významnějších, starších:

- Archimedes ze Syrakus, 282-212 př. Kr.: zákon o vztlaku plovoucích těles
- Heron z Alexandrie, 1. století po Kr.: reaktivní pohon rotující koule vytékající parou
- Leonardo de Vinci, 1452-1519 po. Kr.: vírové úplavy, vojenská vodní zařízení aj.
- Isaac Newton, 1643-1727: odpor těles v plynu a kapalině, rychlost zvuku, smykové napětí
- Blaise Pascal, 1623-1662: zákon o šíření tlaku v klidných kapalinách
- Johann Bernoulli, 1667-1748: pohybová rovnice pro nevazké proudění podél proudu
- Henri Pitot, 1695-1771: trubice pro měření celkového tlaku proudící tekutiny
- Ernst Mach, 1838-1941: vynálezce interferometru, vlastnosti transonických proudění
- Ludvík Prandtl, 1850-1925: tvůrce výpočtových modelů turbulence, aerodyn. tunelů, založil v Göttingen 2 ústavy, a to Aerodynamische Versuchsanstalt a Max Planck Institut, kde vyrostli další níže citovaní badatelé turbulence, vírové úplavy- Kármánova vírová stezka
- Theodor von Kármán, 1881-1962: Tvůrce prvního nadzvukového tunelu v roce 1929
- Adolf Buseman, 1901-?: Z Čechů a Slováků do plejády nejvýznamnějších můžeme zařadit přinejmenším 2:
 - Čeněk Strouhal, 1850 - 1925: studie periodických vírových úplavů, Strouhalovo číslo
 - Aurel Stodola, 1859 - 1942: proudění v lopatkových strojích, v parních turbinách

V dalším průběhu výkladu látky se setkáme s dalšími vědci oboru mechaniky tekutin, jakým je Osborn Reynolds (určil přechod laminárního proudění do turbulentního), Nikuradse (vyšetřil vliv drsnosti na tlakové ztráty v potrubí), Žukovský (tvůrce leteckého profilu na základě konformní transformace válce), Kolmogorov ($k - \varepsilon$ model turbulentního proudění), Laval (dýza k dosažení nadzvukové rychlosti), a další.

Mechanika tekutin je součástí mechaniky, která se dělí na

- a) mechaniku tuhých těles - studuje rovnováhu a pohyb hmotností, které nemění svůj tvar účinkem vnějších sil
- b) pružnost a pevnost - vyšetřuje napětí a deformace od vnějších sil v poddajných pevných tělesech
- c) mechaniku tekutin - studuje vlastnosti nepohyblivých a proudících tekutin na základě zákonitostí předchozích 2 oborů mechaniky

Tekutina. Její primitivní, ale výstižná definice říká, že je to látka, jejíž částice se vzájemně snadno přemísťují. Při integrálním pohledu se tekutina jeví jako spojité hmotné prostředí. Při mikroskopickém zkoumání je však tekutina souborem mikročástic. Existují 3 druhy mikročástic uplatňující se v tekutinách:

- a) **Molekuly, atomy, volné elektrony**, z nichž především z nich nehmotnější molekuly určují vlastnosti tekutiny. Molekuly se u tekutiny vždy pohybují, obecně konají translační, rotační a kmitavý pohyb, u kapalin jen poslední dva vzhledem k mřížci. Molekuly přenášejí svoji hybnost do jiných oblastí prostoru

tekutiny jednak svým průnikem, tzv. difúzí, jednak srážkami se sousedními molekulami. Uvedený přenos hybnosti se uplatňuje v neproudící tekutině a v pohybující se tekutině při laminárním proudění.

- b) **Molární částice**, což jsou shluky molekul, které se ve shluku pohybují jednotnou rychlostí co do velikosti a směru. I když jsou v molární částici miliardy molekul, stále se jedná o mikročástici pouhým okem neviditelnou. Přenos hybnosti molárními částicemi je samozřejmě mnohem intenzivnější než separátními molekulami. Molární částice jsou v turbulentním proudění, kde se z nich vytvářejí víry různých velikostí a rotace. Proces rozpadu vírů a molárních částic na separátní pohyb jednotlivých molekul je disipace.
- c) **Modelové, či matematické částice** jsou myšlené částice, které se používají do fenomenologických popisů proudění. Můžeme si je představit jako tuhé kouličky, které buď konají jen translační nebo i rotační pohyb. V prvním případě je proudění tzv. nevířivé, v druhém vířivé. To znamená, že u reálných proudění s molekulami nebo molárními částicemi nemůže být o vířivosti či nevířivosti řeč, tyto kategorie tam nelze určovat. Vlastnosti jednotlivých modelových částic, jako je teplota, rychlost, jsou totožné s týmiž parametry tekutiny jako celku.

Každá látka může běžně existovat ve 4 fázích, které jsou:

- pevná** - molekuly jsou vázány do určitých pozic krystalické mřížky, kolem kterých rotují a kmitají. S rostoucí teplotou se zvyšuje rotace, ale především kmitání, až se dosáhne stavu tání, přechodu do kapaliny
- kapalná** - vazba molekul se uvolňuje, částice rotují a kmitají více, ale od základních poloh se příliš nevzdalují. Při přívodu tepla se pohyby zintenzivňují a při dosažení výparné teploty se molekuly vytrhávají z mřížky.
- plynná** - molekuly putují po prostoru, tj. mají posuvovou, kmitavou a rotační rychlost, střední vzdálenost mezi nimi je velká a tedy plyn je řídký, pravděpodobnost srážky 2 molekul menší než u kapaliny. Přívod tepla se projevuje ve zvyšování kinetické energie pohybu molekul, jehož projevem je teplo. Při určité hodnotě kinetické energií vzniká další fáze, a to
- plazma** - atomy molekul se štěpí na kladně a záporně nabitě ionty, plazma je elektricky nabitá. Předmětem zájmu dalších kapitol budou jen kapaliny a plyny, tj. klasická mechanika tekutin. Plazma svou specifikou a složitostí se vymyká možnostem tohoto textu.

2. Základní vlastnosti tekutin

2.1. Stavové parametry

Stavové parametry v neproudící tekutině jsou hustota ρ , tlak p , teplota T . V proudící tekutině ke třem parametrům přistupuje čtvrtý, a to rychlost w . K určení stavových parametrů musíme mít stejný počet rovnic, v prvním případě 3, ve druhém 4. Rovnice se musí řešit jako soustava.

$$\left. \begin{array}{l} \rho \left[\text{kg} / \text{m}^3 \right] \\ p \left[\text{N} / \text{m}^2 = \text{Pa} \right] \\ T \left[\text{K} \right] \\ w \left[\text{m} / \text{s} \right] \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{stavová rovnice} \\ \text{zákon zachování hmotnosti} \\ \text{zákon zachování hybnosti} \\ \text{zákon zachování energie} \end{array} \right.$$

Pokud se omezíme na izotermické případy $T = konst$, není zapotřebí zákon zachování energie. Jestliže bude proudění navíc nestlačitelné, tj. hustota bude rovna známé konstantě, pak není třeba ani stavová rovnice. Vlastně výraz $\rho = konst$ ji zastupuje stejně jako $T = konst$ zastupuje zákon zachování energie u izotermických procesů. V obecném případě je stavová rovnice třeba. Uvedeme, jak bude vypadat pro ideální plyn (nevazký, stlačitelný), pro ideální kapalinu (nevazká, nestlačitelná) a pro reálnou kapalinu (vazká a nepatrně stlačitelná). Všimněme si z řečeného, že výraz ideální a nevazký jsou identické.

Stavová rovnice udává vazbu mezi p , ρ , T a má následující tvary:

- **ideální plyn:** $\frac{p}{\rho} = rT$, kde r je plynová konstanta, např. vzduch má $r_{vz} = 287,04 \text{ J/kgK}$ (2.1.1)

- **reálný plyn:** $\frac{p}{\rho} = rT \left[1 + \rho a_1(T) + \rho^2 a_2(T) + \dots \right]$, je zřejmé, že opravné funkce (2.1.2)

a_1, a_2, \dots , které závisí na teplotě, dávají rovnici ideálního plynu do souladu se skutečností

- ideální kapalina: $\rho = konst$ (2.1.3)

- reálná kapalina: $\frac{\varepsilon\beta p_N}{\gamma} = 1$, kde je (2.1.4)

ε izotermický součinitel objemové **stlačitelnosti**

β izochorický součinitel tlakové **rozpínivosti**

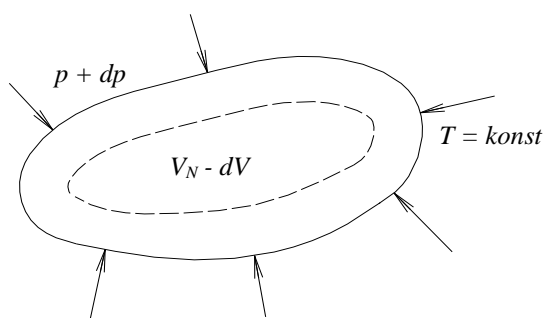
γ izobarický součinitel objemové **roztlačnosti**

p_N normální tlak

Normální tlak je tlak normálního stavu tekutiny, což je referenční, tj. porovnávací stav, ku kterému jiné stavy vztahujeme. V různých oblastech techniky se používají, bohužel, různé normální stavy. Ve fyzice a též ve strojírenství je zaveden tzv. fyzikálně normální stav o parametrech:

$$p_N = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2, \quad T_N = 273,16 \text{ K.}^{**}$$

2.2 Stlačitelnost



Obr. 2.2

Popíšeme proces diferenciálního stlačení reálné kapaliny při konstantní teplotě T přírůstkem tlaku dp , při němž se vytknutý objem kapaliny V_N zmenší o úbytek dV :

$$dV = -\varepsilon V_N dp \quad (2.2.1)$$

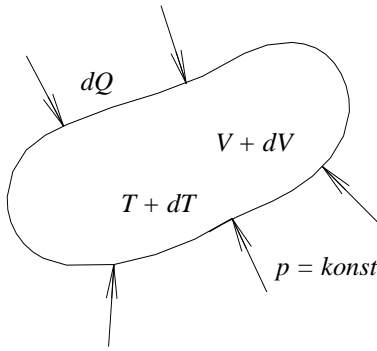
$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{1}{V_N} \left(\frac{dV}{dp} \right)_T = -\frac{1}{V_N} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \\ &= -\frac{1}{v_N} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \doteq -\frac{1}{v_N} \frac{v - v_N}{p - p_N} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

kde ε je již výše uvedený izotermický součinitel objemové stlačitelnosti.

- záporné znaménko vyjadřuje, že přírůstku tlaku odpovídá úbytek objemu
- indexem T naznačujeme, že parciální derivace $\partial V / \partial p$ se provádí při konstantní teplotě
- celkový objem V lze nahradit měrným objemem v [m^3/kg]
- z (2.2.2) plyne, že v je lineárně závislé na $p - p_N$: $v = v_N [1 - \varepsilon(p - p_N)]$ (2.2.3)
- hodnota ε u kapalin je velmi nízká, u vody $\varepsilon_{H_2O} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$
- kapaliny jsou tedy velmi málo stlačitelné, stlačitelnost kapalin se projevuje až při velkých rozdílech tlaků
- převrácená hodnota ε je modul objemové pružnosti $k = 1/\varepsilon$, má obdobný význam jako např. mechanický modul pružnosti E , u oceli $E_{ocel} = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
- hodnota k u kapalin je řádově $100 \times$ menší než u oceli, u vody $k_{H_2O} = 1/\varepsilon_{H_2O} = 2 \cdot 10^9 \text{ N}$

** K parametrům p_N, T_N přísluší u dané látky hustota ρ_N a její převrácená hodnota měrný objem v_N , průtočnou hmotnost můžeme vyjádřit $\dot{m} = \rho_N \cdot \dot{V}_N$, kde \dot{V}_N je normální průtočný objem za jednotku času

2.3 Roztažnost



Obr. 2.3

Vytknutému objemu reálné kapaliny V přivedeme teplo dQ , které způsobí vzrůst teploty o dT a objemu o dV . Při tom předpokládáme neměnný tlak p . Když výchozí objem budeme považovat za normální, pak přírůstek objemu vyjádříme vztahem

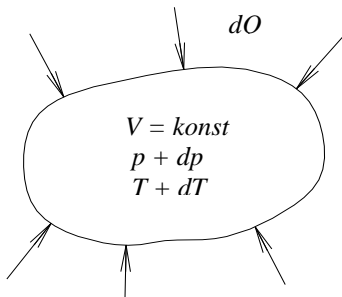
$$dV = \gamma \cdot V_N dT \quad (2.3.1)$$

$$\gamma = \frac{1}{V_N} \cdot \left(\frac{dV}{dT} \right)_p = \frac{1}{V_N} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{v_N} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \doteq \frac{1}{v_N} \frac{v - v_N}{T - T_N} \quad (2.3.2)$$

kde γ je již dříve, v rov. (2.1.4), uvedený izobarický součinitel objemové roztažnosti

- ze (2.3.2) plyne lineární závislost objemu na teplotě: $v = v_N [1 + \gamma(T - T_N)]$ (2.3.3)
- z kapalin má nejvyšší součinitel γ rtuť: $\gamma_{Hg} = 181 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$, proto se používá do teploměru
- pro lepší názor uveďme γ oceli, je mnohem menší: $\gamma_{ocel} = 36 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$

2.4 Rozpínavost



Obr. 2.4

Přivedeme-li do reálné kapaliny v pevné nádobě o objemu V teplo dQ , teplota se zvýší o dT a tlak o dp . Při výchozím normál. tlaku

$$dp = \beta p_N dT \quad (2.4.1)$$

$$\beta = \frac{1}{p_N} \left(\frac{dp}{dT} \right)_V = \frac{1}{p_N} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \doteq \frac{1}{p_N} \frac{p - p_N}{T - T_N} \quad (2.4.2)$$

kde β je již v rov. (2.1.4) uvedený izochorický součinitel tlakové rozpínavosti

- ze (2.4.2) plyne lineární závislost tlaku na teplotě $p = p_N [1 + \beta(T - T_N)]$ (2.4.3)
- zkusme, jaké by bylo β u ideálního plynu splňujícího stavovou rovnici $pv = rT$
a při normálním stavu $p_N v_N = rT_N$

když při $v_N = \text{konst}$ stavovou rovnici zdiferencujeme: $dp v_N = r dT$, odtud $\left(\frac{dp}{dT} \right)_V = \frac{r}{v_N}$ (2.4.4)

$$\beta = \frac{1}{p_N} \cdot \frac{r}{v_N} = \frac{r}{rT_N} = \frac{1}{T_N} \quad (2.4.5)$$

- nyní se můžeme přesvědčit, že stavová rovnice reálné kapaliny je $\varepsilon \beta p_N / \gamma = 1$

uděláme totální diferenciál $v = f(p, T)$: $dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \cdot dT \Big/ : dT$ (2.4.6)

$$\frac{dv}{dT} = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \cdot \left(\frac{dp}{dT} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (2.4.7)$$

$$\text{pro } v = \text{konst} : \quad 0 = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (2.4.8)$$

$$0 = -\varepsilon v_N \cdot \beta p_N + \gamma v_N \quad (2.4.9)$$

$$\frac{\varepsilon \beta p_N}{\gamma} = 1 \quad (2.4.10)$$

2.5 Rychlost zvuku v klidném prostředí

Rychlost zvuku je rychlost šíření malých tlakových poruch. Závisí na druhu látky v níž se šíří a na rychlosti proudění látky. Zde budeme uvažovat rychlost proudění nulovou a při ní je rychlost zvuku nejvyšší. Dále zvolíme 3 prostředí: ideální plyn, nevázkou stlačitelnou kapalinu a pro srovnání ocel. Výpočtový vztah pro rychlost zvuku a našel Isaac Newton:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (2.5.1)$$

- **ideální plyn:** rychlost zvuku v plynu je tak vysoká, že ve sledovaném místě při průchodu zvukových vln se nestačí při kompresi plynu odvádět teplo a při expanzi teplo přivádět. Takový termodynamický proces se nazývá izoentropický a platí pro něj vazba mezi tlakem a hustotou (2.5.2). Jestliže tento výraz zdiferencujeme, viz (2.5.3), můžeme odtud vypočítat derivaci $dp/d\rho$ a tedy rychlost zvuku

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = konst, \text{ kde } \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \text{ (} c_p, c_v \text{ jsou měrné tepelné kapacity)} \quad (2.5.2)$$

při stálém tlaku a objemu)

$$dp \cdot \rho^{-\kappa} - \kappa p \cdot \rho^{-\kappa-1} d\rho = 0 \quad (2.5.3)$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p}{\rho} = a^2 \rightarrow a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa r T} \quad (2.5.4)$$

$$\text{na př. vzduch při } T = 300K \text{ má } a_{vzd} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 300} = 347 \text{ m/s} \quad (2.5.5)$$

- **nevázká stlačitelná kapalina:** vyjdeme z výrazu pro stlačitelnost kapaliny, do něhož patrným způsobem upravíme hustotu ρ místo V a vypočteme rychlost zvuku.

$$dV = -\varepsilon V dp / \frac{1}{m} \quad (2.5.6)$$

$$d\left(\frac{V}{m}\right) = -\varepsilon \frac{V}{m} \cdot dp \quad (2.5.7)$$

$$d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{\varepsilon}{\rho} \cdot dp \quad (2.5.8)$$

$$-\frac{1}{\rho^2} d\rho = -\frac{\varepsilon}{\rho} \cdot dp \quad (2.5.9)$$

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = +\frac{1}{\varepsilon \rho} = \frac{k}{\rho} \rightarrow a = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (2.5.10)$$

$$\text{pro kapalnou vodu dostaneme } a_{H_2O} = \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^9}{10^3}} = 1414 \text{ m/s} \quad (2.5.11)$$

- **rychlost zvuku v oceli** je informační hodnotou. Dostaneme ji z (2.5.10), kde objemový modul pružnosti kapaliny nahradíme modulem pružnosti oceli E :

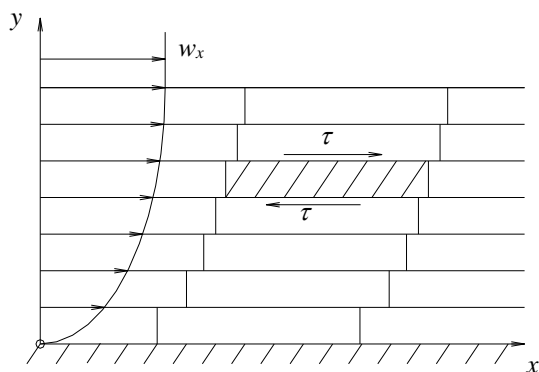
$$a_{ocel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11}}{10^3}} = 5172 \text{ m/s} \quad (2.5.12)$$

Vidíme, že rozdíly mezi rychlostmi zvuku v různých prostředích jsou značné. Nejnižší je v plynu, zhruba 4 krát vyšší je v kapalině a nejvyšší je v oceli, kde je rychlost přibližně 3,7 krát vyšší než v kapalině.

2.6 Vazkost

S ohledem na vazkost rozdělujeme tekutiny na newtonské a nenevtonské. Jejich odlišný druh vazkosti se odráží ve vzorci pro výpočet smykového napětí.

- **Newtonská tekutina**



Obr. 2.6.1

Uvažujeme proudění podél stěny ve směru x s profilem rychlosti zobrazeným na obr. 2.6.1. Proudění, zejména když je laminární, si můžeme představit složené z vrstev, které se vzájemně posouvají. Všimněme si vyšrafované vrstvy. Vrstva nad ní je rychlejší a smykovým napětím se snaží vytknutou vrstvou urychlit. Vrstva pod ní je pomalejší a vytknutou vrstvu napětím τ zpomaluje.

Podle Newtona se smykové napětí τ vypočte podle vztahu (2.6.1) nebo (2.6.2)

$$\tau = \eta \frac{\partial w_x}{\partial y} \text{ u laminárního proudění} \quad (2.6.1)$$

$$\tau = \eta_T \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \text{ u turbulentního proudění} \quad (2.6.2)$$

η je dynamická vazkost laminárního proudění \equiv molekulární vazkost

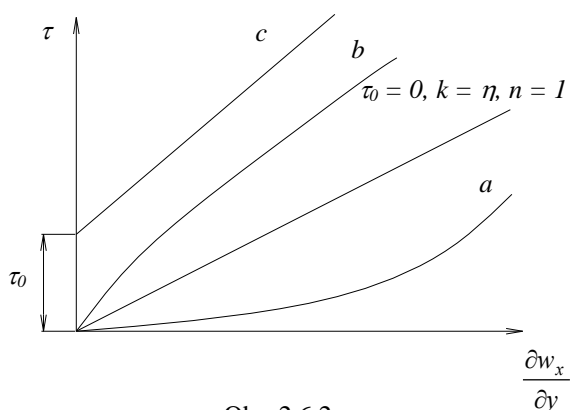
η_T je dynamická vazkost turbulentního proudění \equiv molární vazkost

\bar{w}_x je v čase ustředněná rychlost turbulentního proudění, protože skutečná rychlost w_x neustále nahodile kolísá

$$\left(\bar{w}_x = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} w_x dt \right)$$

Mezi newtonské tekutiny patří všechny běžné plyny (vzduch, vodní pára apod.) a kapaliny (voda, benzín atd.).

- Neneutonské tekutiny



Obr. 2.6.2

Obecný, tj. společný výraz pro smykové napětí všech newtonských a neneutonských tekutin je

$$\tau = \tau_0 + k \cdot \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^n \quad (2.6.3)$$

Je zřejmé, že u newtonské tekutiny je $\tau_0 = 0$, $k = \eta$, $n = 1$. V sousedním diagramu pro τ tomu odpovídá přímka procházející počátkem. Ostatní čáry v diagramu patří různým druhům neneutonských tekutin, po pravdě řečeno jsou to vesměs speciální kapaliny.

a) Dilatantní kapaliny, patří ke křivce a, mají: $\tau_0 = 0$, $n > 1$

Jsou to nejrůznější suspenze, např. voda + písek

b) Pseudoplastické kapaliny patří křivce b, mají: $\tau_0 = 0$, $n < 1$

Jsou to makromolekulární kapaliny.

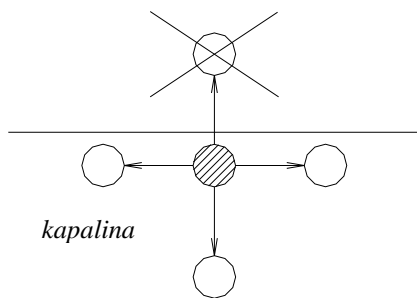
c) Binghamské kapaliny, křivka c, mají: $\tau_0 > 0$, $k \neq \eta$, $n = 1$

Patří sem např. zubní pasta, med, splašky, barvy.

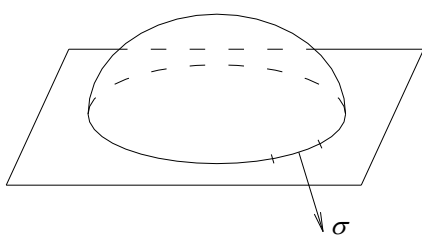
V dalším se budeme zabývat výhradně newtonskými tekutinami. Otázku jejich vazkosti a smykového napětí probereme později podrobně.

2.7 Povrchové napětí

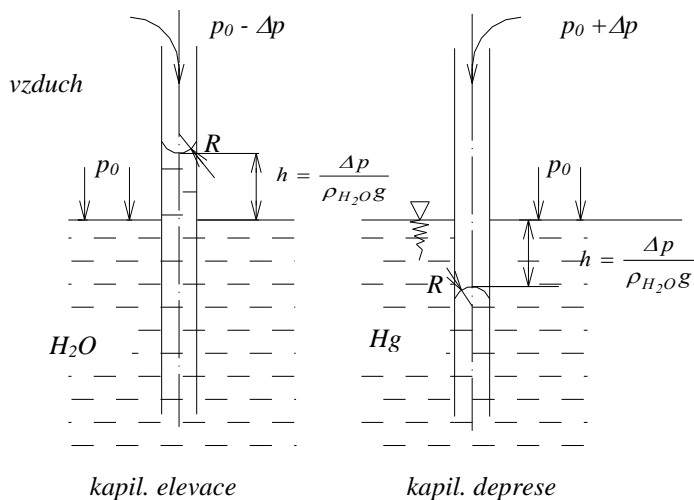
Povrchové napětí vzniká na rozhraní 2 různých látek nebo ve styčné ploše 2 fází téže látky. Má původ v molekulární stavbě látek. Mezi molekulami působí přitažlivé síly (kohezní), při velkém stlačení odpudivé (adhezní). Uvažujme běžnější první případ. Je-li molekula uvnitř látky, kohezní síly od okolních molekul působí ze všech stran, vzájemně se ruší a molekula je v rovnováze. Jestliže molekula kapalně fáze je při rozhraní s jinou látkou, např. s plynem majícím řídké pole molekul, přitažlivá síla z této strany chybí a molekula je vtahována do vnitřku kapaliny. Výsledný efekt vtahování povrchových molekul se jeví tak, jako by na povrchu kapaliny byla



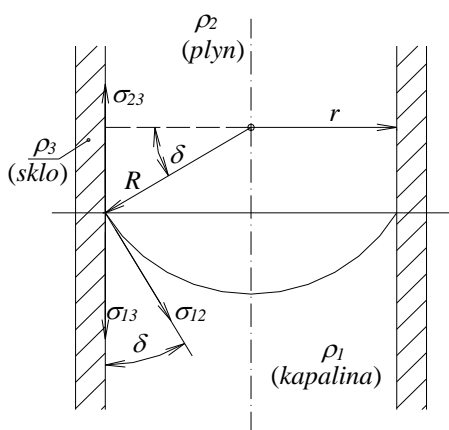
Obr. 2.7.1



Obr. 2.7.2



Obr. 2.7.3



Obr. 2.7.4

blána, za níž je taháno povrchovým napětím σ tak, aby kapalina vytvořila kouli. Ta se vyznačuje nejmenším poměrem povrchu ku objemu. Kulový tvar mají kapky vody tvořící mlhu, kapičky rozlité rtuti aj.

Představme si, že povrchovou blánu protneme rovinou a spodní část pod rovinou odstraníme. Aby se napjatost zbylého vrchlíku nezměnila, musíme vliv odstraněné části nahradit napětím σ , které působí tečně k bláně a kolmo k průsečnici.

$$\sigma = \frac{dF}{dl} [N/m] \quad (2.7.1)$$

Povrchové napětí σ je tabulková hodnota daná dvojicí látek, které jsou v kontaktu. Např.

$$\text{rtuť - vzduch: } \sigma = 0,461 \text{ N/m}$$

$$\text{voda - vzduch: } \sigma = 0,073 \text{ N/m}$$

Povrchové napětí způsobuje v tenkých trubicích kapilární elevaci nebo kapilární depresi. U kapalin s vypuklým meniskem vzniká kapilární deprese, tj. nižší sloupec kapaliny, u kapalin s vydutým meniskem vzniká vyšší sloupec, tj. kapilární elevace. Efektivně je to jako kdyby na vypuklý menisek působil vyšší tlak, o jakési Δp , než proniká z okolí do ústí trubice, a při elevaci naopak nižší tlak. Fiktivní přírůstek $\Delta p = 2\sigma/R$, což dokážeme o něco níže.

O tom jaký bude menisek, tj. jaký bude jeho krajový úhel δ , rozhodují povrchová napětí σ na všech třech rozhraních $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ viz obr. 2.7.4. Na obrázku je zvětšené místo styku menisku se stěnou, kde jsou v kontaktu kapalina hustoty ρ_1 , plyn o ρ_2 a pevná stěna o ρ_3 . Poloměr menisku je R , poloměr trubice r . Uděláme rovnováhu napětí v dotykovém bodě a z ní určíme $\cos \delta$. Kosinus by se měl pohybovat mezi -1 a $+1$. Napětí, která hodnotu kosinu určují, však nic neví o tom, že kosinus musí ležet v tomto pásmu a dají v určitých případech kosinus větší než 1 nebo menší než -1 .

$$\sigma_{13} + \sigma_{12} \cos \delta = \sigma_{23} \rightarrow \cos \delta = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{13}}{\sigma_{12}} \quad (2.7.2)$$

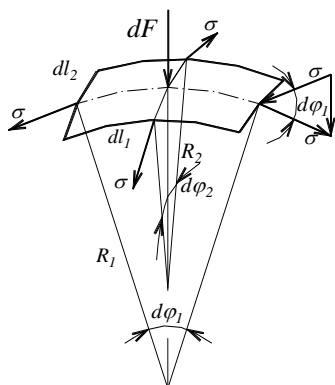
a) $\cos \delta = (0,1) \rightarrow \delta = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$... menisek je vydutý

b) $\cos \delta = (-1,0) \rightarrow \delta = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$... menisek je vypuklý

c) $\cos \delta \geq 1$... kapalina je dobře smáčivá, vzlíná po stěně, kde vytváří tenkou vrstvičku (film) \equiv chování dobrého maziva

d) $\cos \delta \leq -1$... kapalina nesmáčí stěnu, mezi ní a stěnou je vrstva plynu, která může působit jako izolant, např. u roztaveného kovu.

Výpočet Δp na rozhraní plynné a kapalné fáze



Obr. 2.7.5

Vytkneme element povrchové blány o stranách dl_1, dl_2 a určíme sílu dF na ni působící

$$dF = \Delta p dl_1 dl_2 = \sigma dl_2 d\varphi_1 + \sigma dl_1 d\varphi_2 \quad | : dl_1 dl_2 \quad (2.7.3)$$

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{d\varphi_1}{dl_1} + \frac{d\varphi_2}{dl_2} \right) = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.7.4)$$

$$\text{pro } R_1 = R_2 = R: \quad \Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{2\sigma}{R} \quad (2.7.5)$$

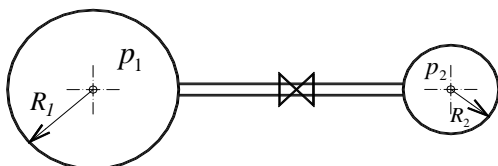
Pokud bychom chtěli stanovit výšku h kapaliny v kapiláře při elevaci na obr. 2.7.3, vyjdeme z hydrostatického tlaku sloupce:

$$h = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = \frac{2\sigma_{12}}{\rho g R} = \frac{2\sigma_{12} \cos \delta}{\rho g r} = \frac{2\sigma_{12}}{\rho g r} \frac{\sigma_{23} - \sigma_{13}}{\sigma_{12}} \quad (2.7.6)$$

Nejlépe měřitelnou veličinou je h . Poslední vztahy ukazují, že z h určíme snadno buď R nebo σ .

Příklad

Co se stane, když otevřeme ventil mezi 2 nesterjné velkými bublinami o poloměru R_1, R_2 v kapalině o tlaku p_0 .



Obr. 2.7.6

v kapalině o tlaku p_0 .

Platí: $p_1 = p_0 - \frac{2\sigma}{R_1}$, $p_2 = p_0 - \frac{2\sigma}{R_2}$, ježto blána je

vydutá, protože $R_1 > R_2 \rightarrow p_1 > p_2$

Plyn bude proudit z větší bubliny do menší až se obě bubliny tlakově a velikostně vyrovnají.

2.8 Rozdělení sil

V mechanice dělíme působící síly na hmotnostní a povrchové

Hmotnostní síly: Jsou dané součinem hmotnost x setrvačné zrychlení $= ma$. Patří sem např. váha tělesa, odstředivá síla, setrvačná síla od daného zrychlení a , Coriolisova síla. Pokud je hustota tělesa konstantní, pak hmotnostní síla je úměrná objemu. Pak se těmito silám říká objemové.

Povrchové síly: Jsou dané součinem plocha x napětí. Napětí lze vždy rozložit do normální a tečné složky vzhledem k ploše. Dostáváme tak síly tlakové $S \cdot p$ a síly třecí $S \cdot \tau$.

3. Matematika v mechanice tekutin

S ohledem na to, že v době studia mechaniky tekutin nebývají odpředneseny např. integrální věty, vlastnosti funkcí o více proměnných apod., uvedu určitý stručný přehled o dále používaném matematickém aparátu a jeho symbolice (bez hlubšího výkladu a důkazů). Proudění je vždy prostorový jev obecně se měnící s časem, který je popisován parciálními diferenciálními rovnicemi. Jejich zápis budeme dělat zpravidla tenzorový, popř. pomocí operátorů $\vec{\nabla}, \Delta$.

3.1 Parciální a totální derivace

Nejčastější veličinou je rychlost w , která je funkcí souřadnic x, y, z a času t , viz (3.1.1). Parciální derivaci např. $\partial w / \partial x$ dostanu tak, že w derivuji podle x , přičemž y, z, t považuji za konstanty. Obdobně při tvorbě $\partial w / \partial y$ považuji x, z, t za konstanty a tak dále, jak naznačeno na řádce (3.1.2). Totální diferenciál rychlosti dw je nadefinován na řádce (3.1.3). Vydělím-li dw časem dt , dostaneme zrychlení (3.1.4) a tuto rovnici můžeme zapsat tenzorově pomocí sčítacího indexu k , viz (3.1.5), který je totožný s rozpisem (3.1.4). Podle vzoru (3.1.5) je zapsaná totální derivace dp/dt na řádce (3.1.6).

$$w = w(x, y, z, t) \quad (3.1.1)$$

$$\text{at} \quad w = x^3 + 2xyt - z^2$$

$$\text{potom} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2 + 2yt, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2xt, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -2z, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 2xy \quad (3.1.2)$$

$$\text{totální diferenciál:} \quad dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial t} dt \quad | : dt \quad (3.1.3)$$

$$\text{totální derivace (zde zrychlení)} \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot w_x + \frac{\partial w}{\partial y} w_y + \frac{\partial w}{\partial z} w_z + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.1.4)$$

$$\text{protože} \quad w_x = \frac{dx}{dt}, \quad w_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{atd.}$$

$$\text{tenzorový zápis zrychlení} \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial k} w_k + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.1.5)$$

$$\text{obdobně} \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial k} w_k + \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.1.6)$$

Poslední zápis říká: dej za k x , přičti k tomuto členu člen y , k nim člen se z .

3.2 Skaláry a vektory

Skalár φ je veličina, která má jen velikost, kdežto vektor \vec{a} má velikost a směr. Vektor můžeme rozložit do složek pomocí jednotkových vektorů $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ve směru souřadných os a skalárních složek a_x, a_y, a_z dle (3.2.2). Vektory se násobí buď skalárně nebo vektorově. Skalární součiny jednotkových vektorů jsou na řádce (3.2.3), vektorové součiny jednotkových vektorů na ř. (3.2.4). Těchto pravidel pro násobení je použito pro násobení vektorů \vec{a}, \vec{b} rozepsaných do složek, viz (3.2.5) až (3.2.10).

$$\text{skalár:} \quad \varphi \quad (3.2.1)$$

$$\text{vektor:} \quad \vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z \quad (3.2.2)$$

$$\text{skalár. součin jednotk. vektorů:} \quad \vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\text{vektorový součin jedn. vektorů:} \quad \vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \text{atd.} \quad (3.2.4)$$

$$\text{skalár. součin} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z) \cdot (\vec{i}b_x + \vec{j}b_y + \vec{k}b_z) \quad (3.2.5)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_k b_k \quad (3.2.6)$$

$$\text{vektor. součin} \quad \vec{a} \times \vec{b} = (\vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z) \times (\vec{i}b_x + \vec{j}b_y + \vec{k}b_z) \quad (3.2.7)$$

$$= \vec{k}a_x b_y - \vec{j}a_x b_z - \vec{k}a_y b_x + \vec{i}a_y b_z - \vec{j}a_z b_x - \vec{i}a_z b_y \quad (3.2.8)$$

$$= \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z + a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) \quad (3.2.9)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (3.2.10)$$

3.3 Gradient, divergence, rotace

Na řádku (3.3.1) je definován Hamiltonův operátor $\vec{\nabla}$, což je formální vektor. Skalární součin dvou operátorů $\vec{\nabla}$ je Laplaceův operátor Δ , je to samozřejmě skalár. Gradient skaláru φ je vektor udávající směr a velikost největší změny skalárního pole φ . Dá se vyjádřit pomocí $\vec{\nabla}$, viz (3.3.5). Na řádku (3.3.6) a (3.3.7) máme divergenci součinu skalár krát vektor. Rotor vektoru \vec{a} je opět vektor, který udává dvojnásobek úhlové rychlosti otáčení vektorového pole \vec{a} , je na řádcích (3.3.8) až (3.3.9)

$$\text{Hamiltonův operátor nabla:} \quad \vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.3.1)$$

$$\text{Laplaceův operátor delta:} \quad \Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.3.2)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial k^2} \quad (3.3.3)$$

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \varphi = \vec{\nabla} \varphi \quad (3.3.4)$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z) = \vec{\nabla} \vec{a} = \frac{\partial a_k}{\partial k} \quad (3.3.5)$$

$$\text{div}(\varphi \vec{a}) = \frac{\partial(\varphi a_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi a_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi a_z)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} a_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} a_z + \varphi \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = \quad (3.3.6)$$

$$= \vec{\nabla} \varphi \vec{a} + \varphi \vec{\nabla} \vec{a} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{a} + \varphi \cdot \text{div } \vec{a} = \frac{\partial(\varphi a_k)}{\partial k} \quad (3.3.7)$$

$$\text{rot } \vec{a} = \vec{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \quad (3.3.8)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad (3.3.9)$$

3.4 Integrální věty

Stokesova věta na řádku (3.4.1) převádí křivkový integrál ze skalárního součinu $\vec{a}d\vec{l}$, kde $d\vec{l}$ je diferenciální úsek křivky, na plošný integrál, v němž se $rot\vec{a}$ skalárně násobí diferenciálem plochy $d\vec{S}$ a tyto součiny se integrují po ploše uzavřené křivkou. Greenova věta (3.4.2) převádí plošný integrál z $\varphi d\vec{S}$, kde $d\vec{S}$ je elementární ploška povrchu uzavřeného objemu V , na objemový integrál z $grad\varphi dV$, kde dV je element objemu V . Věta Gaussova - Ostrogradského (3.4.3) převádí rovněž plošný integrál na objemový, když integrand na jedné straně je skalární součin $\vec{a}d\vec{S}$ a na druhé $div\vec{a} dV$.

$$\text{Stokesova věta} \quad \oint_S \vec{a} d\vec{l} = \int_S rot\vec{a} d\vec{S} \quad (3.4.1)$$

$$\text{Greenova věta} \quad \int_S \varphi d\vec{S} = \int_V grad\varphi dV \quad (3.4.2)$$

$$\text{Gaussova - Ostrogradského věta} \quad \int_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V div\vec{a} dV \quad (3.4.3)$$

3.5 Tenzor zrychlení

Zrychlení proudící tekutiny jsme již uvedli vztahem (3.1.5), který má na pravé straně tzv. konvencionální a lokální složku, tj. setrvačné a místní zrychlení. Rychlost w je však vektor \vec{w} . Jestliže vektor \vec{w} dosadíme do (3.1.5), dostaneme (3.5.1), v níž \vec{w} rozepíšeme do složek w_x, w_y, w_z , viz (3.5.2). Porovnáme-li členy u \vec{i} na levé a pravé straně, dostaneme první rovnici soustavy (3.5.3). Podobně porovnáme členy u \vec{j} a posléze u \vec{k} , abychom dostali 2. a 3. rovnici soustavy. Označíme-li řádky indexem i a sloupce k , můžeme soustavu zapsat podle (3.5.4)

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\partial\vec{w}}{\partial k} w_k + \frac{\partial\vec{w}}{\partial t} \quad (3.5.1)$$

$$\frac{d(\vec{i}w_x + \vec{j}w_y + \vec{k}w_z)}{dt} = \frac{\partial(\vec{i}w_x + \vec{j}w_y + \vec{k}w_z)}{\partial k} w_k + \frac{\partial(\vec{i}w_x + \vec{j}w_y + \vec{k}w_z)}{\partial t} \quad (3.5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw_x}{dt} &= \frac{\partial w_x}{\partial k} w_k + \frac{\partial w_x}{\partial t} \\ \frac{dw_y}{dt} &= \frac{\partial w_y}{\partial k} w_k + \frac{\partial w_y}{\partial t} \\ \frac{dw_z}{dt} &= \frac{\partial w_z}{\partial k} w_k + \frac{\partial w_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \text{tenzor zrychlení} \quad (3.5.3)$$

$$\text{celkové zrychlení} \quad \frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial w_i}{\partial k} w_k + \frac{\partial w_i}{\partial t} \text{ (setrvačné + místní zrychlení)} \quad (3.5.4)$$

4. Statika tekutin

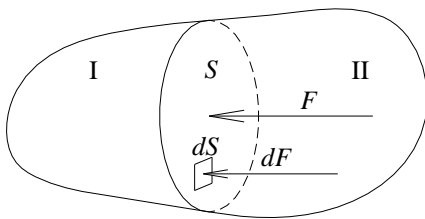
Statika je nauka o rovnováze tekutin v klidu. Klid je však vždy jen relativní, tj. je to klid vzhledem ke stěnam nádoby, v níž se tekutina nachází, zatím co nádoba se pohybuje ve vnějším prostředí (např. voda

v rybníce je v klidu vůči břehům, ale je přítom na rotující zeměkouli). Pohyb nádoby ovlivňuje chování tekutiny prostřednictvím setrvačných zrychlení (Země ovlivňuje rybniční vodu gravitačním zrychlením).

Zákony statiky platí pro všechny tekutiny bez ohledu na jejich vazkost, protože vnitřní tření se může projevit teprve při pohybu. Kapalina v klidu nepřenáší síly tečné. Přenáší jen síly kolmé, a to ty, které působí tlakově. Tahové síly v tekutině neexistují.

4.1 Tlak v tekutině

- První vlastností tlaku je, že vždy působí kolmo na plochu, kterou vložíme do tekutiny.



Obr. 4.1.1

Důkaz: Z tekutiny si vybereme pro naši potřebu objem, který je v relativní rovnováze. Objem rozdělíme myšleným řezem na dvě části a část II odstraníme. Musíme však zároveň nahradit její účinek na část I silou F , která je integrálem elementárních sil dF . Síla dF vyvozuje místní tlak $p = dF/dS$ a síla F střední tlak v řezu S , $p_S = F/S$.

Síla F u kapaliny v klidu a tedy i jí vyvozený tlak musí působit kolmo k ploše řezu. Kdyby nepůsobily, mohli bychom je rozložit na 2 složky, a to jednu kolmou k řezu, druhou ležící v řezu. Tekutina v klidu není však schopna odporovat posuvu, tato složka by porušila rovnováhu a vyvolala by proudění.

- Druhou základní vlastností tlaku je, že v daném místě nezávisí na směru plochy, na kterou působí.

Důkaz: Uvnitř tekutiny vytkneme elementární čtyřstěn. Působí na něj síly hmotnostní od setrvačných zrychlení R_x, R_y, R_z a síly povrchové od tlaků p_x, p_y, p_z a p_n . Uděláme rovnováhu sil ve směru x :

$$p_x \frac{dydz}{2} - p_n dS_n \cos \alpha_x + \underbrace{\frac{1}{6} dx dy dz \cdot \rho R_x}_0 = 0 \quad (4.1.1)$$

Poslední člen má o jeden diferenciál více než zbylé dva a je tedy zanedbatelný. dS_x je x -ovým průmětem dS_n .

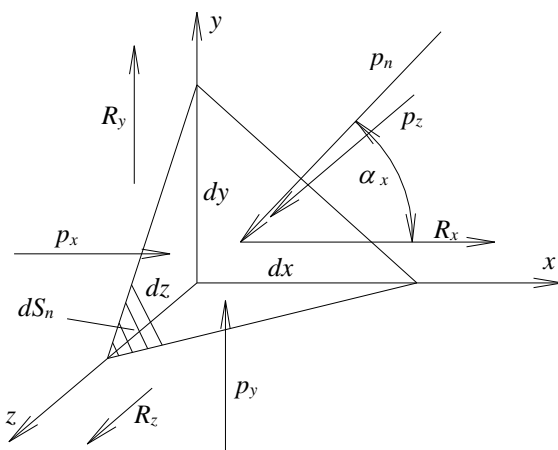
$$p_x dS_x - p_n dS_x = 0 \rightarrow p_x = p_n = p \quad (4.1.2)$$

Z analogických rovnováh ve zbylých směrech plyne

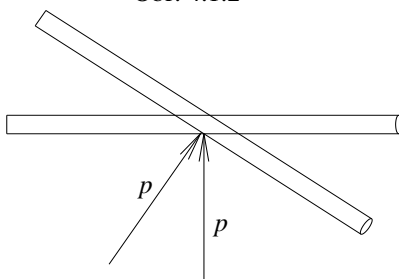
$$p_x = p_y = p_z = p_n = p$$

Čili tlak v daném místě je jen jeden, nemá složky, nemá směr, má jen velikost, je to tedy **skalár**.

Snad lepší důkaz, že tlak nemá směr, podá v jednom bodě tekutiny se stupňovitě otáčející deska. Tlak v každé poloze působí na desku kolmo. Jestliže si desku odmyslíme, máme klidnou tekutinu, ve které se tlak otáčí, nemá stálý směr, není to vektor, ale skalár.

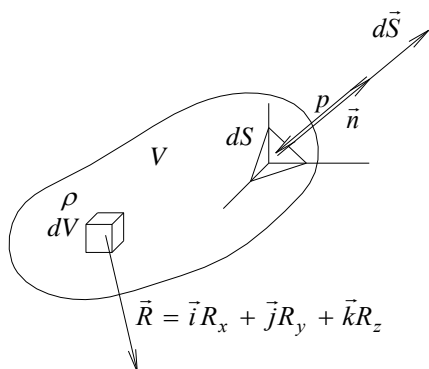


Obr. 4.1.2



Obr. 4.1.3

4.2 Eulerova rovnice statiky tekutin



Obr. 4.2.1

V tekutině vytkneme kus její hmotnosti o objemu V . Na povrchu S zvolíme elementární plošku $d\vec{S}$, na níž okolní tekutina působí tlakem p . Vektor $d\vec{S}$ můžeme vynést ve směru normály plošky. Uvnitř objemu V zvolíme elementární objem dV . Tekutina má v tomto místě hustotu ρ a setrvačné zrychlení \vec{R} . Hmotnostní síla od \vec{R} a povrchová síla od tlaku p musí být u tekutiny v klidu v rovnováze dle (4.2.1). Pomocí Greenovy věty převedeme plošný integrál na objemový. V rovnici (4.2.2) jsou oba integrály objemové, můžeme je tedy sečíst. Protože objem V byl vybrán libovolně, musí být nulový i integrand a dostáváme Eulerovu rovnici statiky (4.2.3).

$$-\int_S p d\vec{S} + \int_V \rho \vec{R} dV = 0 \quad (4.2.1)$$

$$-\int_V \text{grad} p dV + \int_V \rho \vec{R} dV = 0 \quad \int_V (-\text{grad} p + \rho \vec{R}) dV = 0 \quad (4.2.2)$$

$$\text{Eulerova rovnice statiky} \quad -\text{grad} p + \rho \vec{R} = 0 \quad (4.2.3)$$

Eulerova rov. (4.2.3) je zvláštním případem obecnější Eulerovy rovnice pro proudění nevazké tekutiny, kterou se budeme zabývat v dynamice tekutin. Pro praktické použití Eulerovu rovnici převedeme na tzv. **rovnici tlakovou**. Postup je následující: \vec{R} a $\text{grad} p$ rozvedeme do složek (4.2.4), porovnáme členy u \vec{i} , čímž vznikne první rovnice soustavy (4.2.5), porovnáním členů u \vec{j} dostaneme druhou a podobně 3. rov. soustavy. První rovnici vynásobíme dx druhou dy , třetí dz a sečteme. Součet tlakových členů je totální diferenciál dp , levá strana výsledné tlakové rovnice (4.2.7). Po pravé straně je komentovaný proces udělán v tenzorovém zápisu.

$$-\left(\vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -\rho (\vec{i} R_x + \vec{j} R_y + \vec{k} R_z) \quad (4.2.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho R_x \quad | \cdot dx$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho R_y \quad | \cdot dy \quad \frac{\partial p}{\partial i} = \rho R_i \quad | \cdot di \quad (4.2.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho R_z \quad | \cdot dz$$

$$\Sigma : \quad \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho (R_x dx + R_y dy + R_z dz) \quad \frac{\partial p}{\partial k} \cdot dk = \rho R_k dk \quad (4.2.6)$$

$$\text{tlaková rovnice:} \quad dp = \rho (R_x dx + R_y dy + R_z dz) \quad dp = \rho R_k dk \quad (4.2.7)$$

Tlakovou rovnici (4.2.7) používáme k výpočtu tlaku v libovolném místě tekutiny v relativním klidu. V takové tekutině existují plochy o různém konstantním tlaku, tzv. tlakové hladiny. Protože v každém bodě prostoru vyplněném tekutinou je jediný tlak, prochází jím jediná tlaková hladina, tlakové hladiny se nemohou protínat. Rovnici tlakové hladiny dostaneme z tlakové rovnice (4.2.7): položíme $p = \text{konst}$, tj. $dp = 0$, a protože $\rho \neq 0$, zbyde

$$\text{rovnice tlakové hladiny} \quad R_x dx + R_y dy + R_z dz = 0, \quad \text{stručně} \quad R_k dk = 0 \quad (4.2.8)$$

- Potenciální vyjádření tlakové rovnice

Tlaková rovnice $dp = \rho R_k dk$ má na levé straně totální diferenciál, tudíž na pravé straně musí být rovněž totální diferenciál. Označíme jej dU , takže tlakovou rovnici můžeme zapsat buď

$$dp = \rho R_k dk \quad \text{nebo} \quad dp = \rho dU \quad (4.2.9)$$

kde $U = U(x, y, z)$ je potenciální funkce, tj. funkce pouze prostorových souřadnic, jejíž totální diferenciál je (4.2.10). Porovnáním obou vyjádření rov. (4.2.9) dostaneme podmínky (4.2.11), které musí potenciální funkce splňovat v jednotlivých směrech.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \frac{\partial U}{\partial k} dk \quad (4.2.10)$$

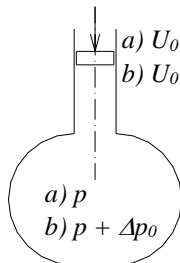
$$R_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad R_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \text{tj.} \quad R_i = \frac{\partial U}{\partial i} \quad (4.2.11)$$

Rovnice tlakové hladiny v potenciálním tvaru ($p = konst, dp = 0, \rho \neq 0$) je

$$dU = 0, \quad \text{čili} \quad U = konst \quad (4.2.12)$$

4.3 Pascalův zákon

Uvažujme nádobu naplněnou kapalinou, do níž je zaústěno potrubí s pístem. V počátečním stavu a) je v místě pístu tlak p_0 a potenciál U_0 . Platí rovnice (4.2.9), kterou pro náš případ zintegrujeme při $\rho = konst$, a to bez mezí, viz (4.3.2). Integrační konstantu C stanovíme z podmínky (4.3.3) v místě pístu. Po zpětním dosazení C do (4.3.2) obdržíme výsledný vztah pro výpočet tlaku p (4.3.4).



Obr. 4.3

$$dp = \rho dU \quad (4.2.9)$$

$$p = \int \rho dU + C \quad (4.3.1)$$

$$\text{pro } \rho \neq 0 \quad p = \rho U + C \quad (4.3.2)$$

C určíme z okrajové podmínky a): kde $p = p_0$, je $U = U_0$

$$p_0 = \rho U_0 + C \rightarrow C = p_0 - \rho U_0 \quad (4.3.3)$$

$$p = \rho(U - U_0) + p_0 \quad (4.3.4)$$

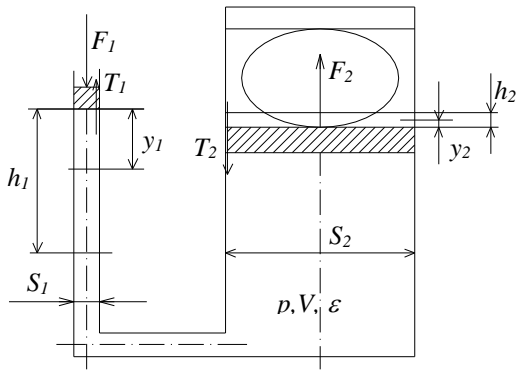
Jestliže zvýšením síly na píst zvýšíme tlak kapaliny ve styku s pístem o Δp_0 , pak vzhledem k nestlačitelnost či nepatrné stlačitelnosti kapaliny se píst nepohne a potenciál U_0 tu bude zachován, platí podmínky b). Integrační konstanta C bude nyní (4.3.5) a tlak v libovolném bodě (4.3.6):

$$C = p_0 + \Delta p_0 - \rho U_0 \quad (4.3.5)$$

$$p = \rho(U - U_0) + p_0 + \Delta p_0 \quad (4.3.6)$$

Poslední úvaha vysvětluje Pascalův zákon: změnou tlaku v jednom místě kapaliny o Δp_0 se tlak změní o tutéž hodnotu ve všech místech prostoru vyplněného kapalinou. Dosažený efekt formuloval Pascal větou: Tlak kapaliny se šíří v klidné tekutině ve všech směrech stejně. Praktické využití Pascalova zákona je v hydraulických strojích a zařízeních, v nichž se na principu Pascalova zákona zesilují nebo i zeslabují přenášené síly.

4.4 Hydraulický lis



Obr. 4.4

Znalosti Pascalova zákona využil Bramah v 18. století k sestavení prvního hydraulického lisu. Dle obr.4.4 se tlačí silou F_1 na malý píst o průřezu S_1 . Vybudí se zde tlak p , který pak v místě velkého pístu dá sílu $F_2 = S_2 p$, obvykle mnohonásobně větší než F_1 . Kdybychom zanedbali stlačitelnost kapaliny, pak zdvihový objem malého a velkého pístu budou stejné, tj. $S_1 h_1 = S_2 h_2$.

Ve skutečnosti, zvláště při velkých tlacích, bude $S_1 h_1 > S_2 h_2$ o stlačený objem. Pohyb pístů je natolik pomalý, že lze setrvačné síly zanedbat. Zpravidla nelze zanedbat odpory tření T_1, T_2 , působící proti pohybu malého a velkého pístu.

U lisů se sledují 2 charakteristické hodnoty. Jednou je hydraulický převod sil jako poměr užitečné síly ku síle přivedené a druhou mechanická účinnost η jako poměr užitečné práce ku práci přivedené:

$$i = \frac{\text{užitečná síla}}{\text{přivedená síla}} = \frac{p \cdot S_2 - T_2}{p \cdot S_1 + T_1} \quad (4.4.1)$$

$$\eta = \frac{\text{užitečná práce}}{\text{přivedená práce}} = \frac{\int_0^{h_2} F_2 dy_2}{\int_0^{h_1} F_1 dy_1} \quad (4.4.2)$$

Mějme hydraulický lis, který bude stlačovat těleso kladoucí odpor úměrný konstantou K kvadrátu zdvihu y_2 , tj. $F_2 = K \cdot y_2^2$. Respektujme třecí odpory pístů $T_1 = konst, T_2 = konst$, uvažujme stlačitelnost objemu V kapaliny o součiniteli stlačitelnosti ε , a určíme k požadovanému zdvihu h_2 potřebnou sílu F_1 , zdvih h_1 , hydraulický převod i a účinnost η .

Z rovnosti tlaků u malého a velkého pístu dostaneme sílu $F_1(y_2)$ dle (4.4.3). Zdvihové objemy pístů s vlivem stlačení dávají rovnost (4.4.4), z níž určíme $y_1(y_2)$ a dy_1 . Dosazením F_1 a dy_1 do definičních vztahů pro i a η dostaneme požadované hodnoty.

$$p = \frac{F_1 - T_1}{S_1} = \frac{F_2 + T_2}{S_2} \rightarrow F_1 = \frac{S_1}{S_2} (F_2 + T_2) + T_1 = \frac{S_1}{S_2} (K y_2^2 + T_2) + T_1 \quad (4.4.3)$$

$$y_1 S_1 = y_2 S_2 + \Delta V = y_2 S_2 + \varepsilon V p \quad (4.4.4)$$

$$y_1 = \frac{1}{S_1} \left(y_2 S_2 + \varepsilon V \frac{F_2 + T_2}{S_2} \right) = \frac{S_2}{S_1} \left(y_2 + \frac{\varepsilon V}{S_2^2} (K y_2^2 + T_2) \right) \quad (4.4.5)$$

$$dy_1 = \frac{S_2}{S_1} \left(dy_2 + \frac{\varepsilon V}{S_2^2} K 2 y_2 dy_2 \right) = \frac{S_2}{S_1} \left(1 + \frac{2 \varepsilon V K}{S_2^2} y_2 \right) dy_2 \quad (4.4.6)$$

$$\text{dle (4.4.3)} \quad F_1 = \frac{S_1}{S_2} (K h_2^2 + T_2) + T_1 \quad (4.4.7)$$

dle (4.4.5)
$$h_1 = \frac{S_2}{S_1} \left(h_2 + \frac{\varepsilon V}{S_2^2} (Kh_2^2 + T_2) \right) \quad (4.4.8)$$

$$i = \frac{F_2}{F_1} = \frac{Ky_2^2}{\frac{S_1}{S_2} (Ky_2^2 + T_2) + T_1} = \frac{Kh_2^2}{\frac{S_1}{S_2} (Kh_2^2 + T_2) + T_1} \quad (4.4.9)$$

$$\eta = \frac{\int_0^{h_2} Ky_2^2 dy_2}{\int_0^{h_2} \left(\frac{S_1}{S_2} (Ky_2^2 + T_2) + T_1 \right) \frac{S_2}{S_1} \left(1 + \frac{2\varepsilon VKy_2}{S_2^2} \right) dy_2} \quad (4.4.10)$$

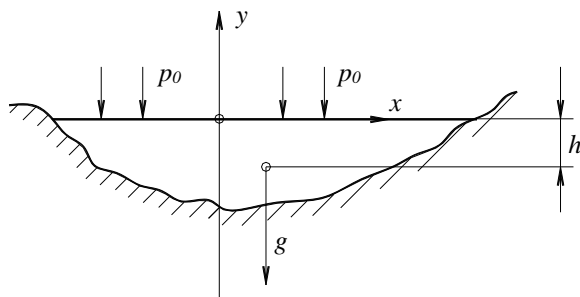
$$\eta = \frac{\frac{1}{3} Kh_2^3}{\left(\frac{K}{3} h_2^2 + T_2 + T_1 \frac{S_2}{S_1} + \frac{\varepsilon VK}{S_2^2} \left(\frac{K}{2} h_2^2 + T_2 + T_1 \frac{S_1}{S_2} \right) h_2 \right) h_2} \quad (4.4.11)$$

4.5 Kapalina v gravitačním poli

V tomto případě na kapalinu ze všech možných setrvačných zrychlení má vliv pouze gravitační zrychlení. Jeho setrvačná složka působí na Zemi svisele dolů. Budeme řešit rozložení tlaku a tlakové hladiny nejprve v nestlačitelné kapalině ($\rho = konst$), potom ve stlačitelné kapalině.

- Nestlačitelná kapalina

Příkladem může být voda v rybníce. Podle obr. 4.5.1 zvolíme souřadný systém, který má počátek na volné hladině, osy x, z v ní leží a osa y směřuje vzhůru. V hloubce $h = -y$ zvolíme částici vody a nakreslíme gravitační zrychlení, které na ni působí. Budeme nejprve řešit tlakovou rovnici (4.2.7).



Obr. 4.5.1

$$dp = \rho R_k dk \quad (4.2.7)$$

$$R_x = 0, R_y = -g, R_z = 0 \quad * \quad (4.5.1)$$

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dy \quad (4.5.2)$$

$$\text{pro } \rho = konst : p = -\rho g y + C \quad (4.5.3)$$

Integrační konstantu určíme z podmínky, že na volné hladině, tj. v místě $y = 0$ působí atmosférický

tlak p_0 :

$$p_0 = -\rho \cdot g \cdot 0 + C \rightarrow C = p_0 \quad (4.5.4)$$

$$p = -\rho g y + p_0 = \rho g h + p_0 \quad (4.5.5)$$

U tekutiny v gravitačním poli roste tlak lineárně s hloubkou, z počátečního tlaku p_0 na volné hladině. Tlakové plochy vyšetříme z rovnice tlakové hladiny (4.2.8), opět při $R_x = R_z = 0, R_y = -g$.

$$R_k dk = 0 \quad (4.2.8)$$

* Znaménko minus u g je dané tím, že setrvačné gravitační zrychlení působí v záporném směru osy y .

$$-gdy = 0 \quad (4.5.6)$$

$$-gy = C \quad (4.5.7)$$

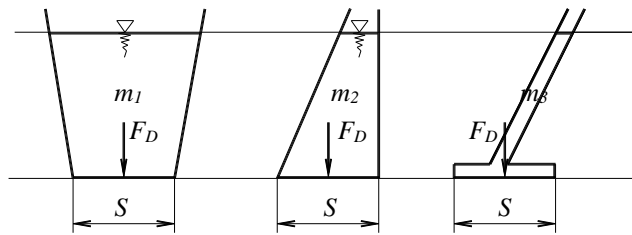
$-gy = C$ popisuje soustavu vodorovných rovin. Pokud z nich chceme vyčlenit jednu jedinou, konstantu C určíme pro bod (např. $-y_1$), kterým ta hladina prochází:

$$C = +gy_1 \quad (4.5.8)$$

C dosadíme do (4.5.7):

$$-gy = +gy_1 \rightarrow y = -y_1 \quad (4.5.9)$$

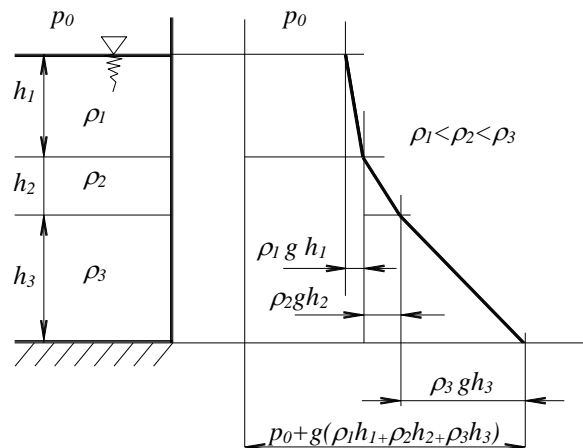
Výraz $y = -y_1$ je rovnice vodorovné roviny, která leží y_1 pod volnou hladinou vody. Při jediném a ještě konstantním setrvačném zrychlení, jakým je gravitační, vycházejí primitivní vztahy. Tentýž postup je však třeba dodržet i při více setrvačných zrychleních. V případě řešení tlaku má tlakové pole jedinou integrační konstantu, kdežto při řešení tlakových hladin má každá hladina svoji konstantu a určí se z polohy bodu, kterým má hladina procházet.



Obr. 4.5.2

Tvar nádoby nemá vliv na průběh tlaku. Máme-li tedy několik nádob o stejné velikosti dna a nalitých kapalinou do stejné výše, bude v nich na dno působit stejný tlak a stejná síla F_D . Ačkoliv je váha kapaliny mg v nádobách různá, síla na dno je stejná - výrok vyjadřuje tzv. **Pascalovo hydrostatické paradoxon**, na němž ale není opravdu nic paradoxního na rozdíl třeba od paradoxu D'Alambertova.

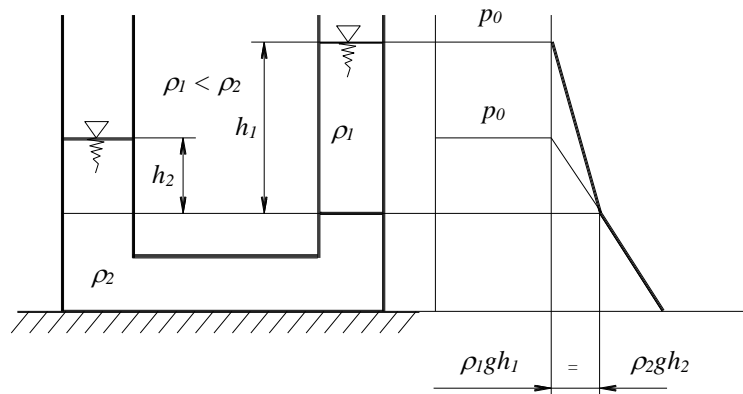
Z uvedeného též plyne, že ve spojitých nádobách má kapalina vystavená pouze gravitačnímu zrychlení volnou hladinu ve stejné výši. Samozřejmě se to týká i všech ostatních tlakových hladin. Pokud máme nemísící se kapaliny o různých hustotách $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, rozvrství se tak, že nejlehčí je nahoře, viz 2 příklady na obr. 4.5.3 a 4.5.4



Obr. 4.5.3

- Stlačitelná tekutina

U stlačitelné tekutiny platí rovněž tlaková rovnice ve tvaru (4.5.2), v níž však hustota není konstantou. Dále můžeme použít rovnici pro stlačitelnost, kterou vezmeme ve verzi (2.5.9) pro p a ρ . Z rovnic nejprve eliminujeme tlak a vypočteme hustotu $\rho(y)$. Integrační konstantu určíme z podmínky, že v poloze $y = 0$ je známá hustota ρ_0 . Poloha $y = 0$ bude většinou volná hladina kapaliny



Obr. 4.5.4

$$dp = -\rho g dy \quad (4.5.2) \qquad \frac{d\rho}{\rho} = \varepsilon dp \quad (2.5.9)$$

$$\frac{d\rho}{\varepsilon \rho} = -\rho g dy \quad (4.5.10)$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho^2} = -\int \varepsilon g dy + C \quad (4.5.11)$$

$$-\frac{1}{\rho} = -\varepsilon g y + C \quad (4.5.12)$$

$$C: \text{ pro } y=0, \rho = \rho_0 \rightarrow C = -\frac{l}{\rho_0} \quad (4.5.13)$$

$$\frac{1}{\rho} = \varepsilon g y + \frac{l}{\rho_0} = \frac{\varepsilon \rho_0 g y + l}{\rho_0} \quad (4.5.14)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{\varepsilon \rho_0 g y + l} \quad (4.5.15)$$

Nyní po dosazení $\rho(y)$ do (4.5.2) můžeme vypočítat závislost $p(y)$. Při řešení integrálu na pravé straně zavedeme substitucí z za jmenovatel zlomku. Integrujeme opět bez mezí a integrační konstantu stanovíme z podmínky, že v poloze $y=0$ známe tlak p_0 .

$$dp = -\rho g dy = \frac{-\rho_0 g dy}{\varepsilon \rho_0 g y + l} \quad (4.5.16)$$

$$\int dp = -\int \frac{\rho_0 g dy}{\varepsilon \rho_0 g y + l} + C \quad (4.5.17)$$

$$\text{substituce: } \varepsilon \rho_0 g y + l = z \rightarrow \varepsilon \rho_0 g dy = dz \quad (4.5.18)$$

$$p = -\frac{l}{\varepsilon} \int \frac{dz}{z} + C = -\frac{l}{\varepsilon} \cdot \ln z + C = -\frac{l}{\varepsilon} \ln(\varepsilon \rho_0 g y + l) + C \quad (4.5.19)$$

$$C: \text{ pro } y=0, p = p_0 \rightarrow C = p_0 \quad (4.5.20)$$

$$p = -\frac{l}{\varepsilon} \ln(\varepsilon \rho_0 g y + l) + p_0 \quad (4.5.21)$$

Podle posledního vztahu tlak s hloubkou roste, protože y má směrem dolů záporné hodnoty. Pokud řešíme rovnici tlakové hladiny, položíme $p = konst$, tj. $dp = 0$, a dostaneme (4.5.19) s nulovou levou stranou, kde je jedinou proměnnou y . Tlakové hladiny jsou tedy jako u nestlačitelné tekutiny vodorovné roviny. Chceme-li z nich tu, která prochází místem y_1 , určíme konstantu z podmínky (4.5.22) a po jejím zpětném dosazení dostaneme výsledek (4.5.23)

$$C: \text{ pro } y = y_1 \rightarrow C = +\frac{l}{\varepsilon} \ln(\varepsilon \rho_0 g y_1 + l) \quad (4.5.22)$$

$$0 = -\frac{l}{\varepsilon} \ln(\varepsilon \rho_0 g y + l) + \frac{l}{\varepsilon} \ln(\varepsilon \rho_0 g y_1 + l) \quad (4.5.23)$$

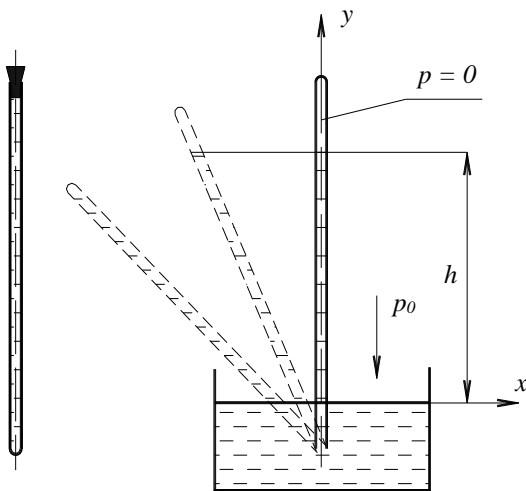
4.6 Kapalinové tlakoměry

Několik poznámek k označování tlaků:

- tlaková nula je v naprostém vakuu
- tlaky měřené od nuly jsou absolutní (p)
- tlak ovzduší je barometrický tlak (p_0) $\sim 0.1 \text{ MPa}$
- přetlak je kladný rozdíl absolutního a barometrického tlaku $p_p = p - p_0 > 0$
- podtlak je záporný rozdíl absolutního a barometrického tlaku $p_p = p - p_0 < 0$

Barometrický tlak se měří barometrem, přetlak manometrem, podtlak vakuometrem, rozdíl tlaku diferenčním tlakoměrem. V současnosti se tlaky měří především elektronickými tlakoměry, které převádějí tlakem způsobený průhyb membrány na analogový elektrický signál. Převod se dělá kapacitním (málo, je tepelně závislý), indukčním, tenzometrickým nebo pro vyšší tlaky piezoelektrickým způsobem. Všechny tyto elektrické tlakoměry se však musí oceňovat, k čemuž slouží přesnější druhy kapalinových tlakoměrů.

- Barometry



Obr. 4.6.1

Pokud bychom měli podomácku barometr vyrobít (nedoporučuji, práce s jedovatou rtuť), postupovalo by se následovně. Do skleněné trubice 1m dlouhé, na spodním konci zatavené, se až po hrdlo nalije čistá rtuť. Hrdlo se ucpe zátkou a trubice se šikmo ponoří hrdlem do nádoby se rtuť. Po uvolnění zátky začneme zatavený konec zvedat. Od určité polohy se bude rtuť z nádoby vylévat a nahoře se objeví volná hladina, nad níž je vakuum. Při dotočení trubice do svislé polohy se nemění svislá odlehlost hladin v trubici a v nádobce, což je obsahem známého Torricelliova pokusu dokazujícího, že tlakové hladiny kapaliny v gravitačním poli jsou vodorovné.

Zavedeme souřadnicový systém s počátkem na spodní hladině a s osou y totožnou s osou trubice. Pro rozložení tlaku ve rtuť platí dříve odvozený vztah (4.5.3), jehož integrační konstantu určíme z horní hladiny, kde je $p = 0$. Po zpětném dosazení konstanty do (4.5.3) obdržíme vzorec pro výpočet tlaku

v libovolném místě rtuť. Nás však zajímá barometrický tlak, který působí na volnou hladinu v nádobce, tj. v místě $y = 0$.

$$p = -\rho g y + C \quad (4.5.3)$$

$$C: p = 0 \text{ pro } y = h \rightarrow C = \rho g h \quad (4.6.1)$$

$$p = \rho g (h - y) \quad (4.6.2)$$

barometrický tlak:
$$p_0 = \rho g h \quad (4.6.3)$$

Ježto hustota rtuť se mění s teplotou a s jejím vzrůstem se rtuť roztahuje, obvykle se za ρ dává $\rho_N = 13595 \text{ kg/m}^3$ při normální teplotě $T_N = 273,16 \text{ K}$ a skutečný sloupec h se přepočítává na délku h_N , kterou by měl při T_N . Použije se při tom součinitel délkové roztažnosti rtuť ve skle $\alpha = 0,000172 \text{ K}^{-1}$.

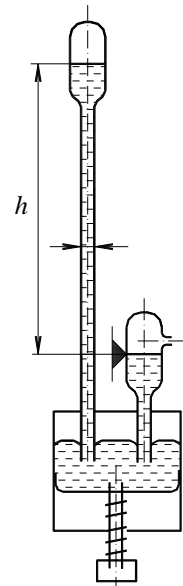
$$p_0 = \rho g h = \rho_N g h_N = \rho_N g h [1 - \alpha(T - T_N)] = 13595 \cdot g h [1 - 0,000172(T - T_N)] [Pa] \quad (4.6.4)$$

Kromě nutnosti přepočítávat výšku sloupce na teplotu by měl uvedený barometr další nečnosti:

- z nádoby se otevřenou hladinou odpařuje jedovatá rtuť
- v kapiláře se uplatňuje kapilární deprese rtuť, změřený sloupec h tedy nutno zvýšit o příslušnou opravu Δh

- při změně atmosférického tlaku se mění poloha horní a trochu i spodní hladiny, čili k určení h se musí odečíst 2 čísla

Normální barometr na obr. 4.6.2 odstraňuje citované neduhy. Odpařování rtuti do ovzduší je minimalizováno malým otvorem v baňce nad spodní hladinou. Obě kapiláry jsou rozšířené na stejný průměr, čímž je kapilární deprese jednak potlačena, jednak je stejná u obou hladin, takže se eliminuje. Pístem se při změně tlaku dotáhne spodní hladina na vyznačenou rysku a tedy h se odečítá jen nahoře.



Obr. 4.6.2

- Manometry

Kapalinových manometrů je velké množství. Uvedeme z nich jen několik, které se buď stále používají, nebo mají zajímavý princip funkce.

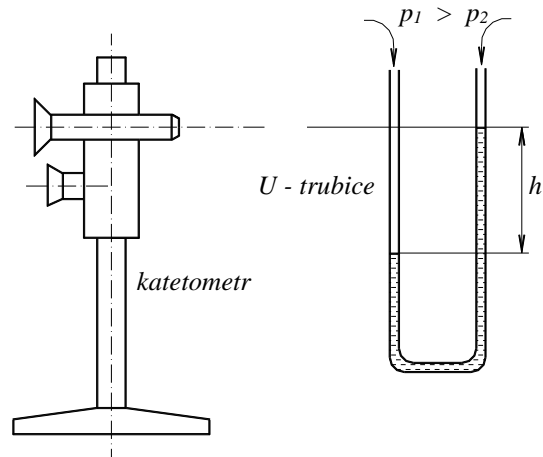
- U trubice

Nejjednodušším manometrem je skleněná trubice ohnutá do tvaru U a naplněná tlakoměrnou kapalinou (lihem, rtuť apod.). Rozdíl tlaků:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h \quad (4.6.5)$$

Velké přesnosti se dosáhne, když ku změření výšky h se použije přístroj pro přesné měření svislých odlehlostí, tzv. katetometr: po svislém sloupu pojíždí vozík nesoucí zaměřovací optiku a odečítací zařízení svislé polohy o přesnosti $0,01mm!$ Vysoká přesnost se využije jen když tlak v době mezi zaměřením na vrchol spodního a horního menisku se nezmění.

U-trubice je vybavena třemi ventily. Dva uzavírají přívody tlaku do ramen trubice, ale nejdůležitější je třetí, který uzavírá propojku mezi rameny. Při zahájení měření je otevřený a opatrně se zavírá, aby nedošlo k vylití tlakoměrné kapaliny do přívodní hadice, jestliže je tlaková diference větší, než může manometr měřit (např. při netěsnosti přívodů).



Obr. 4.6.3

- Sklonný manometr

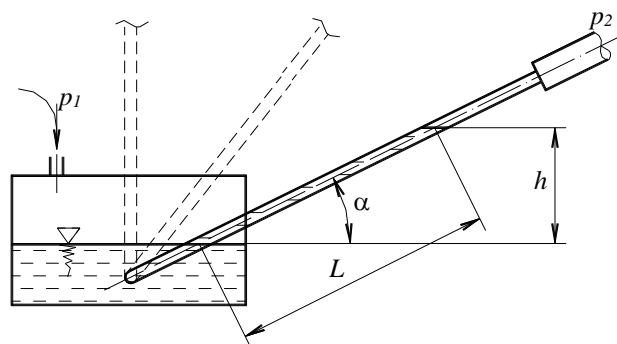
Má nádobku s připojenou otočnou trubicí, která se pro měření malých tlakových diferencí sklání do menších úhlů α .

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h = \rho g L \sin \alpha \quad (4.6.6)$$

- Mnohonásobný manometr

Používá se při měření tlaku v mnoha místech. Všechny tlakoměrné trubice jsou připojené ku společné nádobce, na jejíž hladinu působí atmosférický tlak.

Podle obr. 4.6.5 je v první trubici absolutní tlak $p_1 = p_0 - \rho g h_1$, menší než barometrický, ve třetí $p_3 = p_0 + \rho g h_3$, větší než barometrický.

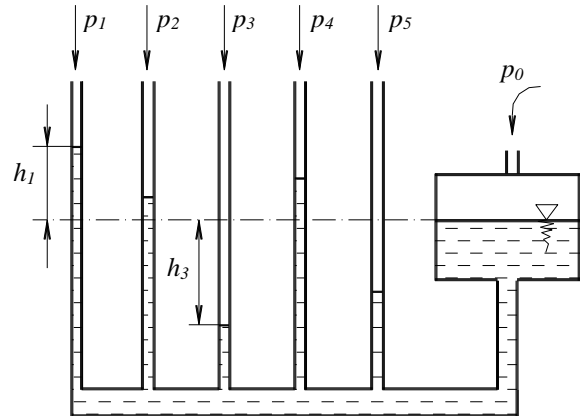


Obr. 4.6.4

Trubice jsou podloženy stupnicemi na milimetrovém papíře a záznamy se mohou pořizovat fotografováním nebo jiným sofistikovaným odečítacím zařízením.

- Betzův manometr

Oblíbený manometr aerodynamických laboratoří je na obr. 4.6.6. Na horní hladině tlakoměrné kapaliny je plováček, na němž je zavěšena průhledná tyčinka s vyleptanou stupnicí. Je nejdražší částí manometru, protože stupnice je provedena po 1mm s vyleptanými čísly. V optickém průhledu klouže podél krátké, rovněž průhledné stupnice o dělení po $0,1\text{mm}$, takže s touto přesností se měří rozdíl hladin. Tlakoměrnou kapalinou bývá líh, který dobře stéká, ale mění hustotu absorbováním vody z atmosféry. Destilovaná voda hustotu při stálé teplotě nemění, špatně však stéká vlivem horší smáčivosti stěn.

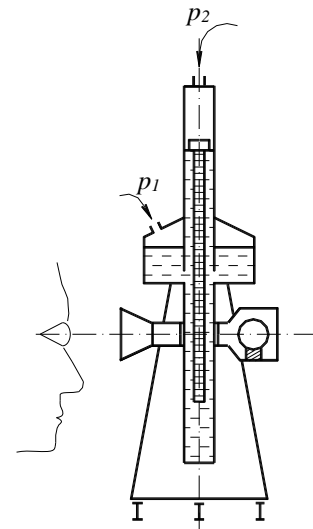


Obr. 4.6.5

- Prstencová váha

Zajímavý diferenciální manometr na obr. 4.6.7, dříve hojně používaný k automatizaci měření. Základem je prstencová trubice průřezu S a stě. poloměru r , nahoře rozdělená přepážkou. Dole má připojené závaží hmotnosti m a je částečně naplněna kapalinou, která odděluje oba tlakové prostory. Připojíme-li do levého otvoru přetlak $p_1 > p_2$, kapalina v levé části poklesne, v pravé vystoupí a celý prstenec se zhoupne podle svého středu a vynese protizávaží do polohy o úhlu α . Tlakový rozdíl vypočteme z rovnováhy momentů sil, které působí na prstenci. Do momentové rovnováhy nevstupují účinky kapaliny, protože ta jako tekutina v klidu působí kolmo na stěny prstence. Tyto síly se z velké části zruší, ježto působí proti sobě a nepatrná výslednice musí procházet středem otáčení, nedává tedy moment. Na něm se podílí pouze moment od tlaků na přepážku a moment od závaží:

$$\Delta p S r = mg R \sin \alpha \rightarrow \Delta p = \frac{mg R \sin \alpha}{S r} \quad (4.6.7)$$



Obr. 4.6.6

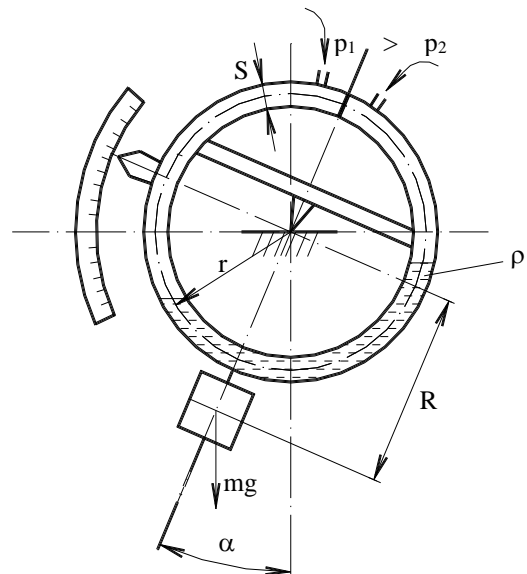
4.7 Relativní klid kapalin

Probereme zde několik typických případů pohybu nádob naplněných kapalinou, která je v klidu vzhledem ku stěnám, jimiž je obklopena. Úkolem bude vyšetřit rozložení tlaku v kapalině, průběh tlakových hladin, popř. síly od kapaliny na stěny.

a) Rovnoměrný přímočarý pohyb

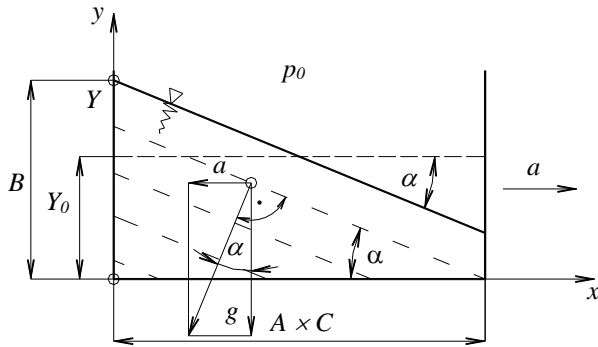
Pro kapalinu, která v pozemských podmínkách koná rovnoměrný přímočarý pohyb v libovolném směru, tj. s nulovým zrychlením, platí všechny zákonitosti statiky odvozené pro gravitační pole.

b) Přímočarý pohyb rovnoměrně zrychlený



Obr. 4.6.7

Mějme nádobu s kapalinou, která se pohybuje rovnoměrně zrychleně s akčním zrychlením a po přímé vodorovné dráze směrem doprava. Nevadilo by, kdyby dráha byla šikmá, jenom by se výpočty nepatrně zkomplikovaly.



Obr. 4.7.1

Zvolíme souřadnicový systém s počátkem v levém dolním rohu nádoby. Zvolíme v kapalině libovolnou částici a vyznačíme vektory **setrvačných** zrychlení, které na ni působí, tj. doleva a , dolů g . Tlakové hladiny se ustaví kolmo na vektor jejich součtu $(a^2 + g^2)^{0,5}$. Sklon všech tlakových hladin α v nádobě je dán $\operatorname{tg}\alpha = a/g$, protože a, g jsou v různých místech kapaliny stejné.

Uvedená fakta si dokážeme početně. Vydeme z tlakové rovnice (4.2.7), kterou aplikujeme na libovolný bod, kde působí setrvačná zrychlení $-a, -g$ proti kladným směrům

os x, y . Po dosazení setrvačných zrychlení a a integraci rovnice bez mezí určíme integrační konstantu C z podmínky, že v bodě Y známe tlak, což je tlak barometrický p_0 . Kdyby volná hladina nedosahovala do okraje nádoby Y , tj. žádná kapalina se nevytlila, pro stanovení C by posloužil střed volné hladiny ($x = A/2, y = Y_0$), který je v tomto případě shodný za pohybu i klidu.

$$dp = \rho R_k dk \quad (4.2.7)$$

$$R_x = -a, R_y = -g, R_z = 0 \quad (4.7.1)$$

$$dp = -\rho a dx - \rho g dy \quad (4.7.2)$$

$$p = -\rho(ax + gy) + C \quad (4.7.3)$$

$$C: \text{ pro } x = 0, y = B \text{ je } p = p_0 \rightarrow C = p_0 + \rho g B \quad (4.7.4)$$

$$p = -\rho[ax + g(y - B)] + p_0 \quad (4.7.5)$$

Největší tlak je v místě největší kolmé odlehlosti od volné hladiny, což splňuje bod $x = y = 0$. Zde $p_{max} = \rho g B + p_0$, tedy neuplatňuje se zde formálně zrychlení a stejně jako ve všech místech levé stěny, kde $x = 0$. Vliv a je však skryt v poloze bodu Y . K řešení tlakových hladin použijeme rovnici tlakové hladiny (4.2.8). Postupem podobným předchozímu dostaneme rovnici (4.7.7), která popisuje soustavu skloněných rovin. Chceme-li z nich vytáhnout rovnici volné hladiny, musíme pro stanovení C použít bod, o kterém víme, že jím volná hladina prochází. A tím je levý horní okraj, jestliže se část kapaliny vylila.

$$R_k dk = 0 \quad (4.2.8)$$

$$R_x = -a, R_y = -g, R_z = 0 \quad (4.7.1)$$

$$-a dx - g dy = 0 \quad (4.7.6)$$

Soustava tlak. hladin $-ax - gy = C \quad (4.7.7)$

Bod volné hladiny $x = 0, y = B \rightarrow C = -gB \quad (4.7.8)$

Volná hladina $g(B - y) - ax = 0 \quad (4.7.9)$

Sklon volné hladiny zjistíme, když poslední rovnici zdiferencujeme, viz (4.7.10)

a vypočteme z ní $dy/dx = \operatorname{tg}\alpha$.

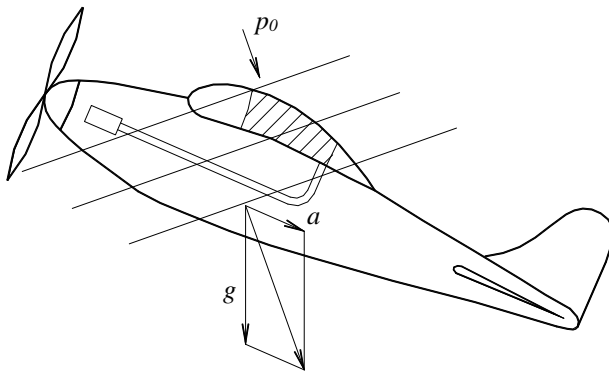
$$-g dy - a dx = 0 \quad (4.7.10)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{g} = \operatorname{tg}\alpha \dots \quad (4.7.11)$$

Pokud chceme vypočítat sílu na některou ze stěn, integrujeme elementární síly dF , dané místními tlaky p na příslušné plošky dS . Do výpočtu nezahrnujeme atmosférický tlak p_0 , který se zruší, protože působí na stěnu ze strany kapaliny i z vnější strany. Na následujících řádcích je výpočet síly na levou stěnu nádoby a na její dno.

$$F_B = \int dF \Big|_{x=0} = \int p \Big|_{x=0} dS = \int_0^B \rho g (B-y) C dy = \rho g C \left(By - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^B = \frac{1}{2} \rho g C B^2 \quad (4.7.12)$$

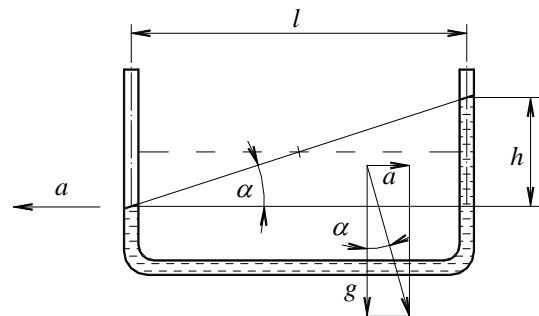
$$F_A = \int dF \Big|_{y=0} = \int p \Big|_{y=0} dS = \int_0^A \rho g (B-ax) C dx = \rho C \left(g B x - a \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^A = \rho C A \left(g B - \frac{1}{2} a A \right) \quad (4.7.13)$$



Obr. 4.7.2

Jinou technickou aplikací na zrychlený přímočarý pohyb je **hydrostatický měřič zrychlení**. Je jím skleněná U-trubice naplněná kapalinou. Je-li vystavena zrychlení a směrem vlevo dle obr. 4.7.3, volná hladina se nakloní o úhel α . Úhel můžeme vyjádřit jednak z patrného sklonu, jednak ze zrychlení:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l} = \frac{a}{g} \rightarrow a = \frac{gh}{l}$$



Obr. 4.7.3

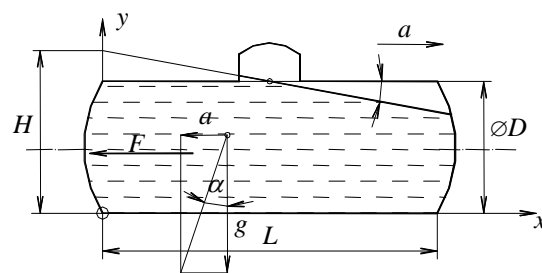
Příklad

U drážní cisterny nesmí sklon volné hladiny přesáhnout 10° . Jaké tomu odpovídá přípustné zrychlení a a jakou silou působí převážený lůh na zatíženější dno při stavu dle obr. 4.7.4, když

$$\varnothing D = 2,2 \text{ m}, \quad L = 8 \text{ m}, \quad \rho_L = 800 \text{ kg/m}^3.$$

$$a = g \cdot \operatorname{tg} \alpha = 9,81 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ = 1,73 \text{ m/s}^2$$

$$H = D + \frac{L}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2,2 + 4 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ = 2,905 \text{ m}$$



Obr. 4.7.4

$$\begin{aligned} F &= \int dF = \int_0^D p \Big|_{x=0} C dy = \int_0^D p \Big|_{x=0} \cdot 2\sqrt{(D-y)y} dy = \int_0^D \rho_L g (H-y) \cdot 2\sqrt{(D-y)y} dy = \\ &= 2\rho_L g \left[H \int_0^D \sqrt{(D-y)y} dy - \int_0^D y \sqrt{(D-y)y} dy \right] = \dots \end{aligned} \quad (4.7.14)$$

c) Rotační pohyb kolem svislé osy při $\omega = konst$

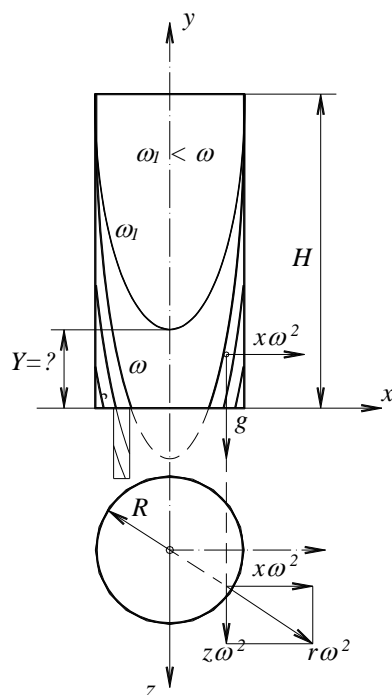
Otevřená válcová nádoba se svislou osou budiž za klidu naplněna až po okraj kapalinou. Při roztáčení nádoby kolem její osy se část kapaliny vylije, zbylá kapalina po ustálení otáček na $\omega = konst$ bude mít volnou hladinu ve tvaru rotačního paraboloidu, který prochází horním okrajem nádoby. Při vysokých otáčkách ω volná hladina kapaliny vytkne ve dně suchý středový kruh, při nižších otáčkách ω_1 bude vrchol hladinového paraboloidu nad dnem. Vyšetříme rozložení tlaku a tvar tlakových hladin.

Zavedeme pravoúhlý souřadnicový systém s počátkem ve středu dna. V jeho prvním kvadrantu (!) zvolíme částici a vyznačíme setrvačná zrychlení na ni působící. Rozložení tlaku stanovíme z tlakové rovnice (4.2.7). V průběhu řešení přejdeme na jednodušší válcové souřadnice r, y :

$$dp = \rho R_k dk \quad (4.2.7)$$

$$R_x = x\omega^2, R_y = -g, R_z = z\omega^2 \quad (4.7.15)$$

$$dp = \rho(x\omega^2 dx - g dy + z\omega^2 dz) \quad (4.7.16)$$



Obr. 4. 7. 5

$$p = \rho \left(\frac{x^2 \omega^2}{2} - gy + \frac{z^2 \omega^2}{2} \right) + C = \frac{\rho \omega^2}{2} (x^2 + z^2) - \rho gy + C = \frac{\rho \omega^2}{2} \cdot r^2 - \rho gy + C \quad (4.7.17)$$

$$C: \text{ pro } r=R, y=H, \text{ je } p = p_0 \rightarrow C = p_0 - \frac{\rho \omega^2}{2} \cdot R^2 + \rho gH \quad (4.7.18)$$

$$p = \frac{\rho \omega^2}{2} (r^2 - R^2) + \rho g(H - y) + p_0 \quad (4.7.19)$$

Největší tlak je v největší odlehlosti od volné hladiny, což je při obvodu dna, kde $r=R$ a $y=0$: $p_{max} = \rho gH + p_0$. Tlakové hladiny určíme z rovnice tlakové hladiny (4.2.8). Jejím řešením dostáváme vztah (4.7.22), který popisuje soustavu souosých rotačních paraboloidů. Ty nejsou nikterak omezené stěnami, tzn., že když k nádobě, třeba dole, připojíme uzavřenou trubici, i zde vztah (4.7.22) platí. Ze všech tlakových hladin nás nejvíce zajímá volná hladina. Vybereme ji ze soustavy paraboloidů tak, že integrační konstantu pro ni určíme v místě okraje nádoby, kterým prochází, viz (4.7.23).

$$R_k dk = 0 \quad (4.2.8)$$

$$R_x = x\omega^2, R_y = -g, R_z = z\omega^2 \quad (4.7.15)$$

$$x\omega^2 dx - g dy + z\omega^2 dz = 0 \quad (4.7.20)$$

$$\frac{\omega^2}{2} (x^2 + z^2) - gy = C \quad (4.7.21)$$

$$\text{soustava rotač. paraboloidů} \quad \frac{\omega^2 r^2}{2} - gy = C \quad (4.7.22)$$

$$\text{pro volnou hladinu:} \quad C: \quad r=R, \quad y=H \rightarrow C = \frac{\omega^2 R^2}{2} - gH \quad (4.7.23)$$

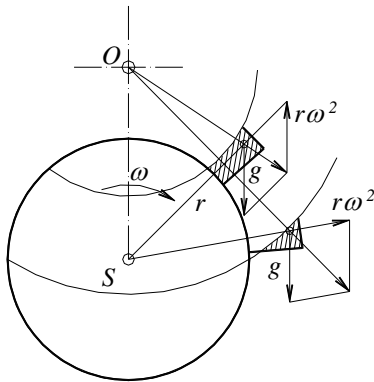
$$\text{volná hladina:} \quad \frac{\omega^2}{2} (r^2 - R^2) - g(y - H) = 0 \quad (4.7.24)$$

Chceme-li zjistit, kde leží vrchol volné hladiny Y , položíme $r = 0$ v posledním vztahu a Y vypočteme. Je-li $Y > 0$, vrchol je nad dnem.

$$-\frac{\omega^2 R^2}{2} - g(Y - H) = 0 \rightarrow Y = H - \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad (4.7.25)$$

Je zřejmé, že měřením Y při znalosti H, R můžeme zpětně vypočítat otáčky $n = \omega/2\pi$, a máme tak k dispozici kapalinový otáčkoměr.

d) Rotační pohyb kolem vodorovné osy při $\omega = konst$



Obr. 4.7.6

Případ nebudeme již řešit pomocí tlakové rovnice a rovnice tlakové hladiny, ale pouze vyšetříme geometrický tvar tlakových hladin. Přesný postup je analogií předchozích výpočtů.

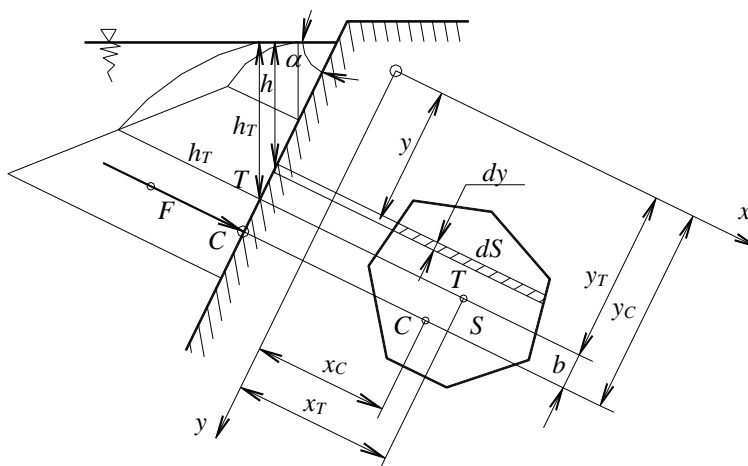
Ve vodorovném bubnu je obtížné mít statický, tj. neproudící stav kapaliny. Nastává až při enormně vysokých otáčkách, kdy je zanedbatelné gravitační zrychlení. Lépe se statickému stavu blíží kapalina v korečcích vodního kola s vrchním dopadem, viz obr. 4.7.6.

Výsledná setrvačná zrychlení, zjištěná u zvolených částic kapaliny v jednotlivých korečcích se protínají v bodě O . Protože tlakové hladiny jsou kolmé na výslednicové vektory zrychlení, znamená to, že bod O je středem všech tlakových hladin, které tak jsou válcovými plochami. Z podobnosti trojúhelníků vypočteme polohu O nad středem otáčení S .

$$\frac{OS}{r} = \frac{g}{r\omega^2} \rightarrow OS = \frac{g}{\omega^2} \quad (4.7.26)$$

Teprve při $\omega \rightarrow \infty$ bude v pozemských podmínkách totožný střed rotace a střed válcových tlakových hladin. Perfektní odlitky z odstředivého lití se vyrábí v beztížném kosmu.

4.8 Síla kapaliny na stěnu



Obr. 4.8.1

a) Rovná, šikmá stěna

- Síla na plochu S . Při jejím výpočtu nebudeme uvažovat atmosferický tlak, který zpravidla působí i z opačné strany. Zvolíme souřadnicový systém x, y tak, že osa x bude totožná s průsečnicí volné hladiny se šikmou stěnou a osa y bude v rovině ležet a směřovat dolů, viz obr. 4.8.1. Pro výpočet síly zvolíme proužek dS rovnoběžný s osou x , protože tlak, který na něj působí zde má konstantní hodnotu. Výslednou sílu F dostaneme integrací sil dF na proužky elementární šířky dy . Ve výsledném vzorci je statický

moment plochy S k ose x , který lze vyjádřit pomocí vzdálenosti těžiště plochy od osy x , tj. $S \cdot y_T$. Vzdálenost y_T pak můžeme nahradit hloubkou těžiště $h_T = y_T \sin \alpha$.

$$F = \int dF = \int_S p dS = \int_S \rho g h dS = \int_S \rho g y \sin \alpha dS = \rho g \sin \alpha \int_S y dS = \rho g \sin \alpha y_T S \quad (4.8.1)$$

$$F = \rho g h_T S \quad (4.8.2)$$

Poslední vzorec říká, že síla F je daná vahou zatěžovacího tělesa, které dostaneme sklopením hloubek h plochy S do polohy kolmé ke stěně, jak naznačeno na obr. 4.8.1. Z obrázku je zřejmé, že síla F nepůsobí v těžišti T plochy, protože horní podstava našeho sedmihranu je šikmá, ale v těžišti tělesa. Je tedy dalším úkolem stanovení působíště síly na stěně. Působíště říkáme centrum C a budeme hledat jeho souřadnice x_C, y_C .

- **Poloha centra C .** S ohledem na to, že plocha S není symetrická podle osy y , musíme stanovit jak y_C , tak x_C . Souřadnici y_C určíme z rovnosti momentů sil k ose x , obdobně x_C z rovnosti momentů sil k ose y . Tj. moment vyjádříme jednou jako integrál elementárních momentů od sil na proužky plochy a po druhé výslednou silou F a hledanou vzdáleností. Součástí rozvinutých výrazů jsou jednak kvadratický moment plochy k ose x I_x (vyjádřený pomocí Steinerovy věty $I_x = I_{Tx} + S y_T^2$) a deviační moment plochy k osám x, y , tj. D_{xy} (element plochy pro výpočet deviačního momentu musí být $dS = dx \cdot dy$).

$$F y_C = \int dF y = \int_S p dS y = \int_S \rho g y \sin \alpha dS y = \rho g \sin \alpha \int_S dS y^2 = \rho g \sin \alpha I_x \quad (4.8.3)$$

$$y_C = \frac{\rho g \sin \alpha I_x}{\rho g \sin \alpha y_T S} = \frac{I_x}{y_T S} = \frac{I_{Tx} + S y_T^2}{y_T S} = \frac{I_{Tx}}{y_T S} + y_T = b + y_T \quad (4.8.4)$$

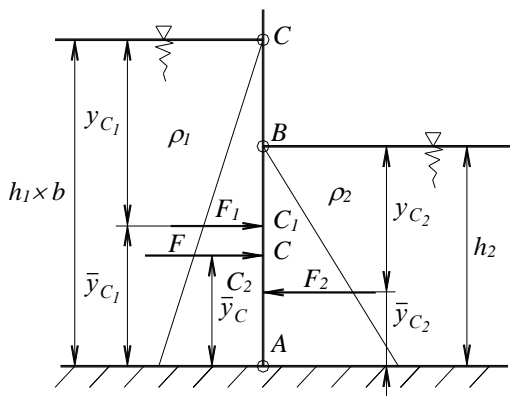
Odlehlost b působíště síly od těžiště plochy S ve směru y je tedy $b = I_{Tx}/y_T S$. Je to vždy kladné číslo, což znamená, že centrum je pod těžištěm.

$$F x_C = \int dF x = \int_S p dS x = \int_S \rho g y \sin \alpha dS x = \rho g \sin \alpha \int_S dS x y = \rho g \sin \alpha D_{xy} \quad (4.8.5)$$

$$x_C = \frac{\rho g \sin \alpha D_{xy}}{\rho g \sin \alpha y_T S} = \frac{D_{xy}}{y_T \cdot S} = \frac{D_{Txy} + S x_T y_T}{y_T \cdot S} = \frac{D_{Txy}}{y_T \cdot S} + x_T \quad (4.8.6)$$

Z uvedených rovnic pro zjištění polohy hydrostatického centra plyne, že vzdálenost b centra od těžiště plochy S se bude zmenšovat s rostoucím statickým momentem $M = S y_T$ plochy k ose x a zmenšujícím se kvadratickým momentem plochy k vodorovné těžištní ose I_{Tx} . Ke splynutí centra s těžištěm dojde při sklonu $\alpha = 0^\circ$, kdy $y_T \rightarrow \infty$. Ke zjednodušení výpočtů dochází, když stěna je symetrická podle y , když je svislá nebo vodorovná.

- **Síla na stěnu oddělující dvě nádrže.**



Obr. 4.8.2

Působí-li na dělicí stěnu kapaliny z obou stran, určíme síly F_1 a F_2 na každou stranu zvlášť a najdeme polohy jejich center C_1, C_2 . Jsou v hloubkách y_{C_1}, y_{C_2} , odpovídajícím polohám těžišť zatěžovacích trojúhelníkových těles (ve $2/3$ hloubky). Působíště výsledné síly $F = F_1 - F_2$ určíme z rovnosti momentů síly F na jedné straně a sil F_1, F_2 na druhé straně k vhodně zvolenému bodu stěny (A, B nebo C), třeba k A podle (4.8.9)

$$F_1 = \frac{1}{2} \rho_1 g h_1^2 b, \quad F_2 = \frac{1}{2} \rho_2 g h_2^2 b, \quad F = F_1 - F_2 \quad (4.8.7)$$

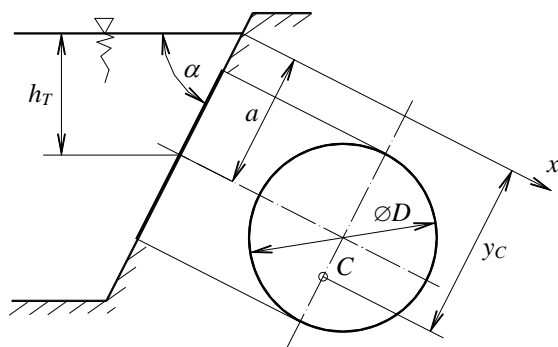
$$y_{C_1} = \frac{2}{3} h_1, \quad \bar{y}_{C_1} = \frac{1}{3} h_1, \quad y_{C_2} = \frac{2}{3} h_2, \quad \bar{y}_{C_2} = \frac{1}{3} h_2 \quad (4.8.8)$$

$$F \bar{y}_C = F_1 \bar{y}_{C_1} - F_2 \bar{y}_{C_2} \rightarrow \bar{y}_C = ? \quad (4.8.9)$$

Příklad

Určit sílu a polohu síly kapaliny na kruhovou desku dle obr. (4.8.3)

Dáno: $\varnothing D$, a , ρ .



Obr. 4.8.3

$$F = \rho g h_T S = \rho g \sin \alpha \cdot a \frac{\pi D^2}{4} \quad (4.8.10)$$

$$y_C = \frac{I_{Tx}}{y_T S} + y_T = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{a \cdot \frac{\pi D^2}{4}} + a = \frac{D^2}{16 a} + a \quad (4.8.11)$$

Pozn.: $I_{Tx} = \frac{1}{2} I_P$ (4.8.12)

$$I_P = \int_0^R 2\pi r dr \cdot r^2 = 2\pi \int_0^R r^3 dr \quad (4.8.13)$$

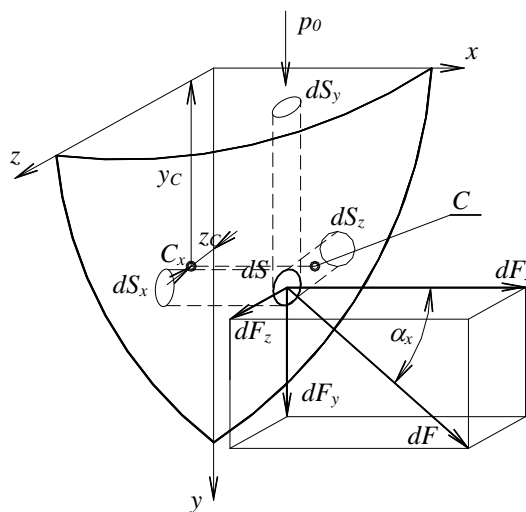
$$= \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \quad (4.8.14)$$

I_P ... polární kvadratický moment plochy k jejímu středu

b) Křivá plocha.

- Síla na plochu S.

Zborcenou stěnu budeme mít dle obr. 4.8.4 ve tvaru jakéhosi štítu, který překrývá roh souřadné soustavy. Volná hladina kapaliny je na úrovni horní hrany štítu. Do volné hladiny jsou položeny osy x , z , osa y směřuje svisle dolů. Celková síla F na vytčenou plochu je dána složkami F_x , F_y , F_z ve směru souřadných os dle (4.8.15). Vodorovné složky F_x , F_z obsahují v odvozených vzorcích statické momenty průmětů plochy S_x , S_z k jejich průsečnicím s volnou hladinou, tj. k osám z , resp. x . Tyto momenty, $\int y dS_x$, $\int y dS_z$, jsou vyjádřeny pomocí vzdáleností těžišť průmětů plochy od volné hladiny $S_x y_{Txz}$, $S_z y_{Tzx}$ (např. y_{Txz} značí vzdálenost těžiště x -ového průmětu plochy od osy z). Svislá složka síly F_y je dána integrálem vah svislých válečků elementárních průřezů dS_y , které mají jeden konec na křivé stěně a druhý nahoře na volné hladině, viz (4.8.17).



Obr. 4.8.4

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (4.8.15)$$

$$F_x = \int dF_x = \int dF \cos \alpha_x = \int p dS \cos \alpha_x = \int p dS_x = \int \rho g y dS_x = \rho g \int y dS_x = \rho g y_{Txz} S_x \quad (4.8.16)$$

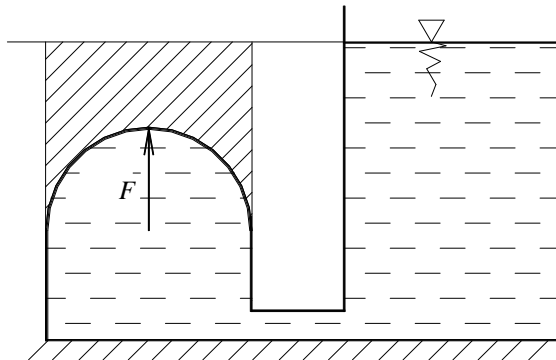
$$F_y = \int dF_y = \int dF \cos \alpha_y = \int p dS \cos \alpha_y = \int p dS_y = \int \rho g y dS_y = \rho g \int y dS_y = \rho g \int dV = \rho g V \quad (4.8.17)$$

$$F_z = \int dF_z = \int dF \cos \alpha_z = \int p dS \cos \alpha_z = \int p dS_z = \int \rho g y dS_z = \rho g \int y dS_z = \rho g y_{Tzx} S_z \quad (4.8.18)$$

Výsledky můžeme shrnout slovně:

Hydrostatická síla v libovolném vodorovném směru na křivou plochu se rovná součinu hustoty, gravitačního zrychlení, velikosti průmětu křivé plochy do roviny kolmé na uvažovaný směr a vzdálenosti těžiště průmětu plochy od volné hladiny.

Svislá hydrostatická síla na křivou plochu se rovná váze kapaliny obsažené ve svislém objemu mezi danou plochou a jejím kolmým průmětem na volnou hladinu bez ohledu na to, je-li přímo vyplněn kapalinou či nikoliv.



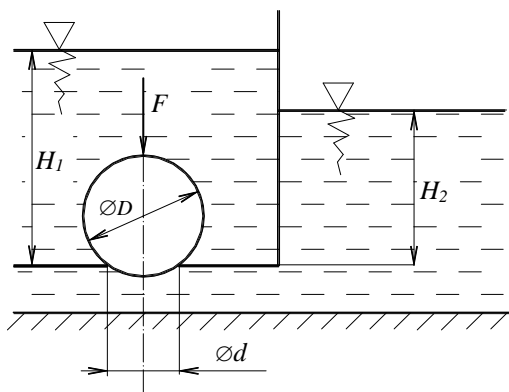
Obr. 4.8.5

Jak je myšlen poslední dovětek vysvětluje sousední obrázek. Je v něm půlkulová stěna vystavená tlaku kapaliny zdola. Volná hladina je výše než kulovitý kryt. Síla F je daná zatěžovacím objemem, který je na obrázku vyšrafován, ale tekutina v něm není.

Před výpočtem vertikálních sil na složitá tělesa je dobré dělat grafický rozklad zatěžovacích obrazců, pomocí něhož snadno dostaneme jednoduché výpočtové vztahy.

Jak postupovat je patrné z následujícího příkladu.

Příklad Koule $\varnothing D$ uzavírá otvor $\varnothing d$, který je mezi dvěma nádržemi naplněnými touž kapalinou hustoty ρ do výšek H_1, H_2 . Vypočítat se má síla F , která tiskne kouli do sedla při zanedbání její vlastní hmotnosti.



Obr. 4.8.6

Povrch koule rozdělíme na 3 oblasti: horní polokouli, kulový pás a menisek pronikající do spodní nádrže. Určíme zatěžovací objemy sil na citované plochy a sestavíme z nich jakousi „grafickou“ rovnici (pro síly působící dolů je zvoleno kladné znaménko). Druhý řádek „rovnice“ ukazuje, že část zatěžovacích těles se ruší. Další eliminace proběhla při přechodu z druhé do třetí „rovnice“, kde dále došlo ke sloučení kulového pásu a válcového středu koule na celou kouli. Zbavili jsme se obtížně počitatelných objemů a zbyly jen dva: válec o $\varnothing d$ výšky $H_1 - H_2$, který dává sílu působící dolů a kouli o $\varnothing D$ dávající sílu směrem nahoru.

Na kouli působí vztaková Archimédova síla a proti ní síla daná rozdílem hydrostatických tlaků od nestejně výšky hladin v nádržích.

$$F = + \left[\text{shaded sphere} - \text{shaded cylinder} - \text{shaded sphere} \right] \quad (4.8.19)$$

$$F = + \left[\text{shaded cylinder} - \text{shaded sphere} - \text{shaded sphere} \right] \quad (4.8.20)$$

$$F = + \left[\text{shaded cylinder} - \text{shaded sphere} - \text{shaded sphere} \right] = \rho g \left(\frac{\pi}{4} d^2 (H_1 - H_2) - \frac{1}{6} \pi D^3 \right) \quad (4.8.21)$$

- Poloha centra

Souřadnice centra se určí z momentové rovnováhy složek sil k souřadnicovým osám. Na následujících výpočtových řádcích (4.8.22), (4.8.24) je použita složka F_x a její momenty k osám y, z . Výpočty se vztahují k obr. (4.8.4).

$$F_x y_C = \int_{S_x} dF_x y = \int_{S_x} \rho g y dS_x y = \rho g \int_{S_x} dS_x y^2 = \rho g I_{xz} \quad (4.8.22)$$

$$y_C = \frac{\rho g I_{xz}}{\rho g y_{T_{xz}} S_x} = \frac{I_{xTz} + S_x y_{T_{xz}}^2}{y_{T_{xz}} S_x} = \frac{I_{xTz}}{y_{T_{xz}} S_x} + y_{T_{xz}} \quad (4.8.23)$$

$$F_x z_C = \int_{S_x} dF_x z = \int_{S_x} \rho g y dS_x z = \rho g \int_{S_x} dS_x y z = \rho g D_{x,yz} \quad (4.8.24)$$

$$z_C = \frac{\rho g D_{x,yz}}{\rho g y_{T_{xz}} S_x} = \frac{D_{x,yz}}{y_{T_{xz}} S_x} \quad (4.8.25)$$

Význam symbolů je zřejmý z odvození výrazů, přesto nejkomplicovanější uvedeme:

I_{xz} = kvadratický moment setrvačnosti x -ového průřezu plochy k ose z

I_{xTz} = kvadr. moment setrvačnosti x -ového průřezu plochy k těžištní ose rovnoběžné se z

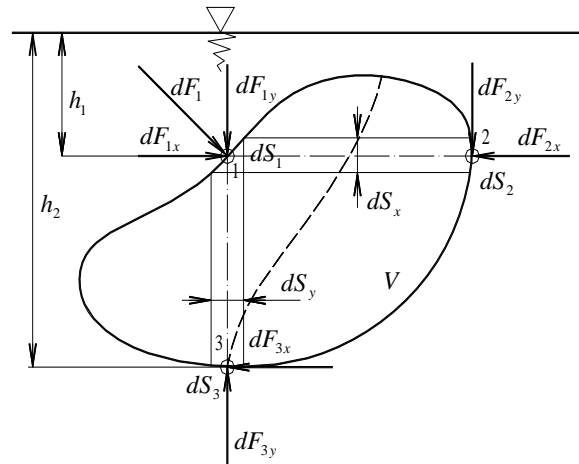
$y_{T_{xz}}$ = vzdálenost těžiště x -ového průřezu plochy od osy z

$D_{x,yz}$ = deviační moment x -ového průřezu plochy k osám y, z

4.9 Síla kapaliny na plovoucí těleso

Těleso může být buď úplně nebo částečně potopené. Při částečném potopení však musí být volná hladina po všech jeho stranách ve stejné výši. Na povrchu tělesa si vytkneme v místě 1 plošku dS_1 , kterou promítneme do směrů souřadných os x, y . Tyto štíhlé válečky elementárních průřezů protnou povrch tělesa v ploškách dS_2, dS_3 .

Výsledná vodorovná síla ve směru x je rozdílem sil zprava a zleva podle (4.9.1). Protože hloubky plošek dS_1 a dS_2 jsou stejné, musí se síly dF_{2x}, dF_{1x} zrušit. Jinak je tomu ve svislém směru podle (4.9.2) a (4.9.3), kde síla je daná součtem vah elementárních svislých válečků kapaliny, které vyplňují objem ponořené části tělesa, u zcela potopeného tělesa objem celý.



Obr. 4.9.1

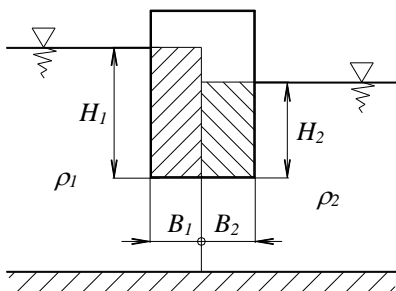
$$F_x = \int dF_x = \int (dF_{2x} - dF_{1x}) = \int_{S_x} (p_2 dS_x - p_1 dS_x) = \int_{S_x} (\rho g h_1 dS_x - \rho g h_1 dS_x) = 0 = F_z \quad (4.9.1)$$

$$F_y = \int dF_y = \int (dF_{3y} - dF_{1y}) = \int_{S_y} (p_3 dS_y - p_1 dS_y) = \int_{S_y} (\rho g h_3 dS_y - \rho g h_1 dS_y) = \quad (4.9.2)$$

$$= \rho g \int (h_3 - h_1) dS_y = \rho g \int dV = \rho g V \dots \text{váha kapaliny o objemu } V \quad (4.9.3)$$

Tedy: - vodorovné složky síly na plovoucí či potopené těleso jsou nulové

- svislá složka síly je rovna váze kapaliny tělesem vytlačené. To je známý **Archimédův zákon**.



Obr. 4.9.2

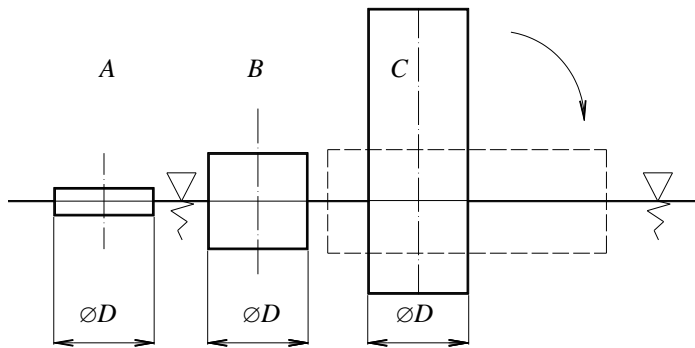
Je-li vztlaková síla větší než váha tělesa, těleso se z nestlačitelné kapaliny vynoří, a to tak, aby byly obě síly stejné, jak je tomu u plavidel. U tělesa zobrazeného na obr. 4.9.2 bychom mohli použít Archimédova zákona jen v případě, že hladiny jsou ve stejné výši a že kapalina vlevo a vpravo má stejnou hustotu. Není-li tomu tak, musí se vztlaková síla počítat jako součet vertikálních sil na jednotlivé plochy. A samozřejmě bude existovat i výsledná vodorovná síla, která se rovněž vypočte jako souhrn vodorovných sil.

$$\text{Vertikální síla: } F_V = \rho_1 g B_1 H_1 C + \rho_2 g B_2 H_2 C \quad (4.9.4)$$

$$\text{Horizontální síla: } F_H = \frac{1}{2} g (\rho_1 H_1^2 - \rho_2 H_2^2) C \quad (4.9.5)$$

4.10 Stabilita plovoucího tělesa

Stabilita je odpor, který klade plovoucí těleso proti vychýlení z žádoucí rovnovážné polohy nebo naopak jeho schopnost se do napřímené polohy vrátit. Sledujme chování tří průřezově i materiálově shodných válců o různých výškách dle sousedního obrázku. Budeme-li požadovat, aby válce plavali se svislou osou, pak



Obr. 4.10.1

nejlépe se to podaří u krátkého válce A, který bude velmi stabilní. Kdybychom jej vychýlili, dokonce o 90° , rychle se vrátí do požadované polohy, jež je pro něj polohou stabilní.

U válce B by se návrat z vychýlené polohy neobešel bez určitého kolébání, které by na klidné hladině kapaliny nakonec ustalo, protože svislá poloha je stále stabilní, i když méně než v případě A.

V případě C bychom dlouhý válec opatrně ponořovali svisle do kapaliny, jakmile jej však uvolníme, okamžitě se převrhne, protože ve svislé poloze je nestabilní. Někde mezi případem B a C existuje délka válce, při níž plování válce s vertikální osou je na hranici mezi stabilitou a nestabilitou. Zároveň je zřejmé, že se stabilitou plování válce s vodorovnou osou je to naopak, případ A by byl nestabilní, případ C stabilní.

Určují se 2 druhy stability:

- statická** - je dána momentem dvojice sil tvořené vahou tělesa a vztakovou silou. Momentem se těleso napřimuje do žádané polohy.
- dynamická** - je dána prací potřebnou k vychýlení tělesa z žádoucí polohy

U lodí je stabilita příčná a podélná, rozhodující je samozřejmě příčná. Dále se budeme zabývat jen příčnou stabilitou statickou. Pomocí obr. 4.10.2 nadefinujeme základní veličiny rozhodující o statické stabilitě plovoucího tělesa. Jsou to:

C = působiště vztakové síly (centrum) v rovnovážné poloze tělesa.

C' = působiště vztakové síly ve vychýlené poloze

M = metacentrum, což je průsečík vektoru vztakové síly F s osou symetrie příčného průřezu tělesa

T = těžiště plavidla (předpokládáme, že je ve stálém místě, tj. náklad je upevněn)

m = metacentrická výška, udává vzdálenost metacentra od těžiště a je kladná, je-li metacentrum nad těžištěm

s = vzdálenost bodů C a T

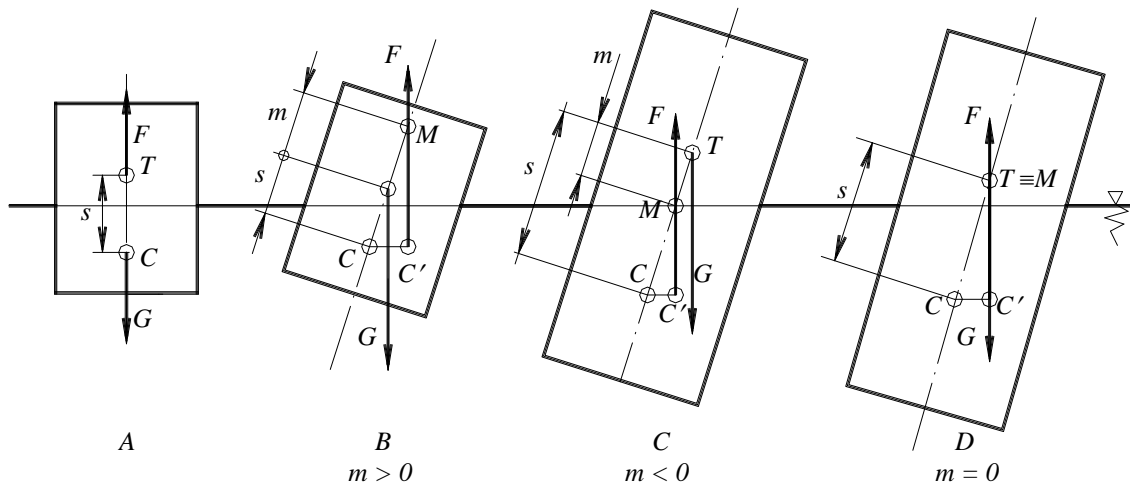
- plavební plocha je označení pro plochu, kterou vytíná těleso na vodní hladině
- plavební osa je podélná osa plavební plochy

Na obr. 4.10.2 jsou 4 možné stavy plovoucího tělesa.

- rovnovážná poloha:** Váha $G = mg$ a vztaková síla F leží na ose příčného řezu plavidla a vzájemně se ruší.
- stabilní poloha:** Při vychýlení plavidla zůstává těžiště T na místě a působiště vztakové síly se z polohy C posune do polohy C' . Vztaková síla protíná osu příčného řezu v metacentru M . Vzniklá dvojice sil G a F plavidlo vzpřimuje, metacentrum M leží nad těžištěm, metacentrická výška m je kladná.
- nestabilní poloha:** Ve vychýlené poloze dvojice sil G , M těleso ještě více zvrací. Metacentrum je pod těžištěm, metacentrická výška m je záporná.
- indiferentní poloha:** Ve vychýlené poloze leží vektory G a F na jedné svislici, tj. vztaková síla prochází těžištěm, metacentrum je totožné s těžištěm, metacentrická výška je nulová.

Statickou stabilitu či nestabilitu určuje metacentrická výška m . Její výpočet uskutečníme za předpokladu malých úhlových výchylek φ . Na loď v bodech T a C' působí silová dvojice G , F . Stav se nezmění, jestliže do bodu C přidáme směrem nahoru a dolů vzájemně se rušící síly F . Vzniknou tak 2 dvojice, z nichž jedna plavidlo

vzpřimuje (FF o rameni $(m+s)\sin\varphi$ a druhá ji zvrací (FG o rameni $s\sin\varphi$). Věnujeme se jen vzpřimujícímu momentu. Fyzikálně je dán tím, že na pravém boku je oproti rovnovážné poloze více vytačené vody, na levé straně naopak méně. K vyjádření vzpřimujícího momentu použijeme proužek dS plavební plochy, tažený po celé



Obr. 4.10.2

délce lodě, vzdálený y od plavební osy.

$$F(m+s)\sin\varphi = \int \rho g dV \cdot y = \int \rho g dS y \operatorname{tg}\varphi y \quad (4.10.1)$$

$$\text{pro } \varphi \rightarrow 0 \text{ je } \sin\varphi \doteq \operatorname{tg}\varphi \quad (4.10.2)$$

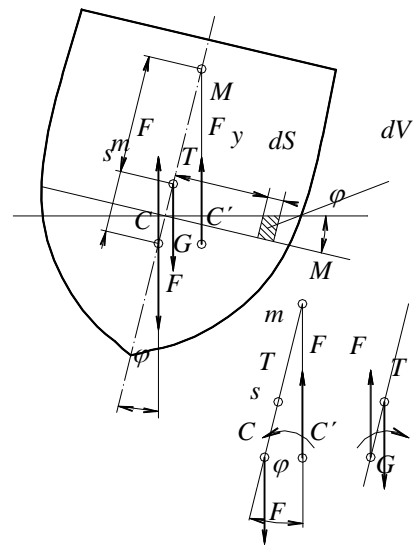
$$F(m+s) = \rho g \int dS y^2 \quad (4.10.3)$$

Označíme-li V ponořený objem lodi:

$$\rho g V(m+s) = \rho g I \quad (4.10.4)$$

$$m = \frac{I}{V} - s \quad (4.10.5)$$

Moment I je tedy kvadratický moment plavební plochy k plavební ose, tj. při případné oboustranné symetrii plavební plochy, k její další ose, o které bychom rádi řekli, že se kolem ní plavidlo kolébá. Není tomu tak, při zatížení silovou dvojicí se těleso otáčí kolem těžištní osy rovnoběžné s plavební osou.



Obr. 4.10.3

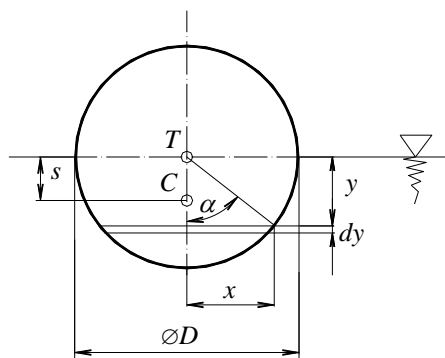
Příklad

Vypočítat metacentrickou výšku dlouhého válce ($L \gg D$), potopeného do poloviny průměru D .

Nejprve určíme polohu centra C potopené poloviny válce, tj. s , z rovnosti statických momentů ku středu válce.

$$s \cdot \frac{\pi}{8} D^2 = \int_0^{D/2} 2xy dy = 2 \int_0^{D/2} \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2} y dy = \quad (4.10.6)$$

$$= 2 \int_{\pi/2}^0 \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cos^2 \alpha} \frac{D}{2} \cos \alpha \left(-\frac{D}{2}\right) \sin \alpha d\alpha = \quad (4.10.7)$$



Obr. 4.10.4

Substitute: $y = \frac{D}{2} \cos \alpha$

$$dy = -\frac{D}{2} \sin \alpha d\alpha$$

$$\sin \alpha = z$$

$$\cos \alpha d\alpha = dz$$

metacentrická výška:

$$= -2 \left(\frac{D}{2} \right)^3 \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \quad (4.10.8)$$

$$= -2 \left(\frac{D}{2} \right)^3 \int_{\pi/2}^0 \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha = -2 \left(\frac{D}{2} \right)^3 \int z^2 dz = \quad (4.10.9)$$

$$= -2 \left(\frac{D}{2} \right)^3 \frac{z^3}{3} = -\frac{2}{3} \left(\frac{D}{2} \right)^3 \sin^3 \alpha = \quad (4.10.10)$$

$$= -\frac{2}{3} \left(\frac{D}{2} \right)^3 \cdot (1 - \cos^2 \alpha)^{3/2} = -\frac{2}{3} \left(\frac{D}{2} \right)^3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{D} \right)^2 y^2 \right)^{3/2} \Bigg|_0^{\frac{D}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{D}{2} \right)^3 \quad (4.10.12)$$

$$s = \frac{8}{\pi D^2} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{D}{2} \right)^3 = \frac{1}{\pi} \frac{2}{3} D \quad (4.10.13)$$

$$m = \frac{I}{V} - s = \frac{\frac{1}{12} \cdot LD^3}{\frac{\pi}{8} \cdot D^2 L} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{3} D = \frac{2D}{3\pi} - \frac{2D}{3\pi} = 0 \quad (4.10.14)$$

Nulová metacentrická výška, při níž těžiště tělesa je totožné s metacentrem, znamená, že poloha je indiferentní, na rozhraní stability a nestability.

5. Dynamika tekutin

Dynamika tekutin je po statice druhou, významnější částí mechaniky tekutin, která se zabývá zákonitostmi pohybu tekutin. Z klasického pohledu je proudění předmětem jednak **kinematiky**, která si nevyšímá napětí a sil v tekutině, jednak **dynamiky**, sledující jak kinematické, tj. časo-prostorové závislosti proudění, tak jevy silové. Dnes lze toto rozdělení popisu proudění respektovat jen výjimečně.

Proudění je obecně složitým prostorovým a časovým procesem, který, abychom jej výpočtově zvládli, záměrně zjednodušíme. Uvedeme kriteria, podle nichž proudění, tedy nikoliv tekutiny, rozdělujeme.

dle vazkosti:	nevazká proudění	(při vysokých rychlostech)
	vazká proudění:	newtonovská $\tau = \eta(\partial w_x / \partial y)$
		neneutronovská $\tau = \tau_0 + k(\partial w_x / \partial y)^n$
dle stlačitelnosti:	nestlačitelná proudění	(kapaliny při běžných stlačeních, plyny při rychlostech dosti menších než rychlost zvuku)
	stlačitelná proudění	(kapaliny při velkých stlačeních, plyny při rychlostech kolem a výše rychlosti zvuku)
dle ustálenosti:	ustálená proudění	(tzv. stacionární, nemění se s časem)
	neustálená proudění	(nestacionární, závisejí na čase)

dle **druhu funkčních částic tekutiny:**

modelové částice:	nevířivé proudění	(částice se neotáčejí kolem vlastních středů, konají jen translační pohyby)
	vířivé proudění	(částice konají translační a rotační pohyby, vibrační nikoli)
mikročástice:	laminární proudění	(hybnost v tekutině se přenáší hlavně molekulami)
	turbulentní proudění	(hybnost se přenáší molárními částicemi, z nichž jsou složeny nahodilé turbulentní víry)

dle **geometrického uspořádání:** proudění třírozměrová (prostorová)
 proudění dvourozměrová (rovinná)
 proudění jednorozměrová

Všimněme se, že se jedná o rozdělení proudění, nikoliv tekutin. Tatož tekutina se např. při pomalých rychlostech chová jako vazká, při vysokých jako nevazká z pohledu molekulárního tření. Čili vazkost je hlavně atributem proudění. Plyny při nízkých rychlostech se řídí vztahy pro nestlačitelné proudění, při rychlostech blízkých nebo převyšujících rychlost zvuku musíme stlačitelnost respektovat.

Dále si uvědomme, že vířivost - nevířivost je vlastností modelových částic, je přesně definovaná, jak uvidíme později, a jedná se o jinou kategorii než s jakou se setkáváme u laminárních a turbulentních proudění.

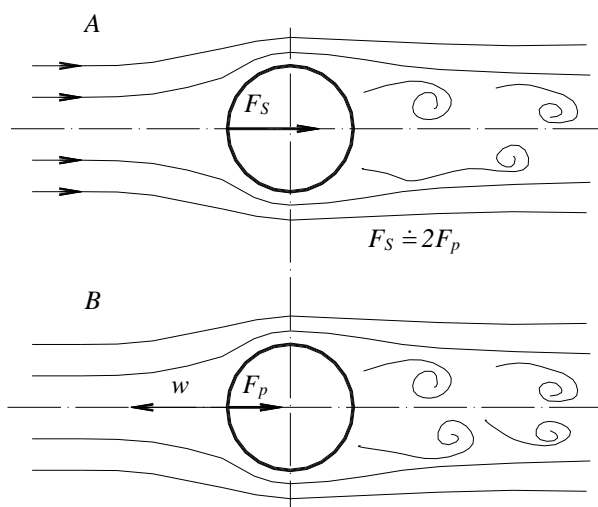
Uveďme běžně používaná cizojazyčná synonyma pro jednotlivé druhy proudění :

nevazké proudění = ideální, vazké = reálné, nestlačitelné = incompressible, stlačitelné = compressible, ustálené = stacionární, neustálené = nestacionární, třírozměrové – třidimenzionální (3D), analogicky 2D a 1D.

5.1 Eulerovo a Lagrangeovo vyjádření pohybu tekutin

a) Relativnost pohybu

Eulerův a Lagrangeův popis proudění úzce souvisí s relativností proudění kolem obtékaných těles. Na obr. 5.1.1 A máme skutečný obraz proudění, které jde zleva doprava kolem stojícího válce. Obraz je tvořen proudnicemi a úplavovými víry za tělesem.

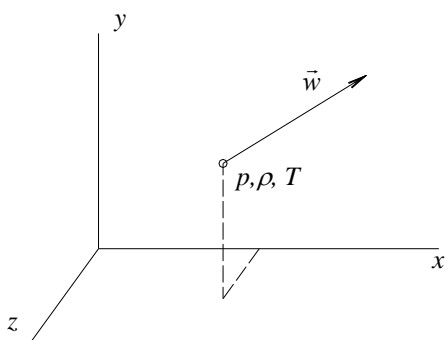


Tentýž obraz dostaneme, když budeme naopak pohybovat tělesem zprava doleva v klidné tekutině. Souhlas je nejen kinematický, ale i silový, když pohybující se těleso či proud má nulové zrychlení. Pokud tomu tak není ($dw/dt \neq 0$), obrazy proudnic jsou totožné, ale odpor těles různý. V druhém případě je odpor zhruba poloviční, což na tomto místě nelze vysvětlit (D'Alambertův paradox) a ani to není nyní významné.

Abychom dostali dokonalý obraz o pohybu tekutiny, musíme znát v každém okamžiku polohu všech částic tekutiny v prostoru. Z časového průběhu změny polohy každé částice dostaneme rychlost proudění a jeho zrychlení.

Obr.5.1.1

a) Eulerovo vyjádření



Obr.5.1.2

Při Eulerově popisu proudění v kanálu nebo kolem obtékaných těles je pozorovatel popisující proudění pevně spojen se souřadnicovou soustavou a ta je napevno zakotvena k soustavě nehybných těles. Při tom pozorovatel sleduje, co se děje ve všech bodech prostoru vyplněného prouděním, a to v průběhu času. Jeden z pozorovaných bodů je na obr. 5.1.2. Sleduje se, jak se v tomto bodě mění rychlost co do velikosti a směru v závislosti na čase, dále jak se zde mění stavové parametry p, ρ, T . Z kinematického hlediska je tedy prvotním údajem rychlost $\vec{w}(x, y, z, t)$, z ní se určí dráha a zrychlení:

$$\vec{w}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{s}}{dt} \rightarrow \vec{s} = \int \vec{w} dt + C, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{w}}{dt} \quad (5.1.1)$$

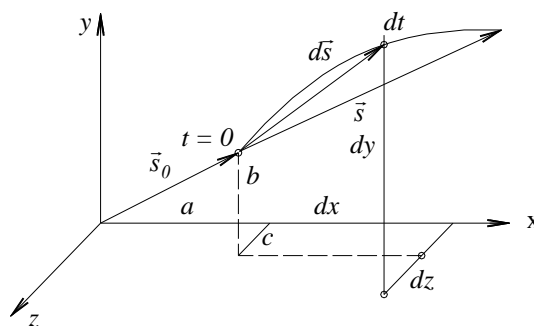
$$w_x(x, y, z, t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow x = \int w_x dt + C_x, \quad a_x = \frac{\partial w_x}{\partial t} \quad (5.1.2)$$

$$w_y(x, y, z, t) = \frac{dy}{dt} \rightarrow y = \int w_y dt + C_y, \quad a_y = \frac{\partial w_y}{\partial t} \quad (5.1.3)$$

$$w_z(x, y, z, t) = \frac{dz}{dt} \rightarrow z = \int w_z dt + C_z, \quad a_z = \frac{\partial w_z}{\partial t} \quad (5.1.4)$$

b) Lagrangeovo vyjádření

Při Lagrangeově popisu se pozorovatel pohybuje s tekutinou, tj. je pevně spojen s částicemi tekutiny, takže obtékaná pevná tělesa mu ubíhají dozadu. Z onoho ohromného množství částic vybereme jedinou, jejíž poloha v čase $t = 0$ je $x = a, y = b, z = c$, což jsou složky vektoru \vec{s}_0 . Pozorovatel se posouvá s částicí a zjišťuje, v kterém bodě prostoru se částice postupem času nalézá. Prvotně se tedy určuje dráha částice $\vec{s}(a, b, c, t)$. Z dráhy se potom stanoví rychlost a zrychlení. Výchozí a, b, c jsou tzv. tekutinové souřadnice dané částice.



Obr. 5.1.3

$$\vec{s}(a, b, c, t) \rightarrow \vec{w} = \frac{d\vec{s}}{dt} \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} \quad (5.1.5)$$

$$x(a, b, c, t) \rightarrow w_x = \frac{\partial x}{\partial t} \rightarrow a_x = \frac{\partial w_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (5.1.6)$$

$$y(a, b, c, t) \rightarrow w_y = \frac{\partial y}{\partial t} \rightarrow a_y = \frac{\partial w_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (5.1.7)$$

$$z(a, b, c, t) \rightarrow w_z = \frac{\partial z}{\partial t} \rightarrow a_z = \frac{\partial w_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (5.1.8)$$

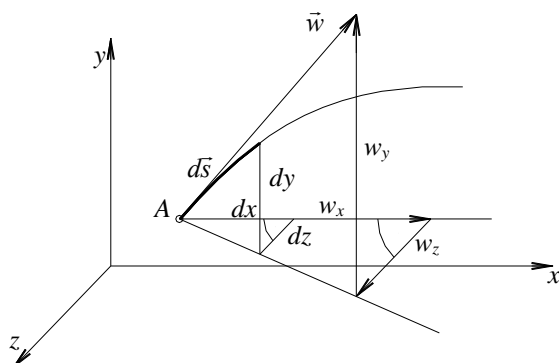
Rozdíl mezi obojím popisem je tedy v tom, že Lagrangeův prvotně určuje dráhu, kdežto Eulerův popis prvotně stanovuje proudnice. Jak brzy uvidíme, proudnice úzce souvisí s rychlostmi. Vždy je třeba jasně říci, zda popis proudění je Eulerův či Lagrangeův, jinak vznikají nedorozumění, která můžeme dokumentovat na čase t .

Vypusťme v čase $t = 0$ z určitého místa částici A, která poletí rovnoměrně přímočaře rychlostí w . Za ní s určitým zpožděním vyšleme částici B o téže konstantní rychlosti w . Částice proletí sledovaným bodem (Eulerův popis) v časech t_A^E, t_B^E , kde $t_A^E < t_B^E$. Při Lagrangeově popisu je v okamžiku průletu bodem dráha

částice A větší než B , tj. $l_A > l_B$, a protože $l_A = wt_A^L$, $l_B = wt_B^L$, plyne z toho, že čas $t_A^L > t_B^L$. Čili u Eulerova popisu má děj, který předchází, nižší čas, u Lagrangeova popisu naopak vyšší čas.

Dále budeme používat jen Eulerovo vyjádření pohybu.

5.2 Proudnice



Obr. 5.2.1

Proudnice jsou čáry v prostoru, jejichž tečny udávají směr proudění v bodech dotyku. Proudnice znázorňují okamžitý stav proudění, jsou obdobou silokřivek v silovém poli.

Rovnice proudnice plyne z definice a k odvození použijeme obr. 5.2.1. Element proudnice $d\vec{s}$ a rychlost proudění v bodě A proudnice rozložíme do složek. Dostaneme tak podobné pravoúhlé trojúhelníky, pro něž platí:

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} = \frac{dz}{w_z} \quad (5.2.1)$$

Každá proudnice je spojitá křivka. U obtékaných těles začíná před tělesem v nekonečnu a končí za tělesem rovněž v nekonečnu. V kapalinách začínají proudnice na volné hladině a končí ve výtoku. V některých případech je proudnice uzavřenou křivkou, např. u potenciálního víru. Libovolným bodem v prostoru při ustáleném proudění prochází jen jedna proudnice, jinými slovy proudnice se nemohou protínat. Pohyb tekutiny podél proudnice je postupný – pohyb tekutiny ve směru kolmém na proudnici není možný.

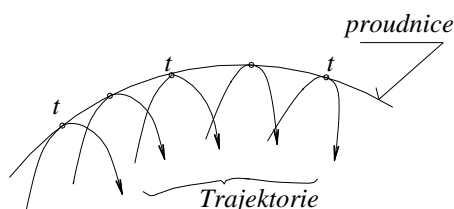
Proudnice lze na volné hladině i uvnitř tekutiny zviditelnit malými částicemi, které jsou tekutinou unášeny (piliny, plavuňový prach, kouř, barvivo apod.). Krátkodobé fotografie těchto unášených částic se jeví jako malé úsečky, jejichž délka je úměrná rychlosti proudění.

5.3 Dráha částice

Dráha částice (trajektorie) je čára, kterou opisuje částice tekutiny v prostoru v průběhu času. Při Eulerově popisu dráhu vypočteme z (5.3.1), a to následnou integrací dle (5.3.2)

$$\vec{w} = \frac{d\vec{s}}{dt}, \quad w_x = \frac{dx}{dt}, \quad w_y = \frac{dy}{dt}, \quad w_z = \frac{dz}{dt} \quad (5.3.1)$$

$$\vec{s} = \int \vec{w} dt + \vec{s}_0, \quad x = \int w_x dt + a, \quad y = \int w_y dt + b, \quad z = \int w_z dt + c \quad (5.3.2)$$



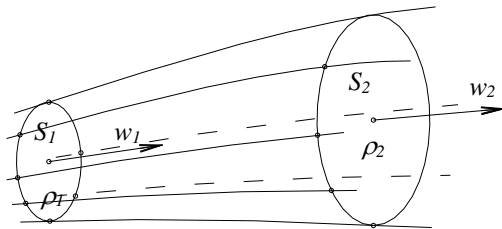
Obr. 5.3.1

Integrační konstanty a , b , c jsou vlastně „tekutinové souřadnice“ v Lagrangeově vyjádření pohybu tekutiny.

Již z definic je zřejmé, že dráhy částic a proudnice se obecně neztotožňují. Proudnice udává směr rychlosti proudění v daném okamžiku, kdežto trajektorie udává časový průběh poloh částice v prostoru. Dráhy částic se ztotožňují s proudnicemi jen v ustáleném proudění. V neustáleném proudění je proudnice obalovou křivkou drah částic dle sousedního obrázku. V něm se všechny částice nalézají na obalové čáře drah v témž okamžiku t . Proudnicí tedy tvoří velké množství částic, dráhu však pouze jedna.

5.4. Proudová trubice – vírové vlákno

Předpokládejme ustálené proudění v nějakém prostoru. V něm zvolíme uzavřenou křivku. Každým bodem této čáry prochází jedna proudnice. Protože pohyb ve směru kolmém na proudnici není možný, vytvoří zmíněné proudnice jakýsi plášť, který se chová jako neprostupná stěna skutečné trubice. Plášť je onou **proudovou trubicí**, již nemůže vniknout ani vytéci žádná částička prostředí, vyloučíme-li molekulární pohyby. Obsah proudové trubice se nazývá **proudové vlákno**.



Obr.5.4.1

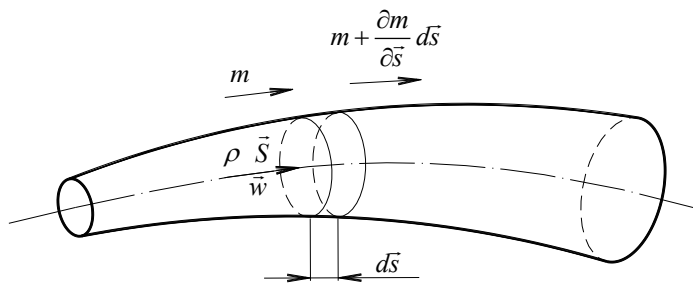
Není-li průřez proudové trubice velký, lze v každém průřezu počítat s nepatrnými odchylkami rychlosti, tlaku, hustoty, (teploty) od jejich průřezově středních hodnot $w, p, \rho, (T)$. Při běžném proudění proudovou trubicí, které je ustálené, a při němž žádná tekutina uvnitř nevzniká ani se neztrácí, musí oběma průřezy S_1, S_2 protéci totéž množství tekutiny $\dot{m}[\text{kg/s}]$

$$\dot{m} = \rho_1 S_1 w_1 = \rho_2 S_2 w_2 \quad (5.4.1)$$

Jestliže průřezy S_1, S_2 budou kruhové a tekutina v proudové trubici by se otáčela kolem spojnice středů všech kruhových průřezů jako pevné těleso, stane se z proudového vlákna **vírové vlákno**. Vírové vlákno však není odděleno od ostatní tekutiny, naopak ji svým pohybem strhává do rotačního pohybu. Později bude uveden vztah pro výpočet rychlosti, kterou vírové vlákno indukuje v libovolném místě svého okolí.

5.5. Rovnice spojitosti pro proudovou trubicí

Rovnice spojitosti (kontinuity) je zákonem zachování hmotnosti. Odvodíme ji při použití obr. 5.5.1. Na něm je zakreslena proudová trubice, o níž budeme předpokládat, že se v průběhu času mění, tj. jako třeba céva živého organismu se nadouvá a stahuje. Dalším obecným předpokladem bude stlačitelnost proudění v trubici,



Obr. 5.5.1

proměnlivost hustoty s časem a polohou. V trubici je vytknutý elementární objem $dV = \bar{S}d\bar{s}$ průřezu \bar{S} , délky $d\bar{s}$. Jestliže levým řezem do vytknutého objemu vstupuje množství tekutiny m , pak pravým vystupuje $m + (\partial m / \partial \bar{s}) d\bar{s}$. To, že vystupuje více tekutiny než vstoupilo se musí projevit v úbytku hmotnosti uvnitř vytknutého objemu, což je způsobeno snížením hustoty ρ uvnitř. Tato rovnost je zachycena ve výchozí rov. (5.5.1), v níž znaménkem (-) se respektuje zmíněný úbytek hmotnosti. V následující

rovnici je průtočná hmotnost m za čas dt vyjádřena pomocí průřezu \bar{S} , rychlosti \bar{w} a hustoty ρ a objemu $dV = \bar{S}d\bar{s}$. Po zřejmých úpravách dostáváme rovnici kontinuity pro proudovou trubicí (5.5.4). Nebude-li se průřez měnit s časem, ale jen s polohou, rovnice se zjednoduší na (5.5.5). Bude-li i hustota ρ funkcí pouze polohy, dostaneme (5.5.6). Bude-li vše proměnné, a pouze průřez \bar{S} konstantní, obdržíme (5.5.7). Tato poslední rovnice platí rovněž pro prostorové proudění, její tenzorové vyjádření je (5.5.8).

$$\frac{\partial m}{\partial \bar{s}} d\bar{s} = - \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} \cdot dt \quad (5.5.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{S} \vec{w} dt)}{\partial \vec{s}} d\vec{s} = - \frac{\partial(\rho \cdot \vec{S} d\vec{s})}{\partial t} \cdot dt \quad (5.5.2)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{S} \vec{w})}{\partial \vec{s}} \cdot d\vec{s} dt = - \frac{\partial(\rho \cdot \vec{S})}{\partial t} \cdot d\vec{s} dt \quad (5.5.3)$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot \vec{S})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \vec{S} \vec{w})}{\partial \vec{s}} = 0 \quad (5.5.4)$$

Pro $\vec{S} = \vec{S}(\vec{s})$ $\vec{S} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \vec{S} \vec{w})}{\partial \vec{s}} = 0 \quad (5.5.5)$

Pro $\vec{S} = \vec{S}(\vec{s}), \rho = \rho(\vec{s})$: $0 + \frac{\partial(\rho \vec{S} \vec{w})}{\partial \vec{s}} = 0 \rightarrow \rho \vec{S} \vec{w} = konst \quad (5.5.6)$

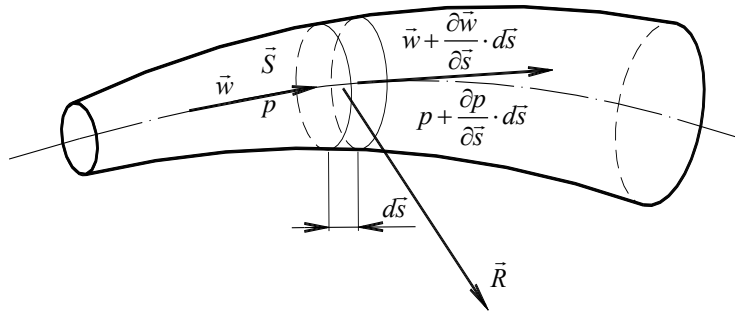
Pro $\vec{S} = konst$: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \vec{w})}{\partial \vec{s}} = 0 \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{w}) = 0 \right) \quad (5.5.7)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_k)}{\partial k} = 0 \quad (5.5.8)$$

Poznámka: uvedené rovnice jsou buď čistě skalární, když se jedná o hmotnostní bilanci, např. (5.5.1), nebo vektorové, např. (5.5.4), když členy reprezentují hmotnostní toky. Protože součiny jsou vesměs skalární, je třeba dbát na to, aby ve skalárních rovnicích měly členy sudý počet vektorů a ve vektorových rovnicích lichý počet vektorů.

5.6 Eulerova rovnice pro proudovou trubici

Eulerova rovnice je pohybová rovnice pro proudění, zde v proudové trubici, která zanedbává tření, vazkost. Odvození je provedeno pro element hmotnosti tekutiny o velikosti objemu $\vec{S} d\vec{s}$. Působí na něj dvě síly:



Obr. 5.6.1

hmotnostní od vnějšího setrvačného zrychlení \vec{R} a povrchová síla od tlaku p zleva a tlaku $p + \frac{\partial p}{\partial \vec{s}} \cdot d\vec{s}$ zprava (síly od p směřují proti sobě a tedy se ruší). Uvedenými silami naplníme pohybovou rovnici (5.6.1). Po vydělení rov. (5.6.2) součinem $\rho \vec{S} d\vec{s}$ dostáváme výslednou pohybovou rovnici (5.6.3) ve vektorovém tvaru a po rozepsání vektorů do složek a rozvedení substancionální derivace na levé straně její tenzorový zápis (5.6.4)

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i \quad (5.6.1)$$

$$\rho \vec{S} d\vec{s} \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho \vec{S} d\vec{s} \vec{R} - \frac{\partial p}{\partial \vec{s}} d\vec{s} \vec{S} \quad \left| : \rho \vec{S} d\vec{s} \right. \quad (5.6.2)$$

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{R} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \vec{s}} \quad \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w} \vec{\nabla}) \vec{w} = \vec{R} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) \quad (5.6.3)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + w_k \cdot \frac{\partial w_i}{\partial k} = R_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial i} \quad (5.6.4)$$

Eulerova rovnice (5.6.4) byla sice odvozena pro proudovou trubici, platí však pro prostorové třídimenzionální proudění rovněž, průřez se zde nevyskytuje. První člen na její levé straně je evidentně zrychlení. Tím všechny ostatní členy jsou rovněž zrychlení. Vynásobíme-li každý člen hmotností, a mohla by to být hmotnost jednotková, stávají se z členů síly. Vzato odleva doprava máme zde síly: místní nestacionární sílu, vnitřní setrvačnou sílu, vnější setrvačnou sílu a tlakovou sílu. Vnitřní setrvačná síla je způsobena změnou rychlosti při přechodu do sousedního místa proudového pole, kdežto vnější setrvačná síla je především dána zrychleními pohybu stěn kanálu, popř. gravitačním zrychlením g . Místní síla neexistuje u ustáleného proudění.

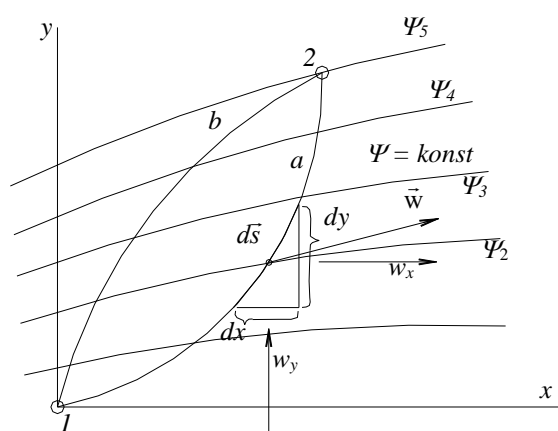
Eulerova rovnice doplňuje soustavu stavové rovnice a rovnice kontinuity pro řešení p , ρ , w , ovšem při zanedbání vazkosti.

6. Potenciální proudění

Potenciální proudění je nejjednodušší proudění, jaké vůbec může existovat. Ze všech vlastností, které může proudění mít, respektuje pouze kontinuitu a setrvačnost. Setrvačnost je ta vlastnost proudící tekutiny, která způsobuje, že při obtékání ostrého rohu se proudnice ostře nelomí, ale přecházejí do nového směru obloukem. Kontinuitou zde rozumíme splnění rovnice spojitosti. Souhrn vlastností potenciálního proudění je: nevazké, nestlačitelné, ustálené, dvourozměrné, nevířivé (pracuje se s modelovými částicemi). Pravdou však je, že v nutných případech lze i do potenciálního proudění zavést vazkost, stlačitelnost nebo nestacionaritu. Prostorové proudění se řeší jen tehdy, probíhá-li v soustavě rovnoběžných rovin.

Potenciální proudění zavedli matematici, kteří při zkoumání určitých tříd funkcí zjistili, že jejich chování odpovídá proudění tekutiny. Tím je daná preciznost matematických podmínek, za nichž je toto proudění definované. Pro inženýry je však nepříjemné poněkud zvláštní názvosloví. Pracuje se zde se dvěma funkcemi: s proudovou funkcí Ψ a s potenciálem rychlosti Φ . Známe-li je, nebo alespoň jednu z nich, máme vyhráno, protože jejich určitým derivováním obdržíme složky rychlosti proudění a tlak v proudovém poli. Za funkcí Ψ je ukryto průtočné množství \dot{V} , za funkcí Φ cirkulace Γ . Pomocí Ψ a Φ lze řešit obtékání některých plošných těles nebo průtok kanálem.

6.1 Proudová funkce



Obr. 6.1.1

Uvažujme rovinné proudění v prostoru mezi dvěma body 1 a 2. Pro dané proudové pole je průtočný objem tekutiny protékající mezi oběma body stejný a nezávislý na tvaru spojnice 12, podél které proudění integrujeme ($1a2$, $1b2$). Množství proteklé tekutiny závisí jen na poloze bodu 2, když 1 v počátku souřadnicové soustavy budeme považovat za pevný. Tvrzení je zdůvodnitelné již výchozím definičním vztahem (6.1.1) mezi průtočným objemem \dot{V} a proudovou funkcí Ψ . Zde $d\Psi$ je totálním diferenciálem a jeho integrál mezi 1 a 2 nezávisí na integrační cestě.

Jestliže rozepíšeme elementární průtočný objem $d\dot{V}$ procházející ploškou $d\vec{s} \cdot \vec{k}$ pomocí dx , dy , w_x , w_y (znaménko +), když tekutina objem Δ

opouští, (-), když do Δ vstupuje) na jedné straně a totální diferenciál na straně druhé, dostaneme (6.1.3). Porovnáním členů u dy dostaneme výraz pro výpočet w_x a porovnáním členů u dx rychlost w_y , viz (6.1.4)

$$\dot{V} = \int_1^2 d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 \quad (6.1.1)$$

$$d\dot{V} = d\Psi \quad (6.1.2)$$

$$w_x dy - w_y dx = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy \quad (6.1.3)$$

$$w_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad w_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6.1.4)$$

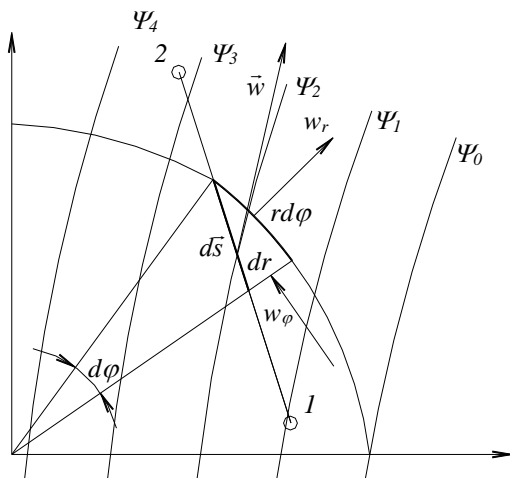
Z dříve odvozené rovnice proudnice (5.2.1) můžeme dokázat, že **proudnice je čára $\Psi = konst$** :

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} \quad (5.2.1)$$

$$w_x dy - w_y dx = 0 \quad (6.1.5)$$

$$(6.1.4) \rightarrow (6.1.5): \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dy = 0 \rightarrow d\Psi = 0 \rightarrow \Psi = konst \quad (6.1.6)$$

Důležité je umět vyjádřit proudovou funkci a její vztah ke složkám rychlosti v polárních souřadnicích. Použijeme k tomu obr. 6.1.2, v němž opět sledujeme průtok $d\dot{V}$ elementem plošky $d\vec{s} \cdot \vec{k}$. Postup je shodný s předchozím v kartézských souřadnicích:



Obr. 6.1.2

$$d\dot{V} = d\Psi \quad (6.1.2)$$

$$w_r r d\varphi - w_\varphi dr = \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} d\varphi \quad (6.1.7)$$

$$w_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad w_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (6.1.8)$$

Jedním z dalších úkolů bude najít proudové funkce Ψ pro některá jednodušší proudová pole, abychom jejich příslušným derivováním dostali složky rychlosti, popř. tlak v libovolných místech oněch polí. Vztah pro výpočet tlaku bude odvozen později. Čáry $\Psi = konst$ jsou proudnice a zobrazují se tak, aby vždy mezi sousedními dvěma protékalo stejné objemové množství tekutiny, tj. $\Delta\dot{V} = \Psi_1 - \Psi_0 = \Psi_2 - \Psi_1 = \dots$ atd.

6.2 Potenciál rychlosti

K definování potenciálu rychlosti v pravoúhlých souřadnicích použijeme obr. 6.1.1. Tak jako diference proudové funkce je objemové průtočné množství ($\dot{V} = \Delta\Psi$), tak diference potenciálu rychlosti Φ je cirkulace Γ ($\Gamma = \Delta\Phi$). Cirkulace podél nějaké křivky se vypočte jako křivkový integrál z tečných složek rychlosti násobených přílehlými elementy té křivky, což je vlastně integrál ze skalárních součinů $\vec{w} d\vec{s}$. Takto pořízenou cirkulaci Γ položíme rovnou $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$, viz (6.2.1). Další postup je analogií práce s proudovou funkcí.

$$\Gamma = \int_1^2 \bar{w} d\bar{s} = \int_1^2 d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \quad (6.2.1)$$

$$d\Gamma = d\Phi \quad (6.2.2)$$

$$w_x dx + w_y dy = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \quad (6.2.3)$$

$$w_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad w_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (6.2.4)$$

Vztahy pro Φ v polárních souřadnicích obdržíme s pomocí obr. 6.1.2:

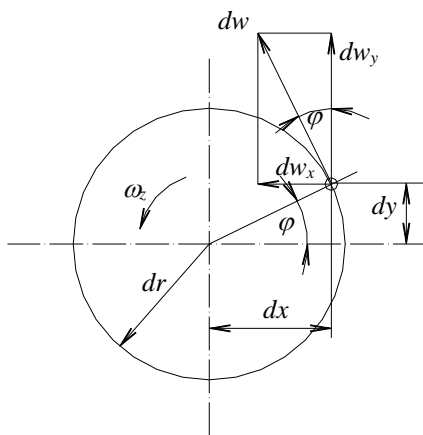
$$d\Gamma = d\Phi \quad (6.2.2)$$

$$w_r dr + w_\varphi r d\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} d\varphi \quad (6.2.5)$$

$$w_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad w_\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (6.2.6)$$

Čáry $\Phi = konst.$ jsou tzv. ekvipotenciály. Jsou to křivky konstantní cirkulace. Jestliže se zobrazují graficky, pak tedy tak, aby mezi sousedními ekvipotenciálami byl stejný rozdíl cirkulací $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0 = \Phi_2 - \Phi_1 \dots$ atd.

6.3 Rotor rychlosti



Obr. 6.3.1

Pojem „rotor rychlosti“ je v proudění důležitý proto, že vyjadřuje, zda proudění je vířivé či nevířivé. Při nevířivém proudění konají modelové částice jen posuvný pohyb, nikoli rotační. Rotor či rotace byl nadefinován již ve stati 3.3 jako matematická entita $rot \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$, tj. jako vektorový součin Hamiltonova operátoru s vektorem \vec{a} . Zde osvětlíme fyzikální význam rotoru v případě, že vektorem je rychlost \vec{w} v dvourozměrném proudovém poli.

Na obr. 6.3.1 máme modelovou částici tekutiny o poloměru dr , která se otáčí kolem osy z úhlovou rychlostí ω_z . Na jejím povrchu je obvodová rychlost dw rozložena do složek dw_x , dw_y . Úhlovou rychlost můžeme vyjádřit jednou z dw_x , podruhé z dw_y . Když obě ω_z sečteme, dostáváme výraz (6.3.3) pro výpočet rotoru kolem osy z. Je to třetí složka vektoru rotoru (3.3.8).

$$dw_x = -dw \sin \varphi = -dr \omega_z \frac{dy}{dr} \quad \rightarrow \quad \omega_z = -\frac{dw_x}{dy} = -\frac{\partial w_x}{\partial y} \quad (6.3.1)$$

$$dw_y = dw \cos \varphi = dr \omega_z \frac{dx}{dr} \quad \rightarrow \quad \omega_z = \frac{dw_y}{dx} = \frac{\partial w_y}{\partial x} \quad (6.3.2)$$

$$2\omega_z = \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \quad (6.3.3)$$

$$\text{Výraz } 2\vec{\omega}_z \text{ psaný vektorově je rotor rychlosti: } 2\vec{\omega}_z = \text{rot}\vec{w}_z = \vec{k} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \quad (6.3.4)$$

$$\text{Ve 3D prostoru je } \text{rot}\vec{w} = \text{rot}\vec{w}_x + \text{rot}\vec{w}_y + \text{rot}\vec{w}_z \quad (6.3.5)$$

Rotor rychlosti v daném místě proudového pole je dvojnásobkem úhlové rychlosti částice, která zde rotuje kolem vlastního středu. Jestliže částice nerotuje, je zde u rovinné úlohy $\omega_z = 0 \rightarrow \text{rot}\vec{w}_z = 0$. Podmínkou nevířivosti proudění je tedy

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \text{rot}\vec{w}_z = 0 \quad (6.3.6)$$

6.4 Cirkulace rychlosti

Cirkulaci rychlosti označujeme integrál tečných složek rychlosti násobených elementy čáry, podél které integrujeme, tedy integrál ze skalárních součinů $\vec{w}d\vec{s}$ dle (6.2.1). Bude-li křivka uzavřená, můžeme na cirkulaci aplikovat Stokesovu větu (3.4.1), která tak váže cirkulaci s rotací, dle (6.4.1)

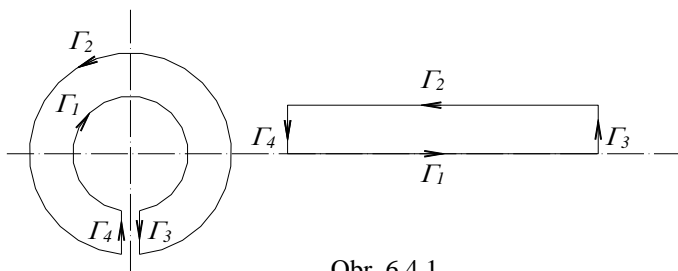
$$\Gamma = \int_l \vec{w}d\vec{s} \quad (6.2.1)$$

$$\Gamma = \oint \vec{w}d\vec{s} = \int_S \text{rot}\vec{w}d\vec{S} \quad (6.4.1)$$

Poslední vztah umožňuje nahradit výpočet cirkulace z definičního vztahu (6.2.1) výpočtem po ploše z rotací. Stačí, aby $\text{rot}\vec{w} \neq 0$ v jediném místě plochy a cirkulace se stává rovněž nenulovou. Jaké jsou vlastnosti cirkulace:

- Cirkulace Γ podél uzavřené křivky v potenciálním proudění je nulová.
- Cirkulace $\Gamma \neq 0$, když křivka obepíná vírové vlákno.
- V nevazkém proudění je cirkulace podél různých uzavřených křivek v téže rovině, které obepínají jedno a totéž vírové vlákno kolmé na rovinu, stejná.

Důkaz: mějme dle obr. 6.4.1 dvě kružnice, jejichž společným středem prochází vírové vlákno, kolmé na rovinu kružnic. Předpokládejme, že cirkulace na obou kružnicích jsou různé, a to Γ_1, Γ_2 . Mezikruží přesekneme dvěma blízkými radiálními řezy, kde budeme mít stejné, ale opačné cirkulace Γ_3, Γ_4 . Když mezikruží natáhneme do tvaru obdélníka, musí cirkulace na jeho obvodě být nulová, protože obdélník neobepíná žádné vírové vlákno, proudění v něm je potenciální. Z rovnosti $\Gamma_3 = \Gamma_4$ potom plyne rovnost $\Gamma_1 = \Gamma_2$, předpoklad o jejich rozdílnosti byl chybný.



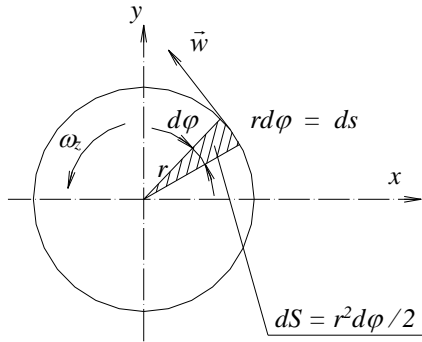
Obr. 6.4.1

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_3 - \Gamma_2 - \Gamma_4 = 0 \quad (6.4.2)$$

$$\Gamma_3 = \Gamma_4 \quad (6.4.3)$$

$$\text{tedy } \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0 \quad (6.4.4)$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma = \text{konst} \quad (6.4.5)$$

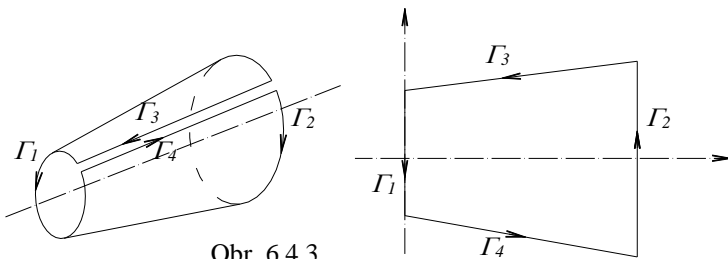


Obr. 6.4.2

Na točivém rychlostním poli kolem vírového středu můžeme prokázat platnost Stokesovy věty (6.4.1). Vyjdeme při tom z definice cirkulace jako křivkového integrálu a dojdeme k plošnému integrálu rotace:

$$\Gamma = \oint \vec{w} d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_S r \omega_z r d\varphi = \int_S \omega_z 2dS = \int_S 2\vec{\omega}_z d\vec{S} \quad (6.4.6)$$

- d) V nevazkém proudění je cirkulace v celém prostoru kolem vírového vlákna konstantní. Důkaz je obdobou rovinného případu. Je-li cirkulace v rovinách kolmých na vírové vlákno konstantní, musí být navíc i stejná.



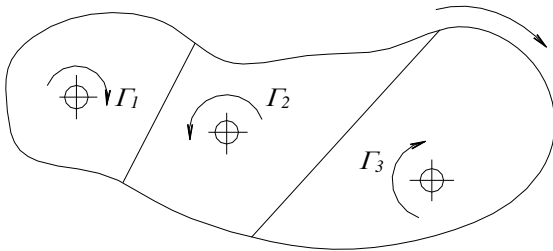
Obr. 6.4.3

$$\Gamma = \Gamma_4 + \Gamma_2 - \Gamma_3 - \Gamma_1 = 0 \quad (6.4.7)$$

protože

$$\Gamma_3 = \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2 = konst \quad (6.4.8)$$

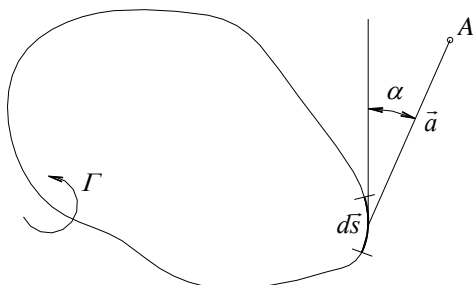
- e) Je-li uvnitř křivky v rovině více vírových vláken, pak se každé obepne dle obr. 6.4.4 vlastní křivkou a celková cirkulace Γ se složí z dílčích $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.



Obr. 6.4.4

$$\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2 + \Gamma_3 \quad (6.4.9)$$

- f) Biot – Savartův zákon udává rychlost proudění v určitém bodě proudového pole, která je indukovaná vírovým vláknem otáčejícím se v tekutině o cirkulaci Γ .



Obr.6.4.5

Na obr 6.4.5 je uzavřené vírové vlákno, na něm je vytknutý úsek $d\vec{s}$. Biot–Savartovým zákonem (6.4.10) se vypočítá rychlost $d\vec{w}$ v bodě A , vzdáleném \vec{a} od úseku $d\vec{s}$, indukovaná tímto elementárním úsekem vírového vlákna. Rychlost \vec{w} indukovanou celým vírovým vláknem dostaneme následnou integrací podél vlákna dle (6.4.11).

$$d\vec{w} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{a} \times d\vec{s}}{a^3} \quad (6.4.10)$$

$$\vec{w} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{a \sin \alpha ds}{a^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{\sin \alpha ds}{a^2} \quad (6.4.11)$$

Vektor rychlosti $d\vec{w}$ je kolmý k rovině vektorů \vec{a} , $d\vec{s}$, protože je výsledkem jejich vektorového součinu. Směr se určí pravidlem pravé ruky nebo logicky podle směru rotace vírového vlákna. Totéž platí o rychlosti \vec{w} , je-li plocha vírového vlákna rovinná, např. kruh ve 2D.

g) Rychlost indukovaná přímým vírovým vláknem v místě A na obr. 6.4.6. Poloha bodu A vzhledem k vírovému vláknu délky l je daná úhly α_1, α_2 a kolmou vzdáleností r , dle obr. 6.4.6. Integrál (6.4.12) je řešen substitucemi pro a, s jako funkce α a konstantního r . Výsledek je (6.4.14).

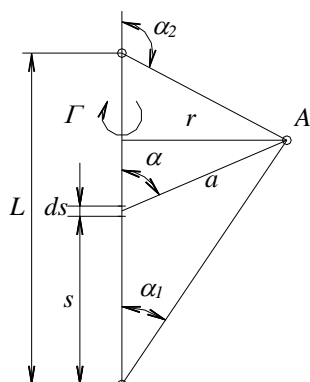
$$w = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^l \frac{a \sin \alpha ds}{a^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^l \frac{\sin \alpha ds}{a^2} \quad (6.4.12)$$

$$a = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad s = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha_1} - \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad ds = \frac{r d\alpha}{\sin^2 \alpha} \quad (6.4.13)$$

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha \sin^2 \alpha r d\alpha}{r^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\Gamma}{4\pi r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (6.4.14)$$

Jestliže vírové vlákno protáhneme na obou koncích do nekonečna, pak $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi$ a indukovaná rychlost v místě r bude:

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi r} (1 + 1) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (6.4.15)$$



Obr. 6.4.6

Poslední výraz popisuje otáčivé rychlostní pole v rovině kolem vírového středu při nevazké tekutině. Protože Γ , jak již víme, je konstantní, s rostoucím r rychlost hyperbolicky klesá. Naopak v samotném středu, kde $r = 0$, vychází nereálná hodnota $w = \infty$. Tomu se zabráňuje tím, že se sem vkládá vírové vlákno o jistém poloměru r_0 , které se otáčí jako tuhé těleso, mající ve svém středu nulovou rychlost. Poloměr r_0 se volí tak, aby aplikační úloha na něm postavená co nejlépe odpovídala skutečnosti ověřené měřením.

6.5 Laplaceovy rovnice

Laplaceovy rovnice proudění jsou 2. Jedna je rovnicí spojitosti, druhá rovnicí nevířivosti, jež obě musí potenciální proudění splňovat.

Rovnice kontinuity pro nestlačitelné, ustálené rovinné proudění je (6.5.1). Dosadíme-li do ní za rychlosti derivace potenciálu dle (6.5.2), dostaneme první Laplaceovu rovnici :

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (6.5.1)$$

$$w_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad w_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (6.5.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{jinak } \Delta \Phi = 0 \quad (6.5.3)$$

Pro nevířivé proudění byla ve stati 6.3 udána podmínka (6.3.6). Jestliže do ní zavedeme vazby mezi rychlostmi a proudovou funkcí Ψ , dle (6.5.4), obdržíme druhou Laplaceovu rovnici proudění :

$$\operatorname{rot} w_z = \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0 \quad (6.3.6)$$

$$w_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad w_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6.5.4)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.5.5)$$

Jestliže o některé funkci tvrdíme, že je funkcí proudovou či potenciálem rychlosti, musí splňovat příslušnou Laplaceovu rovnici.

6.6 Tlak v potenciálním proudění

Výpočet tlaku uskutečnime pro potenciální proudění, u něhož zdůrazníme, že je nevazké, nevířivé ($\text{rot} \vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{w} = 0$), bez vnějších setrvačných zrychlení ($\vec{R} = 0$). Vyjdeme z Eulerovy rovnice (5.6.3), kterou můžeme zapsat pomocí operátoru $\vec{\nabla}$ dle (6.6.2). Ve vektorovém počtu se dokazuje vztah (6.6.3). Dosadíme jej po vynechání rotoru do operátorové Eulerovy rovnice. V rovnici nahradíme vektor rychlosti potenciálem Φ , tj. položíme $\vec{w} = \vec{\nabla} \Phi$ a operátor $\vec{\nabla}$ můžeme „vytknout“, viz (6.6.7). Protože operátor aplikovaný na výraz v závorce dává nulovou hodnotu, musí být výraz v závorce roven konstantě. Konstanta C je skutečnou konstantou vůči poloze, může být však funkcí času u nestacionárních proudění. Z rov (6.6.8) vypočteme žádoucí tlak.

$$\vec{w} = \vec{\nabla} \Phi, \quad \text{protože } \vec{w} = \vec{i} w_x + \vec{j} w_y = \vec{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi = \vec{\nabla} \Phi \quad (6.6.1)$$

$$\text{rot} \vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{w} \text{ bylo odvozeno ve stati o matematice v mech. tekutin} \quad (3.3.8)$$

$$\text{Eulerova rov.} \quad \frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{R} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \vec{s}} \quad (5.6.3)$$

$$\text{pro } \vec{R} = 0 \quad \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w} \vec{\nabla}) \vec{w} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (6.6.2)$$

$$\text{vektorový počet udává:} \quad \frac{1}{2} \vec{\nabla} w^2 = \vec{w} \times (\vec{\nabla} \times \vec{w}) + (\vec{w} \vec{\nabla}) \vec{w} \quad (6.6.3)$$

$$\text{pro nevířivé proudění } \vec{\nabla} \times \vec{w} = 0: \quad \frac{1}{2} \vec{\nabla} w^2 = (\vec{w} \vec{\nabla}) \vec{w} \quad (6.6.4)$$

$$(6.6.4) \rightarrow (6.6.2): \quad \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} w^2 = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (6.6.5)$$

$$(6.6.1) \rightarrow (6.6.5): \quad \frac{\partial (\vec{\nabla} \Phi)}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} w^2 + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = 0 \quad (6.6.6)$$

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (6.6.7)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C(t) \quad (6.6.8)$$

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{w^2}{2} + \rho C(t) \quad (6.6.9)$$

Poslední dvě rovnice jsou tzv. Bernoulliovy. Dají se použít pro potenciální dvourozměrové proudění, ustálené nebo neustálené. U nestacionárních případů se musí k výpočtu tlaku znát potenciál rychlosti jako funkce času, $\Phi(t)$. Takový případ bude uveden níže.

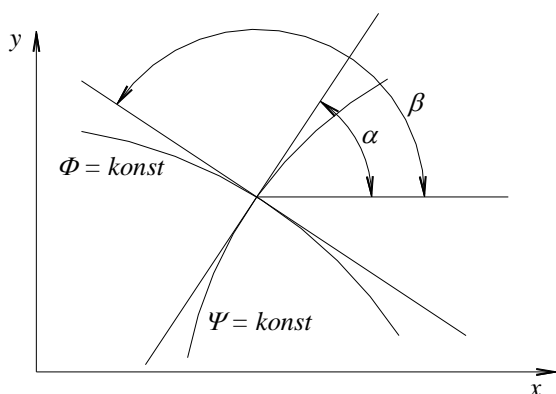
6.7 Vztah mezi Φ a Ψ

Vazba mezi potenciálem rychlosti a proudovou funkcí plyne z dříve uvedených vztahů (6.2.4) a (6.1.4):

$$w_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad w_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6.7.1)$$

Dvojice rovnic (6.7.1) jsou tzv. Cauchy – Riemannovy podmínky. Jsou-li splněny, je proudění potenciální.

V rovině x, y jsou ekvipotenciály $\Phi = konst$ a proudnice $\Psi = konst$ čáry vzájemně kolmé. Toto dokážeme počtově, jestliže prokážeme, že úhel $\beta - \alpha = 90^\circ$.



Obr. 6.7.1

Proudnice: $\Psi = konst$

$$d\Psi = 0 = w_x dy - w_y dx \rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\Psi} = \frac{w_y}{w_x} = \operatorname{tg} \alpha \quad (6.7.2)$$

Ekvipotenciála: $\Phi = konst$

$$d\Phi = 0 = w_x dx + w_y dy \rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\Phi} = -\frac{w_x}{w_y} = \operatorname{tg} \beta \quad (6.7.3)$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \rightarrow \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha = -1 \quad (6.7.4)$$

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 - 1} = \infty \quad (6.7.5)$$

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} \quad (6.7.6)$$

7. Jednoduchá proudění

Máme zde na mysli jednoduchá potenciální proudění v rovině, jako je rovnoběžkový proud, zřídlo, propad a potenciální vír, která jsou výchozími modely pro proudění složitější. Určitými superposicemi se obdrží proudění ještě složitější, která patří do případů vnějšího obtékání těles, do tzv. vnější aerodynamiky. Do stati jednoduchá proudění zařadíme i jeden případ vnitřní aerodynamiky. Je sice jednorozměrový, ale zato nestacionární a s vloženým třením.

U každého typu proudění určíme jeho proudovou funkci Ψ či potenciál rychlosti Φ . U dvourozměrových úloh zobrazíme síť proudnic nebo i ekvipotenciál. Funkcemi Φ a Ψ je dáno rozložení rychlosti proudění v rovině, u nestacionární úlohy i tlak.

7.1 Rovnoběžkový proud

Rovnoběžkovým proudem se rozumí přímočaré proudění konstantní rychlostí ve směru osy x nebo y . Proudění ve směru x bude mít rychlost $w_x = a = konst$. Proudovou funkci dostaneme z podmínky (7.1.1),

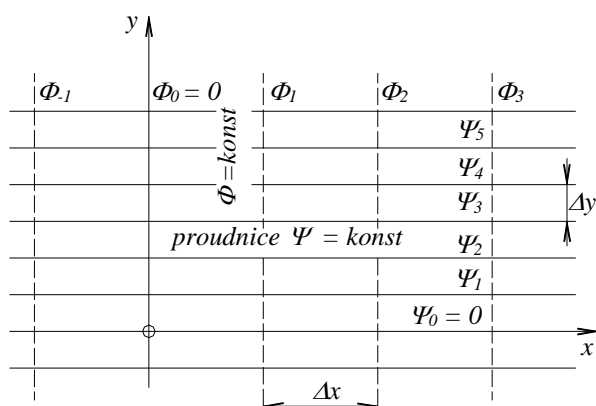
potenciál rychlosti ze (7.1.3).

$$w_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = a \rightarrow d\Psi = a dy \rightarrow \Psi = ay + C \quad (7.1.1)$$

$$\text{ať pro } y=0 \text{ je } \Psi=0, \text{ potom } C=0 \rightarrow \Psi = ay \quad (7.1.2)$$

$$w_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a \rightarrow d\Phi = a dx \rightarrow \Phi = ax + C \quad (7.1.3)$$

$$\text{ať pro } x=0 \text{ je } \Phi=0, \text{ potom } C=0 \rightarrow \Phi = ax \quad (7.1.4)$$



Obr. 7.1.1

Proudnice $\Psi = konst$ podle (7.1.2) jsou přímky $y = konst$, tj. rovnoběžky s osou x . Jednotlivé proudnice se kreslí tak, aby mezi vždy sousedními protékalo stejné objemové množství

$$\Delta \dot{V} = \Delta \Psi = a \Delta y = \Psi_0 - \Psi_{-1} = \Psi_1 - \Psi_0 = \Psi_2 - \Psi_1 \text{ atd.}$$

Vzdálenost proudnic $\Delta y = \Delta \dot{V} / a$.

Ekvipotenciály $\Phi = konst$ jsou podle (7.1.4) přímky $x = konst$, tj. rovnoběžky s osou y . Jednotlivé ekvipotenciály se sestavují tak, že mezi vždy sousedními je stejná změna cirkulace

$$\Delta \Gamma = \Delta \Phi = a \Delta x = \Phi_0 - \Phi_{-1} = \Phi_1 - \Phi_0 = \Phi_2 - \Phi_1 \text{ atd.}$$

Vzdálenost ekvipotenciál Δx je tedy daná volbou $\Delta \Gamma$: $\Delta x = \Delta \Gamma / a$.

Obdobně bychom postupovali u rovnoběžkového proudu ve směru y o rychlosti $w_y = b$. Dostaneme:

$$\Psi = -bx + C, \quad \Phi = ay + C \quad (7.1.5)$$

Opět lze zajistit, aby $C=0$. Při znázornění čar $\Psi = konst$ a $\Phi = konst$ si proudnice vymění místo s ekvipotenciálami.

7.2 Zřídlo , propad

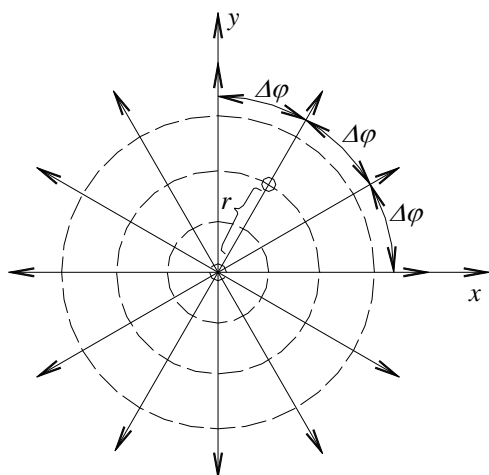
Zřídlo je proudění, u kterého tekutina vytéká z bodového zdroje rovnoměrně na všechny strany v rovině. Průtočné objemové množství se nazývá vydatností zřídla $\dot{V} [m^2/s]$.

Propad je opakem zřídla. Je to proudění, které se v rovině sbíhá rovnoměrně ze všech stran do jednoho bodu a zde mizí. Intenzita mizení tekutiny je tzv. pohltivost propadu $-\dot{V} [m^2/s]$. Pohltivost je záporně vzatá vydatnost.

Zřídlo ve 3D prostoru je přímkou, ze které vytéká tekutina stejnou intenzitou podél celé délky rovnoměrně do okolí s vydatností $\dot{V} [m^3/s]$. Zůstaneme však u rovinné verze zřídla a propadu. S ohledem na osově symetrickou geometrii zřídla či propadu budeme k popisu používat polární souřadnice r, φ , z nichž v případě potřeby lze přejít na x, y .

Z rovnice spojitosti plyne, že každou soustřednou kružnicí proteče totéž množství \dot{V} , které považujeme za dané, viz (7.2.1). Odtud vypočteme radiální rychlost w_r . Obvodová složka rychlosti je samozřejmě nulová. Proudovou funkci Ψ a potenciál rychlosti Φ pro zřídlo odvodíme z dříve zjištěných vztahů (6.1.8) a (6.2.6).

$$\dot{V} = 2\pi r w_r \rightarrow w_r = \frac{\dot{V}}{2\pi r}, \quad w_\varphi = 0 \quad (7.2.1)$$



Obr. 7.2.1

$$w_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \frac{\dot{V}}{2\pi r} \quad (6.1.8)$$

$$d\Psi = \frac{\dot{V}}{2\pi} d\varphi \quad (7.2.2)$$

$$\Psi = \frac{\dot{V}}{2\pi} \varphi + C_\Psi \quad (7.2.3)$$

$$C_\Psi : \text{pro } \varphi = 0, \Psi = 0 \rightarrow C_\Psi = 0 \quad (7.2.4)$$

$$\Psi = \frac{\dot{V}}{2\pi} \varphi \quad (7.2.5)$$

$$w_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\dot{V}}{2\pi r} \rightarrow d\Phi = \frac{\dot{V}}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r} \quad (6.2.6)$$

$$\Phi = \frac{\dot{V}}{2\pi} \ln r + C_\Phi \quad (7.2.6)$$

$$C_\Phi : \text{pro } r = r_0, \Phi = 0 \rightarrow C_\Phi = -\frac{\dot{V}}{2\pi} \cdot \ln r_0 \quad (7.2.7)$$

$$\Phi = \frac{\dot{V}}{2\pi} \cdot \ln \frac{r}{r_0} \quad (7.2.8)$$

Z rovnice pro proudovou funkci (7.2.5) plyne, že $\Psi = konst$, když $\varphi = konst$, to znamená, že proudnice jsou radiální paprsky. Nulová proudnice je totožná s osou x , ostatní proudnice propouštějí mezi sebou stejné průtoky $\Delta \dot{V} = \Delta \Psi$, čemuž odpovídá stejný úhel $\Delta \varphi$.

Z rovnice (7.2.8) pro potenciál rychlosti Φ vyplývá, že $\Phi = konst$, když $r = konst$, a to splňuje ekvipotenciála ve tvaru kružnice. Ekvipotenciály jsou tedy soustředné kružnice se středem ve zřídle, které se konstruují tak, aby vždy mezi dvěma sousedními byla stejná změna cirkulace $\Delta \Gamma = \Delta \Phi$.

Vztahy pro propad jsou stejné až na znaménko u pohltivosti ($-\dot{V}$). Proudění ze zřídla či do propadu splňuje rovnici spojitosti a nevířivosti v celém rozsahu s výjimkou samotného středu. Ten se jako singulární bod z proudového pole vyjímá.

7.3 Potenciální vír

Potenciální vír je proudový útvar, v němž všechny částice tekutiny obíhají po kružnicových drahách kolem vírového středu. Ač se jedná o vír, proudění je to ve všech bodech nevířivé, tj. modelové částice se neotáčejí kolem vlastních středů. Výjimkou je střed, který se z proudění vyjímá, nebo se nahrazuje vírovým vláknem, jež se otáčí jako tuhé těleso, viz závěr stati 6.4 o indukované rychlosti.

Z indukované rychlosti (6.4.14) vyjdeme při hledání proudové funkce Ψ a potenciálu rychlosti Φ . Použijeme-li opět polární souřadnice, pak indukovaná rychlost má obvodový směr, je to tedy složka w_φ , zatímco $w_r = 0$. Z w_φ vypočteme Ψ a Φ :

$$w_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad w_r = 0 \quad (6.4.14)$$

$$w_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (7.3.1)$$

$$d\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{dr}{r} \quad (7.3.2)$$

$$\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + C_\Psi \quad (7.3.3)$$

$$C_\Psi: \quad r = r_0, \Psi = 0 \rightarrow C_\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_0 \quad (7.3.4)$$

Proudová funkce potenciálního víru $\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \quad (7.3.5)$

$$w_\varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (7.3.6)$$

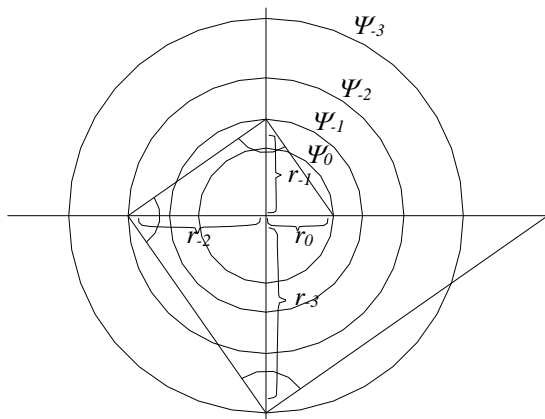
$$d\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} d\varphi \quad (7.3.7)$$

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \varphi + C_\Phi, \text{ zajistíme } C_\Phi = 0 \quad (7.3.8)$$

Potenciál potenciálního víru $\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi \quad (7.3.9)$

Proudnice potenciálního víru $\Psi = konst$ jsou kružnice $r = konst$. Ekvipotenciály $\Phi = konst$ jsou radiální paprsky $\varphi = konst$. Je vidět, že kružnice jsou u víru proudnicemi, zatím co u zřídla jsou ekvipotenciálami. Radiální paprsky jsou u víru ekvipotenciálami a u zřídla proudnicemi. Čili tvar proudnic a ekvipotenciál víru a zřídla je prohozený.

Sestrojení proudnic plyne z rovnosti průtočných množství mezi nimi. Indexem značíme pořadové číslo proudnice ($\Psi_0 = 0$ pro r_0) a znaménkem kladnou či zápornou hodnotu Ψ .



Obr. 7.3.1

$$\Delta\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r_{-1}}{r_0} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r_{-2}}{r_{-1}} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r_{-3}}{r_{-2}} \quad (7.3.10)$$

$$\frac{r_{-1}}{r_0} = \frac{r_{-2}}{r_{-1}} = \frac{r_{-3}}{r_{-2}} \quad (7.3.11)$$

$$r_{-1}^2 = r_0 \cdot r_{-2} \quad (7.3.12)$$

Poslední vztah je Euklidova věta o střední výšce v pravouhlém trojúhelníku, která váže velikost poloměrů r_0, r_{-1}, r_{-2} tří sousedních kružnic. Graficky se poloměr proudnic určí velmi rychle postupem naznačeným na obr. 7.3.1. První 2 poloměry se však musí určit výpočtem. Záporné proudnice mají poloměry větší než r_0 , kladné menší než r_0 .

7.4 Přenos tlakového signálu trubící

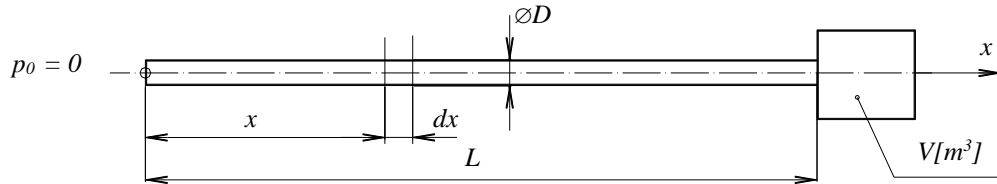
Někdy se nemůže umístit tlakové čidlo přímo do místa, kde se má tlak měřit, protože prostředí je příliš agresivní (v jaderném reaktoru), horké (v peci) apod., než aby tam instrumentace snímače mohla dlouhodobě vydržet. Je však možné čidlo umístit mimo do přijatelného prostředí a spojit je s měřeným místem dlouhou trubící. Trubicí a komůrkou před membránou čidla se periodický signál cestou zkreslí, změní amplitudu a fázi. Určit poměr tlaku na konci a začátku přenosové cesty je nejdůležitějším úkolem řešené úlohy.

Cennou je řada vedlejších produktů, ať již z pohledu analytického řešení nebo fyzikálních vlastností přenosu. Jejich výčet je bohatý a měly by se v procesu výpočtu sledovat: přeměna soustavy 3 výchozích

parciálních rovnic proudění na jedinou vlnovou, vložení tření do Eulerovy rovnice, výpočet tlaku z potenciálu rychlosti, řešení vlnové rovnice Fourierovou metodou, vliv tření na šíření malých tlakových poruch, vznik stojatého vlnění z postupných vln, vlastní frekvence přenosového systému.

Mějme dlouhou trubici $\varnothing D$, délky L , na jejímž konci je komůrka snímače o objemu V . Do osy trubice položíme osu x se začátkem v místě měření, kde je budící $p = p_0 + \Delta p_0 e^{i\omega t}$ (pro jednoduchost položíme $p_0 = 0$). V libovolném místě x můžeme rychlost w_x , tlak p a hustotu ρ rozložit do středních hodnot a malých odchylek w'_x , p' , ρ' . Střední rychlost $w_{x0} = 0$, protože trubice je na konci uzavřená, $p_0 = 0$ pro jednoduchost. Tekutina je stlačitelná a platí pro ni 3 rovnice na řádcích (7.4.6) až (7.4.8). Vlevo jsou obecné tvary rovnic, vpravo verze pro jednorozměrné proudění v trubici po zjednodušení dané tím, že $\rho' \ll \rho_0$ a $w'_x \rightarrow 0$.

$$p = p_0 + \Delta p_0 e^{i\omega t}$$



Obr. 7.4.1

Výchozí podmínky: $w_x/a < 1$ (podzvukové proudění) (7.4.1)

$$D/\lambda < 1 \quad (\lambda \text{ je vlnová délka signálu}) \quad (7.4.2)$$

$$w_x = w_x(x,t) = w_{x0} + w'_x(x,t) = 0 + w'_x(x,t) \quad (7.4.3)$$

$$p = p(x,t) = p_0 + p'(x,t) = 0 + p'(x,t) \quad (7.4.4)$$

$$\rho = \rho(x,t) = \rho_0 + \rho'(x,t) = \rho_0 + \rho'(x,t), \quad \rho' \ll \rho_0 \quad (7.4.5)$$

Výchozí rovnice

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rychlost zvuku} \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = a^2 \\ \text{Rovnice spojitosti} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} = 0 \\ \text{Eulerova rovnice} \quad \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \underbrace{w_x}_0 = R_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial \rho} = a_0^2 \quad (\text{bez tření}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w_x}{\partial x} = 0 \quad * \\ \frac{\partial w_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad ** \end{array} \quad (7.4.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rovnice spojitosti} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} = 0 \\ \text{Eulerova rovnice} \quad \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \underbrace{w_x}_0 = R_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w_x}{\partial x} = 0 \quad * \\ \frac{\partial w_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad ** \end{array} \quad (7.4.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rovnice spojitosti} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} = 0 \\ \text{Eulerova rovnice} \quad \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial w_x}{\partial x} \underbrace{w_x}_0 = R_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w_x}{\partial x} = 0 \quad * \\ \frac{\partial w_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad ** \end{array} \quad (7.4.8)$$

Rovnici (7.4.8) na pravé straně doplníme o vliv tření formálně podobným členem na bázi třetího faktoru $R_{tř}$. Pokles tlaku $dp_{tř}$ vlivem tření v trubici na délce dx se vyjádří: $dp_{tř} = R_{tř} w_x \rho_0 dx$. Při laminárním proudění $R_{tř} = 32\nu/D^2$, kde ν je součinitel kinematické vazkosti ($\nu_{vzd} \doteq 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$). Rovnice (7.4.8) tak nabude tvar (7.4.9). Vypočteme z ní $\partial p/\partial x$ (7.4.10) a po zavedení potenciálu rychlosti (7.4.11) určíme vzorec pro výpočet tlaku (7.4.15). U aditivní integrační konstanty $C(t)$ můžeme zajistit, aby byla nulová při podmínce $\Phi = 0$, $\partial\Phi/\partial t = 0$, $p = 0$.

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_{tř}}{dx} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - R_{tř} w_x \quad (7.4.9)$$

$$* \quad \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} = \frac{\partial[(\rho_0 + \rho')w'_x]}{\partial x} \doteq \frac{\partial(\rho_0 w'_x)}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial w'_x}{\partial x}$$

$$** \quad \frac{\partial w_x}{\partial x} w_x = \frac{\partial(0 + w'_x)}{\partial x} \cdot (0 + w'_x) = \frac{\partial w'_x}{\partial x} w'_x = 0 \quad \text{protože } w'_x \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial w_x}{\partial t} - \rho_0 R_{tr} w_x \quad (7.4.10)$$

$$w_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \text{kde } \Phi(x, t) \quad (7.4.11)$$

(7.4.11) → (7.4.10):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \rho_0 R_{tr} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (7.4.12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \rho_0 R_{tr} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (7.4.13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + R_{tr} \Phi \right] \quad (7.4.14)$$

$$p = -\rho_0 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + R_{tr} \Phi \right] + C(t) \quad \text{zajistíme } C = 0 \quad (7.4.15)$$

Porovnáme-li vzorec pro výpočet tlaku (7.4.15) s dříve odvozeným (6.6.9), chybí nám zde dynamický tlak $\rho w^2/2$, protože základní rychlost w v uzavřené trubici je nulová. Naopak je tu navíc $-\rho_0 R_{tr} \Phi$ díky tření, které se v původním vztahu neuvažovalo. Zatím jsme pracovali jen s Eulerovou rovnicí. Nyní upravíme rovnici kontinuity (7.4.7) tak, že derivaci $\partial \rho / \partial t$ rozvedeme do součinu $\partial \rho / \partial p \cdot \partial p / \partial t$, kde $\partial \rho / \partial p$ je podle (7.4.6) převrácenou hodnotou kvadrátu rychlosti zvuku a_0^2 a za tlak do $\partial p / \partial t$ dosadíme (7.4.15), viz (7.4.16). Po dosazení Φ obdržíme vlnovou rovnici (7.4.17), která určitým způsobem nahrazuje výchozí soustavu tří rovnic.

$$\rho_0 \frac{\partial w_x}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{a_0^2} (-\rho_0) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + R_{tr} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (7.4.16)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{a_0^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + R_{tr} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad \dots \quad \text{vlnová rovnice pro } \Phi \quad (7.4.17)$$

Vlnová rovnice je parciální diferenciální hyperbolického typu. Poslouží k určení $\Phi(x, t)$, potřebnému k určení šíření tlaku v trubici. K řešení použijeme Fourierovu metodu, která parciální derivace nahradí obyčejnými. V metodě se Φ předpokládá ve tvaru součinu dvou funkcí, z nichž jedna je funkcí pouze polohy x a druhá funkcí jen času t . Časovou funkci $T(t)$ můžeme předpokládat shodnou s buzením na počátku trubice: $T(t) = \exp(i\omega t)$, kdežto polohovou funkci $X(x)$ musíme určit, a to tak, že předpokládané $\Phi(x, t)$ zpětně dosadíme do vlnové rovnice, viz (7.4.19). V následující úpravě je za zadané veličiny tvořící komplexní číslo dosazena substituce γ^2 . Z parciální vlnové rovnice jsme obdrželi obyčejnou diferenciální rovnici, která se snadno vyřeší v exponenciálním tvaru $X = \exp kx$ dle (7.4.22). Výsledné řešení $X(x)$ je na řádce (7.4.24).

$$\Phi(x, t) = X(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot e^{i\omega t} \quad (7.4.18)$$

$$(18) \rightarrow (17): \quad \frac{d^2 X}{dx^2} \cdot e^{i\omega t} = \frac{1}{a_0^2} \left(-\omega^2 X e^{i\omega t} + R_{tr} X i\omega e^{i\omega t} \right) \cdot e^{-i\omega t} \quad (7.4.19)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{a_0^2} \underbrace{\left(-\omega^2 + iR_{tr}\omega \right)}_{\gamma^2} X, \quad \gamma^2 = -\left(\frac{\omega}{a_0} \right)^2 + i \left(\frac{R_{tr}}{a_0} \right) \left(\frac{\omega}{a_0} \right) \quad (7.4.20)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \gamma^2 X, \quad \text{předpokládáme } X = e^{kx} \quad (7.4.21)$$

$$k^2 \cdot e^{kx} = \gamma^2 e^{kx} \quad (7.4.22)$$

$$k = \pm \gamma \quad (7.4.23)$$

$$X = C_1 e^{-\gamma x} + C_2 e^{\gamma x} \quad C_1, C_2 \text{ jsou integrační konstanty} \quad (7.4.24)$$

Posledním vztahem je daná druhá funkce Fourierova rozkladu a přesto nejsme hotovi. Neznáme totiž γ , známe komplexní číslo γ^2 . O γ budeme předpokládat, že je rovněž komplexním číslem, které zaznamenáme $\gamma = \alpha + i\beta$. Takto rozepsané γ dosadíme zpět do (7.4.20), porovnáme reálné a imaginární části a dostaneme dvě rovnice pro neznámé α, β . Detaily jejich výpočtu nejsou uvedeny, ale vyjdou podle (7.4.29) a (7.4.30).

$$\gamma = \alpha + i\beta \quad (7.4.25)$$

$$(25) \rightarrow (20): \quad \alpha^2 + i2\alpha\beta - \beta^2 = -\left(\frac{\omega}{a_0}\right)^2 + i\left(\frac{R_{tr}}{a_0}\right)\left(\frac{\omega}{a_0}\right) \quad (7.4.26)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{reálné části} \\ \text{imag. části} \end{array} \right\} \alpha, \beta = ? \quad (7.4.27)$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha^2 - \beta^2 = -\left(\frac{\omega}{a_0}\right)^2 \\ 2\alpha\beta = \left(\frac{R_{tr}}{a_0}\right)\left(\frac{\omega}{a_0}\right) \end{array} \right\} \quad (7.4.28)$$

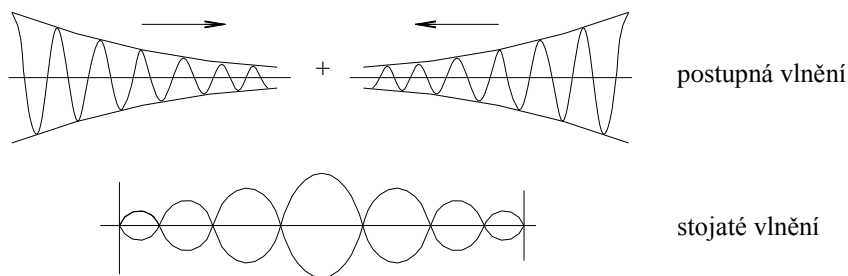
$$\alpha_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{a_0}\right) \left[-1 \pm \left[1 + \left(\frac{R_{tr}}{\omega}\right)^2 \right]^{1/2} \right]^{+1/2} \quad (7.4.29)$$

$$\beta_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{R_{tr}}{a_0}\right) \left[-1 \pm \left[1 + \left(\frac{R_{tr}}{\omega}\right)^2 \right]^{1/2} \right]^{-1/2} \quad (7.4.30)$$

Výsledek, tj. $\Phi(x, t)$ dostaneme dosazením $X(x)$ do Fourierova rozkladu (7.4.18). Zřejmými úpravami vznikne (7.4.32). Jsou to dvě vlny, první běží zleva doprava, tj. s rostoucím časem se posouvá do vyšších x , a při tom její amplituda exponenciálně klesá. Druhá vlna naopak běží zprava doleva a amplituda se exponenciálně mění jak naznačeno graficky. Součtem postupných vlnění vzniká stojaté vlnění Φ .

$$\Phi(x, t) = e^{i\omega t} [C_1 e^{-\gamma x} + C_2 e^{\gamma x}] = e^{i\omega t} [C_1 e^{-(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha+i\beta)x}] \quad (7.4.31)$$

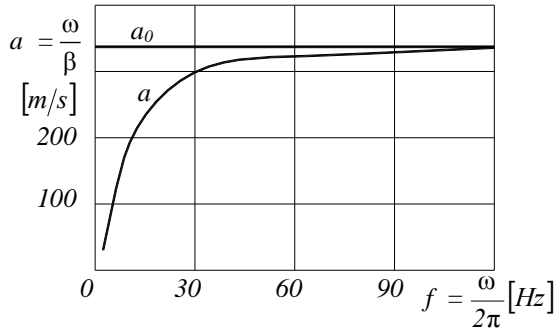
$$= C_1 e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \beta x)} + C_2 e^{\alpha x} e^{i(\omega t + \beta x)} \quad (7.4.32)$$



Obr. 7.4.2

Rychlost postupných vlnění Φ plyne z exponentů $(\omega t - \beta x)$, $(\omega t + \beta x)$. Sledujeme-li např. vrchol reálné vlny jdoucí zleva doprava, musí být hodnota 1. závorky trvale nulová pro různá x, t . Vytknutím β nabývají oba členy závorky význam dráhy x , kterou vyjádříme pomocí rychlosti a jako at .

$$(\omega t - \beta x) = \beta \left(\frac{\omega}{\beta} t - x \right) = \beta (at - x) \quad \rightarrow \quad a = \frac{\omega}{\beta} \quad (7.4.33)$$



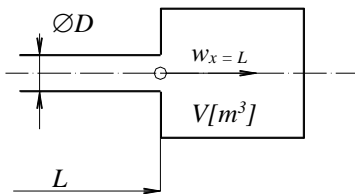
Obr. 7.4.3

Tlak se šíří v trubici stejnou rychlostí jako Φ , o čemž se přesvědčíme, když Φ (7.4.32) dosadíme do tlaku p (7.4.15). V grafu na obr. 7.4.3 je vynesena závislost rychlosti šíření tlakových poruch $a = \omega/\beta$ na frekvenci $f = \omega/2\pi$. Vidíme, že při nízkých frekvencích je tato rychlost velmi ovlivněna třením a je podstatně nižší než rychlost malých tlakových poruch a_0 v otevřeném prostředí bez tření (\equiv rychlost zvuku). S rostoucí frekvencí se a asymptoticky blíží a_0 . Výpočet byl proveden pro vzduch o $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ v trubici o $\varnothing D = 1,1 \text{ mm}$

$$(R_{\text{tr}} = 32\nu/D, \quad a_0 = \sqrt{\kappa r T} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 3000} = 341 \text{ m/s})$$

Jak je to vlastně v souhrnu s rychlostmi w_0, w', a, a_0 ? Základní rychlost $w_0 = 0$ vlivem uzavření trubice na zadním konci. Částice tekutiny však konají kmitavé pohyby ve směru x rychlostí w' , kterými se přenáší hybnost a tedy tlak od částice k částici. Rychlost šíření tlaku v trubici je a , bez tření a_0 .

a) Podmínka natékání plynu do komůrky tlakového čidla



Obr. 7.4.4

Tato podmínka je okrajovou podmínkou pro uzavřený konec trubice a slouží ku stanovení jedné z integračních konstant C_1, C_2 . Přírůstek hmotnosti v komůrce dm za elementární čas dt musel protéci koncovým průřezem trubice za tuto dobu, viz (7.4.35). Odtud vypočteme koncovou rychlost $w'_x|_{x=L} = w_x|_{x=L}$.

$$dm = V d\rho \quad (7.4.34)$$

$$(\rho_0 + \rho') w_x|_{x=L} S dt = V d\rho \quad (7.4.35)$$

$$w_x|_{x=L} = \frac{V}{\rho_0 S} \frac{d\rho}{dt} = \frac{V}{\rho_0 S} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{V}{\rho_0 S a^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \quad (7.4.36)$$

b) Vlastní frekvence systému Ω

Trubice s komůrkou, kde se přenáší periodický tlakový signál, tvoří systém. Každý takový kmitavý systém má vlastní frekvenci, při níž je nulový útlum, tzn., že sebemenší porucha způsobí silné kmitání, zde tlaku. To by se zdálo u našeho systému výhodou, budící sinusový tlak by došel k čidlu náležitě zesílen, s vysokými amplitudami. Přesto se oblasti rezonance budícího signálu s vlastní frekvencí systému vyhýbáme, protože při malé odchylce frekvence od vlastní f_v dochází ke značnému poklesu zesílení a ke změně fáze mezi výstupním a vstupním signálem. Znalost vlastní frekvence je tudíž důležitá.

Při řešení vlastního kmitání se vychází z nulového buzení soustavy, tj. z nulového tlaku na vstupu dle podmínky a). K určení druhé konstanty máme podmínku b) pro konec s komůrkou. Tuto podmínku můžeme upravit podle (7.4.39), protože $\partial p/\partial t = i\Omega p$, jak uvedeno na řádce (7.4.37). Řešení vstupní okrajové podmínky dává rovnost obou konstant až na znaménko. Řešení druhé podmínky na řádcích (7.4.45) a (7.4.46) nevede k cíli, protože konstanta C se v rovnici vykrátí. To je v pořádku, u vlastního kmitání nelze určit absolutní hodnotu kmitající veličiny. Místo toho jsme obdrželi tzv. frekvenční rovnici (7.4.47), z níž můžeme vypočítat vlastní frekvenci Ω . Ježto rovnice je komplexní, lze očekávat, že úhlová vlastní frekvence bude rovněž komplexní: $\Omega = \text{Re } \Omega + i \text{Im } \Omega$. Výpočet reálné $\text{Re } \Omega$ a imaginární složky $\text{Im } \Omega$ není jednoduchý, vede k němu rozdělení frekvenční rovnice na reálnou a imaginární část.

$$p = \Delta p e^{i\Omega t} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = i\Omega \Delta p e^{i\Omega t} = i\Omega p \quad (7.4.37)$$

$$\text{podmínky pro } C_1, C_2: \quad \text{a) } x=0, p=0 \quad (7.4.38)$$

$$\text{b) } x=L, w_x = \frac{V}{\rho_0 S a^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{V \beta^2}{\rho_0 S \Omega^2} \cdot i \Omega p = \frac{i V \beta^2}{\rho_0 S \Omega} \cdot p \quad (7.4.39)$$

$$\text{a) } -\rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + R_{tr} \Phi \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.4.40)$$

$$(31) \rightarrow (40) \quad -\rho_0 \left[i \Omega e^{i \Omega t} (C_1 + C_2) + R_{tr} e^{i \Omega t} (C_1 + C_2) \right] = 0 \quad (7.4.41)$$

$$-\rho_0 e^{i \Omega t} (C_1 + C_2) [i \Omega + R_{tr}] = 0 \quad (7.4.42)$$

$$C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_1 = -C_2 = C \quad (7.4.43)$$

$$\text{Stav po určení } C_1 = -C_2 = C: \quad \Phi(x, t) = C e^{i \Omega t} [e^{-\gamma x} - e^{\gamma x}] \quad (7.4.44)$$

$$\text{b) } w_{x=L} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{i V \beta^2}{\rho_0 S \Omega} (-\rho_0) \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + R_{tr} \Phi \right] \Big|_{x=L} \quad (7.4.45)$$

$$(44) \rightarrow (45): \quad -\gamma C e^{i \Omega t} [e^{-\gamma L} + e^{\gamma L}] = \frac{i V \beta^2}{\rho_0 S \Omega} (-\rho_0) [C i \Omega e^{i \Omega t} (e^{-\gamma L} - e^{\gamma L}) + R_{tr} C e^{i \Omega t} (e^{-\gamma L} - e^{\gamma L})] \quad (7.4.46)$$

$$\gamma [e^{-\gamma L} + e^{\gamma L}] = \frac{i V \beta^2}{S \Omega} (e^{-\gamma L} - e^{\gamma L}) (i \Omega + R_{tr}) \quad (7.4.47)$$

$$\Omega = Re \Omega + i Im \Omega \quad (7.4.48)$$

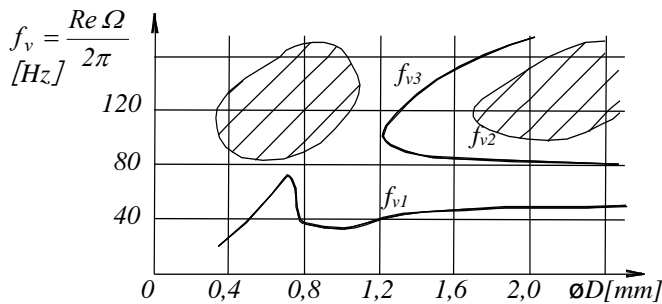
Jestliže budeme nyní $Re \Omega$, $Im \Omega$ považovat za známé, můžeme Ω dosadit do $\Phi(x, t)$ (7.4.44) a po průhledné úpravě, kdy exponenty s i dáme k sobě a reálné exponenty rovněž sečteme, obdržíme (7.4.50).

$$\Phi = C e^{i \Omega t} (e^{-\gamma x} - e^{\gamma x}) \quad (7.4.44)$$

$$\Phi = C e^{i(Re \Omega + i Im \Omega)t} [e^{-(\alpha + i \beta)x} - e^{(\alpha + i \beta)x}] \quad (7.4.49)$$

$$\Phi = C [e^{-(Im \Omega t + \alpha x)} e^{i(Re \Omega t - \beta x)} - e^{-(Im \Omega t - \alpha x)} e^{i(Re \Omega t + \beta x)}] \quad (7.4.50)$$

Poslední rovnice popisuje 2 běžící vlny, první se suno zleva doprava, druhá naopak, jejich amplitudy mají exponenciální průběh, který se však mění s časem. Reálná část vlastní frekvence v závislosti na $\varnothing D$ trubice je vynesena na obr. 7.4.5.



Obr. 7.4.5

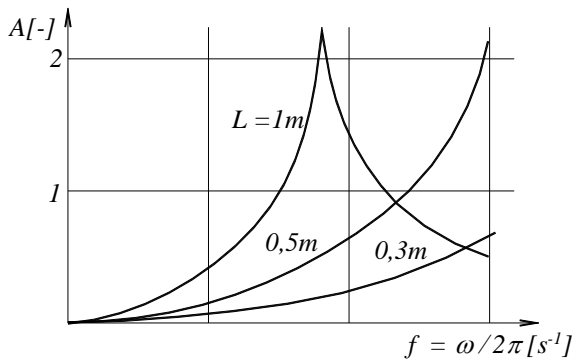
Výsledkový diagram platí pro $L = 1m$, $V = 0,95 \text{ cm}^3$, $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Za daných podmínek, při trubičkách o průměru menším než $1,2 \text{ mm}$, má systém jednu vlastní frekvenci, při průměrech větších tři vlastní frekvence. Již bylo řečeno, že vlastními frekvencím se máme vyhnout a upřednostnit oblasti vyšrafované na obrázku. Neexistence vlastní frekvence při abnormálně malých průměrech může být jak skutečnost, tak numerická chyba.

c) Poměr výstupního a vstupního tlaku

Při řešení poměru tlaků musíme ve vzorci pro Φ (7.4.32) především určit integrační konstanty C_1, C_2 z počáteční a) a koncové podmínky b). Konstanty z komplexních rovnic budou zřejmě také komplexní, jak naznačeno na rádcích (7.4.51), (7.4.52). Poměr tlaků $p_{x=L}/p_{x=0}$ je opět komplexní a dá se uvést několika způsoby. Pokud chceme znát pro měření skutečný poměr tlaků, vezmeme z něj reálnou část ($A_1, A \cos \varphi$). Průběh A je na obr. 7.4.6.

$$\Phi = C_1 e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \beta x)} + C_2 e^{\alpha x} e^{i(\omega t + \beta x)} \quad (7.4.32)$$

$$C_1, C_2 = ?$$



Obr. 7.4.6

$$\text{a) } x = 0, \quad p = \Delta p e^{i\omega t} \quad (7.4.51)$$

$$\text{b) } x = L, \quad w_{x=L} = \frac{iV\beta^2}{\rho_0 S \omega} \cdot p \quad (7.4.52)$$

$$C_1 = \text{Re } C_1 + i \text{Im } C_1 \quad (7.4.53)$$

$$C_2 = \text{Re } C_2 + i \text{Im } C_2 \quad (7.4.54)$$

$$\frac{p_{x=L}}{p_{x=0}} = \frac{-\rho_0 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + R_{\text{tr}} \Phi \right]_{x=L}}{\Delta p e^{i\omega t}} \quad (7.4.55)$$

$$\frac{p_{x=L}}{p_{x=0}} = A_1 + iA_2 = A(\cos \varphi + i \sin \varphi) = A e^{i\varphi} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} e^{i \arctg \frac{A_2}{A_1}} \quad (7.4.56)$$

Výsledky na obr. 7.4.6 platí pro $V = 0,95 \text{ cm}^3$, $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\varnothing D = 1,1 \text{ mm}$, $R_{\text{tr}} = 32 \nu / D^2$. S rostoucí délkou trubice se rezonanční vrchol posouvá do nižších budících frekvencí. Vrchol je štíhlý, v jeho okolí působí přenosový systém jako zesilovač, ovšem malá změna budící frekvence způsobuje značnou změnu zesílení a fáze také.

8. Složená proudění

Jednoduchá dvourozměrná potenciální proudění je možné superponovat (sečítat) a dostávají se proudění technicky zajímavější než jsou výchozí případy. Např. složením dvou zřídla se dostaneme výtok ze zřídla v blízkosti rovné stěny. Uvedeme však jen proudění, která vedou k obtékání válce, resp. válce rotujícího. Toto proudění samo o sobě má význam spíše teoretický a pedagogický, dá se ale konformně transformovat na obtékání technických dvourozměrných těles: leteckého profilu, desky různě skloněné, elipsy apod.

8.1 Skládání rovnoběžkových proudů

Složme dvě rovnoběžková proudění, jedno ve směru osy x o rychlosti $w_x = a$ a druhé rovnoběžné s osou y o rychlosti $w_y = b$. Na řádcích (8.1.2) a (8.1.3) jsou vypočteny proudové funkce obou proudění Ψ', Ψ'' a potenciály rychlosti Φ', Φ'' . Integrační konstanty byly stanoveny tak, aby byly nulové. Stanovené $\Psi', \Psi'', \Phi', \Phi''$ opravdu náležejí potenciálním prouděním, protože splňují Laplaceovy rovnice (6.5.3), (6.5.5).

$$w_x = a, \quad w_y = b \quad (8.1.1)$$

$$w_x = a = \frac{\partial \Psi'}{\partial y} = \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \rightarrow \Psi' = ay, \quad \Phi' = ax \quad (8.1.2)$$

$$w_y = b = -\frac{\partial \Psi''}{\partial x} = \frac{\partial \Phi''}{\partial y} \rightarrow \Psi'' = -bx, \quad \Phi'' = by \quad (8.1.3)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.5.3), (6.5.5)$$

Proudění, které vznikne složením obou základních proudění má Ψ, Φ vzniklá prostým součtem Ψ', Ψ'' resp. Φ', Φ'' . Jestliže výchozí funkce byly potenciální, musí být i funkce vzniklá jejich sečtením potenciální. Že tomu tak je, můžeme se přesvědčit tím, že opět dosadíme do Laplaceových rovnic.

$$\Psi = \Psi' + \Psi'' = ay - bx \quad (8.1.4)$$

$$\Phi = \Phi' + \Phi'' = ax + by \quad (8.1.5)$$

Složky rychlosti výsledného proudění jsou rychlosti původních proudů:

$$w_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a, \quad w_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = b \quad (8.1.6)$$

Složení ekvipotenciál $\Phi' = konst$, $\Phi'' = konst$ a proudnic $\Psi' = konst$, $\Psi'' = konst$ můžeme provést graficky. Na obr. 8.1.1 je konstrukce proudnic $\Psi = konst$.

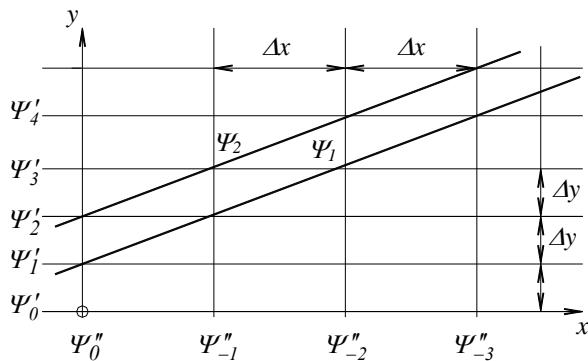
Vodorovné přímky jsou proudnicemi $\Psi' = ay = konst$ horizontálního rovnoběžkového proudu, svislice

jsou proudnicemi $\Psi'' = -bx = konst$ vertikálního proudu. Mezi sousedními proudnicemi obou proudění musí protékat stejné množství, tj.

$$\Delta \Psi' = a \Delta y = \Delta \Psi'' = -b \Delta x \quad (8.1.7)$$

$$\Delta y = -\frac{b}{a} \Delta x \quad (8.1.8)$$

Jestliže tedy zvolíme vzdálenost Δx svislých proudnic, z předchozího vztahu vypočítáme Δy vodorovných proudnic. Nulové proudnice Ψ'_0, Ψ''_0 jsou totožné s osami x, y . Při skládání se sečítají indexy výchozích proudnic, které udávají pořadová čísla hodnot proudové funkce včetně znaménka. Např. proudnice Ψ_1



Obr. 8.1.1

vznikne z průsečíků proudnic

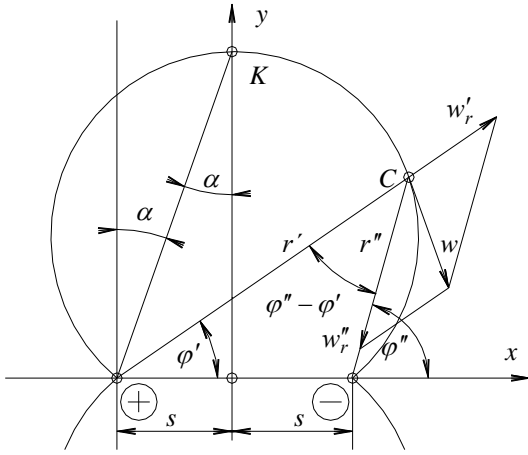
$$\Psi'_1 + \Psi''_0, \Psi'_2 + \Psi''_{-1}, \Psi'_3 + \Psi''_{-2}, \Psi'_4 + \Psi''_{-3} \text{ atd.}$$

8.2 Složení zřídla a propadu o stejné vydatnosti

Ve vzdálenosti s od počátku souřadné soustavy x, y leží na ose x zřídlo (vlevo) a propad (vpravo) o stejné vydatnosti \dot{V} . V rovině x, y proudového pole zvolíme bod C , který má v polární souřadnicové soustavě zřídla polohu danou radiusem r' a úhlem φ' , v souřadné soustavě propadu r'', φ'' . Výsledný potenciál Φ je součtem Φ', Φ'' obou proudění, obdobně Ψ je součtem Ψ', Ψ'' :

$$\Phi = \Phi' + \Phi'' = \frac{\dot{V}}{2\pi} \ln \frac{r'}{r_0} - \frac{\dot{V}}{2\pi} \ln \frac{r''}{r_0} = \frac{\dot{V}}{2\pi} \ln \frac{r'}{r''} \quad (8.2.1)$$

$$\Psi = \Psi' + \Psi'' = \frac{\dot{V}}{2\pi} \varphi' - \frac{\dot{V}}{2\pi} \varphi'' = -\frac{\dot{V}}{2\pi} (\varphi'' - \varphi') \quad (8.2.2)$$



Obr. 8.2.1

Proudnice jako čáry $\Psi = konst$ mají podle (8.2.2) $\varphi'' - \varphi' = konst$. Tento rozdílový úhel, viz obr. 8.2.1, bude konstantní, když bude obvodovým úhlem ležícím na kružnici. Na obrázku vykreslená kružnice je tedy proudnice. Nulovou proudnicí $\Psi_0 = 0$ o $\varphi'' - \varphi' = 0$ je nekonečně velká kružnice totožná s osou x od propadu doprava a od zřídla doleva.

Ostatní proudnice sestrojíme pomocí jejich průsečíků K s osou y tak, že pro každou proudnici určíme její úhel α . Bod K má $\varphi'' - \varphi' = 2\alpha$, proudová funkce v bodě K tedy bude Ψ_K dle (8.2.4). Budeme-li chtít, aby proudnic bylo n , z toho polovina nad osou x a druhá polovina pod osou x , potom průtočné množství mezi sousedními je $\Delta\dot{V}$ dle (8.2.5). Mezi nultou proudnicí Ψ_0 a sousední Ψ_{-1} proteče $\Delta\dot{V}$, mezi nultou Ψ_0 a Ψ_{-2} proteče $2\Delta\dot{V}$ atd., viz (8.2.6) až (8.2.8). Z těchto vztahů se vypočtou úhly proudnic $\alpha_0, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}$ atd.

$$K: \varphi'' - \varphi' = 2\alpha \quad (8.2.3)$$

$$\Psi_K = -\frac{\dot{V}}{2\pi} 2\alpha = -\frac{\dot{V}\alpha}{\pi} \quad (8.2.4)$$

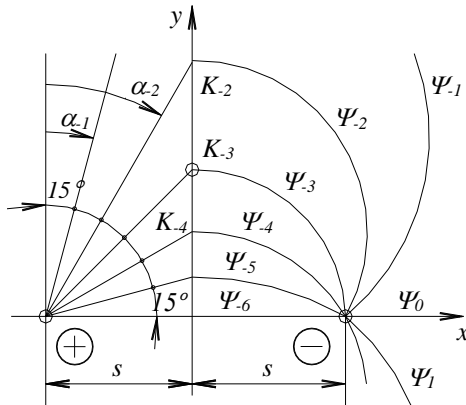
$$\Delta\dot{V} = \frac{\dot{V}}{n} \quad (8.2.5)$$

$$\Psi_{0K} - \Psi_{-1K} = 0 - \left(-\frac{\dot{V}\alpha_{-1}}{\pi} \right) = \frac{\dot{V}\alpha_{-1}}{\pi} = \Delta\dot{V} = \frac{\dot{V}}{n} \rightarrow \alpha_{-1} = \frac{\pi}{n} \quad (8.2.6)$$

$$\Psi_{0K} - \Psi_{-2K} = 0 - \left(-\frac{\dot{V}\alpha_{-2}}{\pi} \right) = \frac{\dot{V}\alpha_{-2}}{\pi} = 2\Delta\dot{V} = 2\frac{\dot{V}}{n} \rightarrow \alpha_{-2} = 2\frac{\pi}{n} = 2\alpha_{-1} \quad (8.2.7)$$

$$\Psi_{0K} - \Psi_{-3K} = 0 - \left(-\frac{\dot{V}\alpha_{-3}}{\pi} \right) = \frac{\dot{V}\alpha_{-3}}{\pi} = 3\Delta\dot{V} = 3\frac{\dot{V}}{n} \rightarrow \alpha_{-3} = 3\frac{\pi}{n} = 3\alpha_{-1} \quad (8.2.8)$$

Známe-li úhly α , sestrojíme proudnice dle obr. 8.2.2. Zde bylo zvoleno $n = 12$, takže $\pi/12 = 15^\circ$. Hodnoty proudových funkcí proudnic nad osou x jsou záporné, proto zde mají proudnice záporné indexy. Dolní proudnice mají kladné indexy, při čemž indexy udávají pořadová čísla proudnic seřazená podle hodnot jejich Ψ .



Obr. 8.2.2

Výpočet rychlosti w složeného proudění nemůžeme udělat ze složek

$$w_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad w_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (8.2.9)$$

protože neznáme $\Psi(r, \varphi)$, ale $\Psi(\varphi', \varphi'')$. Obdobně je tomu u Φ . Využijeme však podobnosti rychlostního trojúhelníka w_r', w_r'', w a průvodičového trojúhelníka $r'', r', 2s$. O jejich podobnosti platí (8.2.10), z níž vypočteme w .

$$\frac{w'_r}{w''_r} = \frac{\frac{\dot{V}}{2\pi r'}}{\frac{\dot{V}}{2\pi r''}} = \frac{r''}{r'} \rightarrow \frac{2s}{r''} = \frac{w}{w'_r} \quad (8.2.10)$$

$$w = \frac{w'_r}{r''} \cdot 2s = \frac{\dot{V}}{2\pi} \frac{2s}{r'r''} \quad (8.2.11)$$

Popsané proudění je teoretickou konstrukcí, protože u skutečného proudění by všechna tekutina tekla nejkratší cestou ze zřídla do propadu. Význam je ve vytvoření báze pro tzv. dipól, který se již podílí na proudění, vysvětlujícím mnohé jevy dynamiky tekutin.

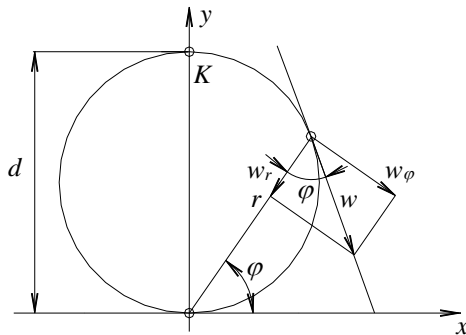
8.3 Zřídlový propad - dipól

U složeného proudění zřídlo – propad o stejné vydatnosti byla výsledná rychlost:

$$w = \frac{\dot{V}}{2\pi} \frac{2s}{r'r''} \quad (8.2.11)$$

Budeme-li zmenšovat vzdálenost zřídla a propadu $2s$, rychlost w bude dle vzorce klesat, až při $2s = 0$ bude $w = 0$. Přibližujme však zřídlo a propad tím způsobem, že s klesající vzdáleností $2s$ se zvyšuje vydatnost \dot{V} , a to tak, že součin $\dot{V}2s = M$ je konstantní. Tento limitní případ je dipól, který můžeme tedy definovat větou:

Zřídlový propad je mezní případ proudění mezi zřídlem a propadem o stejné vydatnosti \dot{V} , které se přibližují až k $2s = 0$ takovým způsobem, že součin vydatnosti a vzdálenosti je stálý. Součin $M = 2\dot{V}s = konst$ je tzv. **moment zřídlového propadu**. Rychlost w dostaneme z (8.2.11) pro $r' = r'' = r$:



Obr. 8.3.1

$$w = \frac{2\dot{V}s}{2\pi r^2} = \frac{M}{2\pi r^2} \quad (8.3.1)$$

Z přechodu zřídla a propadu na dipól je jasné, že proudnice u dipólu tvoří svazek kružnic se středy na ose y , které všechny procházejí počátkem souřadnicových soustav x , y a r , φ . Z vedlejšího obrázku je vidět, že

$$w_\varphi = -w \sin \varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (8.3.2)$$

$$w_r = -w \cos \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

(8.3.3)

Znaménka (-) u $w \sin \varphi$ a $w \cos \varphi$ jsou způsobena tím, že w_r směřuje proti směru r a w_φ proti úhlu φ . Rovnic použijeme k výpočtu Ψ a Φ dipólu.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = -w \cos \varphi = -\frac{M}{2\pi r^2} \cos \varphi \quad (8.3.4)$$

$$\text{pro } r = konst \quad d\Psi = -\frac{M}{2\pi r} \cos \varphi d\varphi \quad (8.3.5)$$

$$\Psi = -\frac{M}{2\pi r} \sin \varphi + C(r) \quad (8.3.6)$$

$$C(r): \quad \text{pro } \varphi = 0, \quad \Psi = 0 \rightarrow C(r) = 0, \text{ to bude platit pro všechna } r \quad (8.3.7)$$

$$\Psi = -\frac{M}{2\pi r} \sin \varphi \quad (8.3.8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -w \sin \varphi = -\frac{M}{2\pi r^2} \sin \varphi \quad (8.3.9)$$

pro $r = konst$
$$d\Phi = -\frac{M}{2\pi r} \sin \varphi d\varphi \quad (8.3.10)$$

$$\Phi = +\frac{M}{2\pi r} \cos \varphi + C(r) \quad (8.3.11)$$

$C(r)$: pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\Phi = 0 \rightarrow C(r) = 0$, a bude platit pro všechna r (8.3.12)

$$\Phi = \frac{M}{2\pi r} \cos \varphi \quad (8.3.13)$$

O proudnicích již víme, že jsou to kružnice, o ekvipotenciály se z úsporných důvodů nebudeme starat. Nulová proudnice je kružnice s nekonečně velkým poloměrem totožná s osou x , viz podmínka (8.3.7), která ji definuje. Ostatní proudnice sestrojíme opět pomocí bodu K , průsečíku kružnice s osou y . V bodě K je $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $r = d$, tj. průměr kružnice. Proudová funkce v bodě K je Ψ_K , viz (8.3.14). Průměry d jednotlivých proudnic se stanoví z podmínky stejného průtočného množství mezi sousedními proudnicemi $\Delta \dot{V} = \dot{V}/n$, kde n je požadovaný počet proudnic.

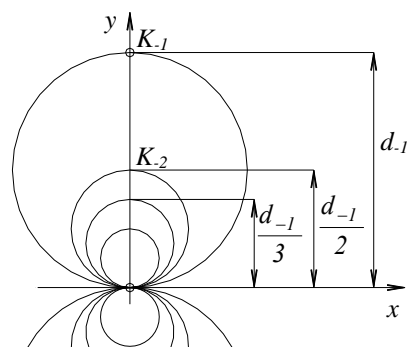
bod K :
$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad r = d \rightarrow \Psi_K = -\frac{M}{2\pi d} \quad (8.3.14)$$

$$\Psi_{0K} - \Psi_{-1K} = 0 - \left(-\frac{M}{2\pi d_{-1}}\right) = \frac{M}{2\pi d_{-1}} = \Delta \dot{V} = \frac{\dot{V}}{n} \rightarrow d_{-1} = \frac{Mn}{2\pi \dot{V}} \quad (8.3.15)$$

$$\Psi_{0K} - \Psi_{-2K} = 0 - \left(-\frac{M}{2\pi d_{-2}}\right) = \frac{M}{2\pi d_{-2}} = 2\Delta \dot{V} = 2\frac{\dot{V}}{n} \rightarrow d_{-2} = \frac{1}{2} \frac{Mn}{2\pi \dot{V}} = \frac{d_{-1}}{2} \quad (8.3.16)$$

$$\Psi_{0K} - \Psi_{-3K} = 0 - \left(-\frac{M}{2\pi d_{-3}}\right) = \frac{M}{2\pi d_{-3}} = 3\Delta \dot{V} = 3\frac{\dot{V}}{n} \rightarrow d_{-3} = \frac{1}{3} \frac{Mn}{2\pi \dot{V}} = \frac{d_{-1}}{3} \quad (8.3.17)$$

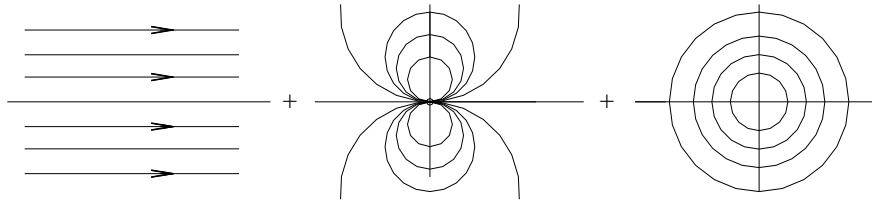
Vypočteme-li z (8.3.15) průměr proudnice d_{-1} , pak druhá proudnice má průměr $d_{-1}/2$, třetí $d_{-1}/3$ atd. Na proudnicích nad osou x jsou záporné hodnoty proudové funkce, na symetrických proudnicích pod osou x jsou Ψ kladná čísla.



Obr. 8.3.2

8.4 Obtékání válce

Je to technicky důležitý případ skládání proudění, protože tvoří základ pro řešení obtékání různých těles, jestliže se aplikuje konformní transformace. Proudovou funkci Ψ obtékání rotujícího válce dostaneme složením proudových funkcí rovnoběžkového proudu Ψ_{RP} , dipólu Ψ_D a potenciálního víru Ψ_V viz (8.4.1). Níže bude ukázáno, že $r^2 = M/2\pi a$. Tuto substituci použijeme k úpravě rovnice (8.4.2)



Obr. 8.4.1

$$\Psi = \Psi_{RP} + \Psi_D + \Psi_V = ar \sin \varphi - \frac{M}{2\pi r} \sin \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \quad (8.4.1)$$

$$= ar \sin \varphi \left(1 - \frac{M}{2\pi ar^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}, \quad r_0^2 = \frac{M}{2\pi a} \quad (8.4.2)$$

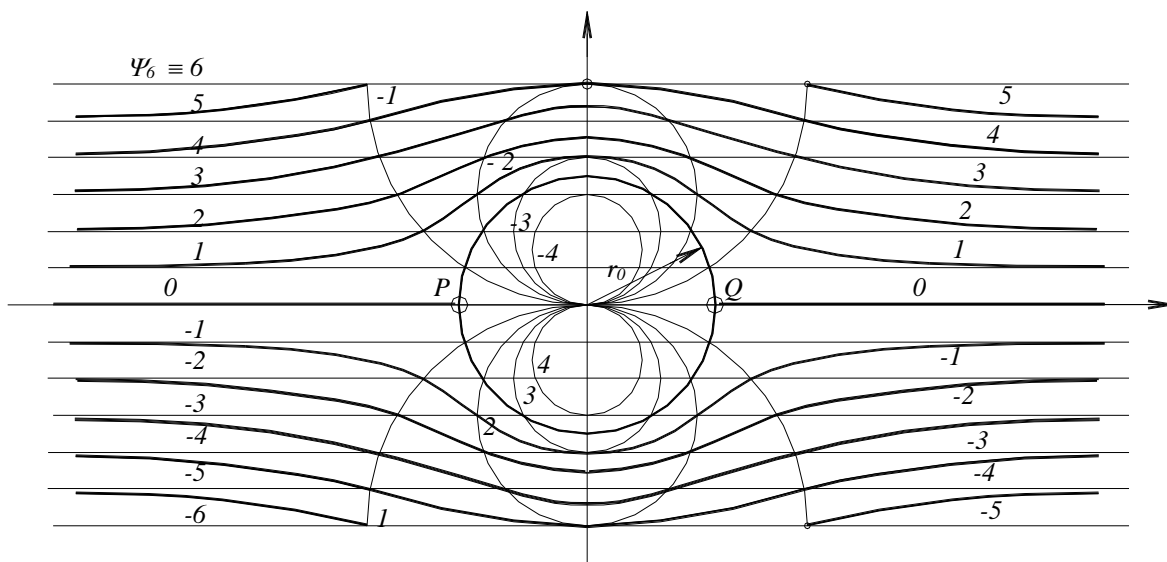
$$= ar \sin \varphi \left(1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \quad (8.4.3)$$

Složky rychlosti, opět v polárních souřadnicích, budou:

$$w_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = a \cos \varphi \left(1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right) \quad (8.4.4)$$

$$w_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -a \sin \varphi \left(1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (8.4.5)$$

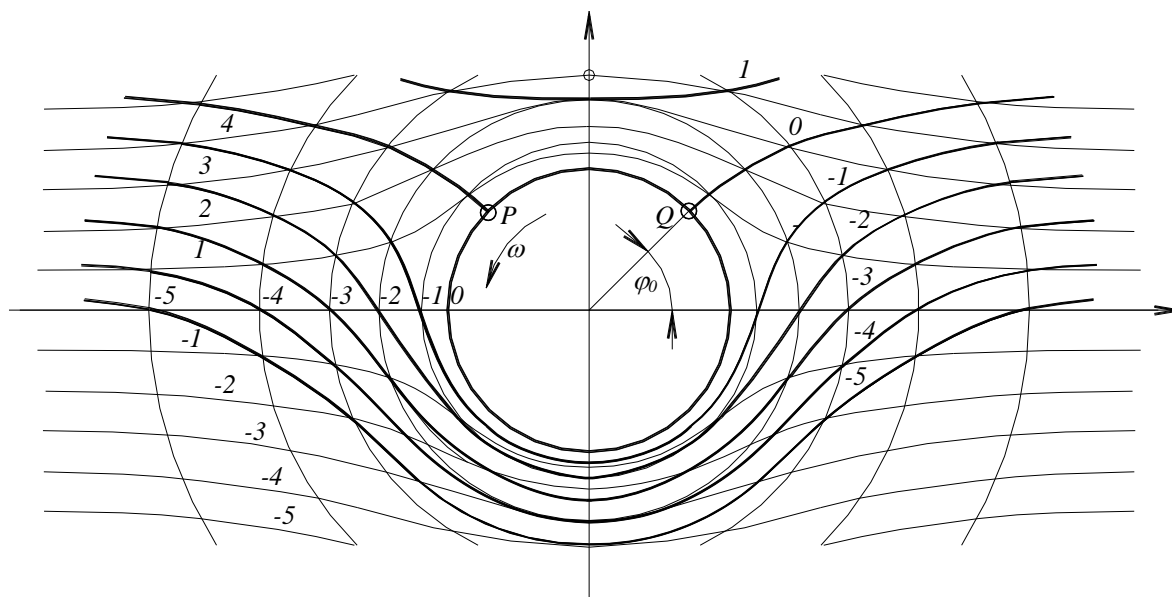
Provedme složení proudových funkcí Ψ_{RP} , Ψ_D , Ψ_V graficky. Budeme postupovat tak, že nejprve složíme proudnice rovnoběžkového proudu s proudnicemi dipólu, což je realizováno na obr. 8.4.2. Poznamenejme, že proudnice jsou zde značeny jen svými indexy. Výsledné proudění představuje obtékání nerotujícího válce při náběžné rychlosti a . Proudnice $\Psi_0 = 0$ je zpočátku totožná s osou x , potom od náběžného



Obr. 8.4.2

bodu s kružnicí o poloměru r_0 , a za odtokovým bodem opět s osou x . Částice, která se pohybuje po nulové proudnici (totožné s osou x), narazí na válec v bodě P . Zde se zbrzdí na rychlost $w = 0$ a místo se proto nazývá bodem nulové rychlosti. Podobný bod je ještě na opačné straně válce a je označen Q . Funkce dipólu spočívá v tom, že rozevívá proudnice rovnoběžkového proudu pro obtékání válce.

Výsledné proudnice obtékaného válce bez cirkulace složíme s proudnicemi potenciálního víru. Nulovou proudnici potenciálního víru ztotožníme s obtékaným válcem v poloměru r_0 . Body nulové rychlosti se nyní posunou směrem nahoru jak ukazuje obr. 8.4.3.



Obr. 8.4.3

Obraz proudnic na obr. 8.4.3 odpovídá teoretickému proudění nevazké tekutiny kolem rotujícího válce. U vazkého proudění by se body P, Q posunuly na otáčejícím se válci ve stejném směru, tj. ve směru obvodové rychlosti.

a) Určení momentu dipólu

Chceme-li dosáhnout obtékání válce o poloměru r_0 při náběhové rychlosti a , potřebujeme k tomu znát moment dipólu M . K určení M využijeme libovolný bod kružnice r_0 , která je nulovou proudnicí $\Psi_0 = 0$. Podle (8.4.2) pro ni platí:

$$\Psi = ar \sin \varphi \left(1 - \frac{M}{2\pi ar^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \ln \frac{r}{r_0} \quad (8.4.2)$$

pro $r = r_0$

$$0 = ar_0 \sin \varphi \left(1 - \frac{M}{2\pi ar_0^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \ln \frac{r_0}{r_0} \quad (8.4.6)$$

pro $\sin \varphi \neq 0$

$$0 = \left(1 - \frac{M}{2\pi ar_0^2} \right) \longrightarrow r_0^2 = \frac{M}{2\pi a} \quad (8.4.7)$$

$$M = 2\pi ar_0^2$$

Potvrdili jsme tedy dříve použitou substituci $r_0^2 = M/2\pi a$

b) Určení cirkulace Γ

Cirkulace potenciálního víru určuje, kde se na rotujícím válci budou nalézat body nulové rychlosti P, Q , tj. jaký bude úhel φ_0 . Úloha bývá zadána opačně: máme určený úhel φ_0 a chceme znát cirkulaci Γ , jíž ho dosáhneme. K výpočtu Γ použijeme w_φ v bodě nulové rychlosti, kde jsou parametry (8.4.8). Dosadíme je do vzorce (8.4.5) pro obvodovou rychlost w_φ .

$$\varphi = \varphi_0, r = r_0, w_\varphi = 0 \quad (8.4.8)$$

$$w_\varphi = -a \sin\varphi \left(1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (8.4.5)$$

$$0 = -a \sin\varphi_0 \left(1 + \left(\frac{r_0}{r_0} \right)^2 \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r_0} \quad (8.4.9)$$

$$0 = -2a \sin\varphi_0 + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \rightarrow \sin\varphi_0 = \frac{\Gamma}{4\pi a r_0} \quad (8.4.10)$$

$$\Gamma = 4\pi a r_0 \sin\varphi_0 \quad (8.4.11)$$

Pokud má být $\varphi_0 = 0$, odpovídá tomu proudění bez cirkulace ($\Gamma = 0$).

c) Rychlost na povrchu válce

K výpočtu složek rychlosti w_r, w_φ použijeme vzorce (8.4.4) a (8.4.5), do nichž dosadíme $r = r_0$:

$$w_r|_{r=r_0} = a \cos\varphi \left(1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right) \Big|_{r=r_0} = a \cos\varphi \left(1 - \left(\frac{r_0}{r_0} \right)^2 \right) = 0 \quad (8.4.11)$$

$$w_\varphi|_{r=r_0} = \left[-a \sin\varphi \left(1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \right]_{r=r_0} = -2a \sin\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \quad (8.4.12)$$

Radiální složka rychlosti w_r je nulová ve všech místech povrchu válce. Obvodová složka w_φ je nenulová po celém povrchu válce s výjimkou bodů nulové rychlosti P, Q :

$$w_\varphi|_{\substack{\varphi=\varphi_0 \\ r=r_0}} = -2a \sin\varphi_0 + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} = -2a \frac{\Gamma}{4\pi a r_0} + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} = 0 \quad (8.4.13)$$

d) Tlak na povrchu válce

Pro výpočet tlaku v potenciálním proudění máme k dispozici vzorec (6.6.9). Řešená úloha je stacionární, tudíž $\partial\Phi/\partial t = 0$, $\rho C(t) = H = \text{konst.}$ Integrační konstantu H určíme pro bod ležící daleko před nebo za válcem, kde známe tlak $p = p_0$ a rychlost $w = a$. Tlak v libovolném místě na povrchu válce dostaneme z (8.4.14) pro $r = r_0$, $w = w_\varphi$. Za rychlost w_φ dosadíme (8.4.12) a pro zkrácení zápisu zavedeme dočasnou substituci $K = \Gamma/2\pi a$.

$$p = -\rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \rho \frac{w^2}{2} + \rho C(t) \quad (6.6.9)$$

$$\text{pro } \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0: \quad p = -\rho \frac{w^2}{2} + H \quad (8.4.14)$$

$$H: \quad \text{pro } p = p_0, w = a \rightarrow H = p_0 + \rho \frac{a^2}{2} \quad (8.4.15)$$

$$\text{pro } r = r_0: \quad p|_{r=r_0} = -\rho \frac{w_\varphi^2}{2} + H = H - \frac{\rho}{2} \left(-2a \sin\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \quad (8.4.16)$$

$$p|_{r=r_0} = H - \frac{\rho}{2} \left(4a^2 \sin^2\varphi - 4a \sin\varphi \frac{\Gamma}{2\pi a} + \left(\frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \right) \quad (8.4.17)$$

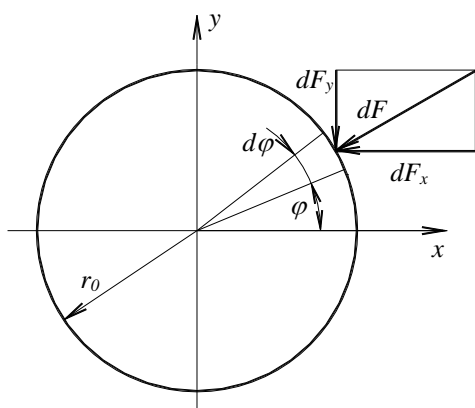
$$p|_{r=r_0} = H - \frac{\rho\alpha^2}{2} \left(4 \sin^2 \varphi - 4 \sin \varphi \frac{\Gamma}{2\pi r_0 a} + \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0 a} \right)^2 \right) \quad (8.4.18)$$

pro $K = \frac{\Gamma}{2\pi r_0 a}$:

$$p|_{r=r_0} = H - \frac{\rho\alpha^2}{2} (4 \sin^2 \varphi - 4K \sin \varphi + K^2) \quad (8.4.19)$$

e) Síla na povrch válce

Síla se určí z rozložení tlaku po obvodě válce, které je připravené vzorcem (8.4.19). Sílu rozložíme do vodorovné složky F_x a svislé F_y . Vodorovná složka je nulová. Důvodem je symetrické rozložení rychlosti a



Obr.8.4.4

tedy i tlaku podle osy y, takže každá elementární síla dF_x zleva má protisílu dF_x zprava.

$$F_x = \int_0^{2\pi} p|_{r=r_0} \cos \varphi r_0 d\varphi = 0 \quad (8.4.20)$$

Samozřejmě hlavním důvodem $F_x = 0$ je zanedbání vazkosti a jeví s tím při obtékání spojených.

Symetrie rychlostí a tlaku podle vodorovné osy x existuje jen při obtékání válce bez cirkulace. V tomto případě tedy nepůsobí na válec žádná síla. V případě rotujícího válce je síla $F_y \neq 0$. Dostaneme ji dosazením tlaku (8.4.10) do (8.4.21).

$$F_y = \int dF_y = - \int dF \sin \varphi = - \int_0^{2\pi} p|_{r=r_0} r_0 d\varphi \sin \varphi \quad (8.4.21)$$

$$F_y = -r_0 \left[H \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi - \frac{\rho\alpha^2}{2} \left(4 \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi - 4K \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi + K^2 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \right) \right] \quad (8.4.22)$$

protože

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = 0 \quad (8.4.23)$$

$$F_y = -r_0 \cdot \frac{\rho\alpha^2}{2} \cdot 4K\pi = -r_0 \frac{\rho\alpha^2}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\Gamma}{2\pi r_0 a} \pi = \underline{\underline{-\rho\alpha\Gamma}} \quad (8.4.24)$$

Poslední vzorec pro výpočet příčné síly na válec obtékáný potenciálním proudem platí zcela obecně i pro tělesa jiných tvarů. Nazývá se **věta Kutta-Žukovského**. Používá se zejména k výpočtu vztlakových sil leteckých profilů křídel a lopatek turbostrojů, pokud obtékající proudění je hladké, bez odtržení od profilu. V takových případech jsou třecí síly zanedbatelné, na úrovni několika procent sil tlakových.

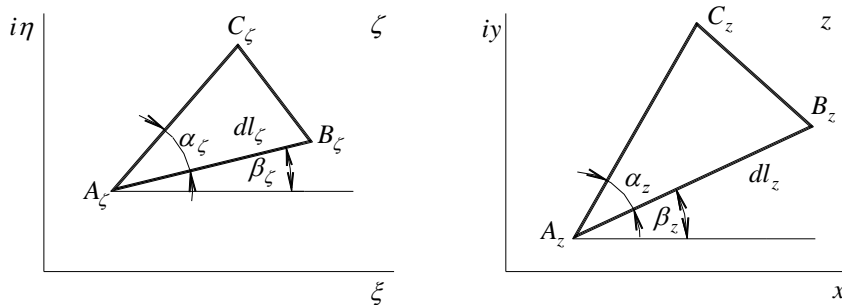
Znaménko (-) u Kutta-Žukovského věty pro válec říká, že síla působí proti kladné ose y, tedy dolů. Vliv cirkulace spočívá v tom, že zvyšuje rychlost pod tělesem (proudnice zde jsou hustší), čili je tu nižší tlak a síla F_y směřuje sem. V letectví je zvykem volit kladnou osu y směrem dolů, takže příčná síla na profil křídla vychází správně vztlakově nahoru

9. Konformní zobrazení

Obtékání rotujícího válce lze různými transformačními pochody přeměnit na obtékání těles jiných tvarů, dokonce hranatých. Obě přidružená proudová pole pak mají vypočitatelné vazby nejen mezi odpovídajícími si body a proudnicemi, ale také mezi rychlostmi a tlaky. Nejznámější z transformací je konformní zobrazení, kterým se budeme zabývat. Díky konformní transformaci byly vypočteny první letecké profily, z nichž úpravami, na základě ofukování v aerodynamických tunelech, vznikly profily současné. Užitečných aplikací konformní transformace, jak uvidíme, je více.

9.1 Princip konformního zobrazení

Při konformním zobrazení převádíme geometrické útvary z jedné roviny (prvotní) do roviny druhé (druhotné). K tomu je zapotřebí transformační rovnice. Lze použít jen takové rovnice, které splňují Cauchy - Riemannovy podmínky a tím i Laplaceovy rovnice v obou přidružených rovinách. Uvedené podmínky vyhovují analytické funkci komplexní proměnné $z = f(\zeta)$, kde $z = x + iy$ a $\zeta = \xi + i\eta$. Mějme v rovině ζ , $i\eta$ bod A_ζ ,



Obr. 9.1.1

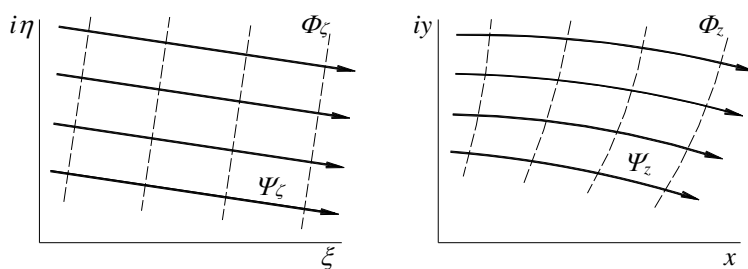
který přísluší komplexnímu číslu ζ . Tento bod převedeme do roviny x, iy do bodu A_z , kde mu bude patřit komplexní číslo z . Jestliže se bod A_ζ přesune do bodu B_ζ o elementární úsek dl_ζ , změní se hodnota komplexního čísla na $\zeta + d\zeta$. Tomu odpovídá v druhotné rovině posuv dl_z , bodu A_z do B_z , jímž se změní hodnota komplexního čísla na $z + dz$. Z elementárních přírůstků vypočteme derivaci $dz/d\zeta$:

$$dz = dl_z (\cos \beta_z + i \sin \beta_z) = dl_z e^{i\beta_z} \quad (9.1.1)$$

$$d\zeta = dl_\zeta (\cos \beta_\zeta + i \sin \beta_\zeta) = dl_\zeta e^{i\beta_\zeta} \quad (9.1.2)$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dl_z}{dl_\zeta} e^{i(\beta_z - \beta_\zeta)} = m e^{i\omega} \quad (9.1.3)$$

$m = dl_z/dl_\zeta$ je modul zobrazení a $\omega = \beta_z - \beta_\zeta$ argument zobrazení. Modul udává zvětšení (zmenšení) druhotného elementárního útvaru oproti prvotnímu. Argument vyjadřuje natočení druhotné úsečky dl_z proti prvotní dl_ζ . Protože v témž bodě se protínající čáry se všechny pootočí při transformaci o tentýž úhel ω , budou úhly mezi nimi zachovány ($\alpha_\zeta = \alpha_z$). Elementární trojúhelník $A_z B_z C_z$ je podobný trojúhelníku $A_\zeta B_\zeta C_\zeta$, je m -krát zvětšený a natočený o úhel ω .



Obr. 9.1.2

Popsaná transformace je tudíž rovnoúhlá a rovnotvará u elementárních obrazců = konformní, a nazývá se proto konformní zobrazení. Derivace $dz/d\zeta = m \exp i\omega$ je funkcí polohy, takže hodnoty m, ω jsou v různých bodech roviny různé, čili obrazce konečné velikosti budou oproti své prvotní podobě deformovány, viz příklad proudnic a ekvipotenciál na obr. 9.1.2.

Geometrické vlastnosti konformního přetvoření jsou tedy v souhrnu následující:

- Každé čáře, průsečíku čar prvotního útvaru odpovídá zase čára a průsečík čar útvaru druhotného.
- Úhel dvou protínajících se čar útvaru prvotního má stejný smysl a velikost jako úhel jim odpovídajících čar útvaru druhotného - úhel 2 čar se konformní transformací nemění
- Nekonečně malý útvar v rovině prvotní se zobrazuje v druhotné rovině nekonečně malým útvaru jemu podobným, natočeným - útvary konečné velikosti se však deformují.

Tak jako přidružené body jsou popsány komplexními čísly, tak také veličiny proudění jsou v nich komplexní. Týká se to rychlostí $w_\zeta = w_\xi + iw_\eta$, $w_z = w_x + iw_y$, potenciálu rychlosti a proudové funkce. Místo Φ a Ψ se zavádí tzv. **komplexní potenciál** $F = \Phi + i\Psi$. Máme tedy dvojice potenciálů $F_\zeta = \Phi_\zeta + i\Psi_\zeta$, $F_z = \Phi_z + i\Psi_z$. Jak je to se vztahem mezi komplexním potenciálem a rychlostí je odvozeno na řádcích (9.1.7) až (9.1.10). Pracuje se v rovině z s F_z, w_z , dosažený výsledek má místo w_z komplexně sdruženou rychlost \bar{w}_z , ale to nevadí. Analogie platí v rovině ζ mezi F_ζ a \bar{w}_ζ .

$$\zeta = \xi + i\eta \quad \rightarrow \quad z = x + iy \quad (9.1.4)$$

$$w_\zeta = w_\xi + iw_\eta \quad \rightarrow \quad w_z = w_x + iw_y \quad (\bar{w}_z = w_x - iw_y) \quad (9.1.5)$$

$$F_\zeta = \Phi_\zeta + i\Psi_\zeta \quad \rightarrow \quad F_z = \Phi_z + i\Psi_z \quad (9.1.6)$$

$$dF_z = \frac{\partial F_z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F_z}{\partial y} \cdot dy = \left(\frac{\partial \Phi_z}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \Phi_z}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} \right) dy \quad (9.1.7)$$

$$= (w_x - iw_y) dx + (w_y + iw_x) dy \quad (9.1.8)$$

$$= (w_x - iw_y) dx + i(w_x - iw_y) dy \quad (9.1.9)$$

$$= \bar{w}_z dx + i\bar{w}_z dy = \bar{w}_z (dx + idy) = \bar{w}_z dz \quad (9.1.10)$$

$$\text{Výrazu } dF_z = \bar{w}_z dz \text{ odpovídá } dF_\zeta = \bar{w}_\zeta d\zeta, \text{ kde } \bar{w}_\zeta = w_\xi - iw_\eta \quad (9.1.11)$$

Z hlediska proudění budeme od konformní transformace požadovat, aby komplexní potenciály byly v přidružených rovinách totožné: $F_z = F_\zeta = F$. Plynou z toho rovnosti popsané na následujících řádcích, z nichž nejzávažnější je vazba mezi přidruženými rychlostmi w_z, w_ζ , vlastně mezi jejich komplexně sdruženými hodnotami \bar{w}_z, \bar{w}_ζ . Ve vztazích je použita identita absolutní hodnoty komplexního čísla a absolutní hodnoty čísla komplexně sdruženého, např. $|w_z| = |\bar{w}_z| = (w_x^2 + w_y^2)^{0,5}$.

$$F_z = F_\zeta = F \quad \rightarrow \quad \Phi_z = \Phi_\zeta = \Phi, \quad \Psi_z = \Psi_\zeta = \Psi \quad (9.1.12)$$

$$dF_z = dF_\zeta = dF \quad (9.1.13)$$

$$w_z dz = w_\zeta d\zeta \quad \rightarrow \quad |w_z| dz = |w_\zeta| d\zeta \quad (9.1.14)$$

$$\alpha_z = \alpha_\zeta \quad (9.1.15)$$

$$\Gamma_z = \oint \bar{w}_z d\bar{z} = \oint |w_z| \cos \alpha_z dz = \oint |w_\zeta| \cos \alpha_\zeta d\zeta = \oint \bar{w}_\zeta d\bar{\zeta} = \Gamma_\zeta \quad (9.1.16)$$

9.2 Transformační pól a transformační rovnice

a) Transformační pól je bod v proudovém poli, v němž $dz/d\zeta = 0$. Poloha transformačního pólu zásadním způsobem ovlivňuje, jak k danému útvaru v rovině ζ bude přidružený útvar v rovině z vypadat. Při určité poloze transformačního pólu bude válci v prvotní rovině odpovídat třeba eliptický válec v druhotné rovině, při jiné poloze třeba šikmo obtékaná deska. Z (9.1.14) můžeme vypočítat poměr přidružených rychlostí w_z/w_ζ (9.2.1). V transformačním pólu bude poměr $w_z/w_\zeta = \infty$ protože $dz/d\zeta = 0$.

$$\frac{w_z}{w_\zeta} = \frac{|w_z|}{|w_\zeta|} = \frac{1}{\frac{dz}{d\zeta}} \rightarrow \left. \frac{|w_z|}{|w_\zeta|} \right|_{TP} = \frac{1}{0} = \infty \quad (9.2.1)$$

Bude-li v transformačním pólu rychlost $w_\zeta \neq 0$, musí být $w_z = \infty$. Proudění v druhotné rovině, které má v nějakém bodě nekonečně velkou rychlost, nás nezajímá. Zbývá jediná možnost, že rychlost v transformačním pólu $w_\zeta = 0$ a přidružená rychlost w_z je potom konečná. To je podmínka, kterou klademe na proudění **v prvotní rovině: nulová rychlost v transformačním pólu**. Zajistit tuto podmínku není obecně jednoduchá záležitost, u válce je to však snadné, pomůžeme si změnou cirkulace Γ .

b) Transformační rovnice $z = f(\zeta)$ musí být taková, aby se obě proudová pole v nekonečnu ztotožnila, protože obtékané těleso jakéhokoliv tvaru ovlivňuje proudění v bezprostředním okolí, na vzdálená místa nemá vliv. V nekonečnu se u obou přidružených proudění musí ztotožňovat proudnice a ekvipotenciály, podmínka (9.2.2), stejně jako rychlosti, podmínka (9.2.3).

$$z \equiv \zeta \quad \rightarrow \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} z = \zeta \quad (9.2.2)$$

$$w_z \equiv w_\zeta \quad \rightarrow \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{dz}{d\zeta} = 1 \quad (9.2.3)$$

Těmto podmínkám vyhovuje funkce tvaru (9.2.4). Její derivace je (9.2.5). Položíme-li $dz/d\zeta = 0$ (9.2.6), definujeme tak transformační pól. Naznačenou úpravou rovnice dostaneme algebraickou rovnici n -tého stupně (9.2.7) a jejím řešením kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$. Jsou to obecně komplexní čísla, udávající polohy transformačních pólů v rovině ζ .

$$z = \zeta + \frac{\kappa_1}{\zeta} + \frac{\kappa_2}{\zeta^2} + \frac{\kappa_3}{\zeta^3} + \dots + \frac{\kappa_n}{\zeta^n} \quad (9.2.4)$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{\kappa_1}{\zeta^2} - \frac{2\kappa_2}{\zeta^3} - \frac{3\kappa_3}{\zeta^4} - \dots - \frac{n\kappa_n}{\zeta^{n+1}} \quad (9.2.5)$$

$$\left. \frac{dz}{d\zeta} \right|_{TP} = 0 = 1 - \frac{\kappa_1}{\zeta^2} - \frac{2\kappa_2}{\zeta^3} - \dots - \frac{n\kappa_n}{\zeta^{n+1}} \quad (9.2.6)$$

$$\zeta^{n+1} - \zeta^{n-1} \cdot \kappa_1 - \zeta^{n-2} \cdot 2\kappa_2 - \dots - n\kappa_n = 0 \quad (9.2.7)$$

$$\text{Řešení (9.2.7):} \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \quad (9.2.8)$$

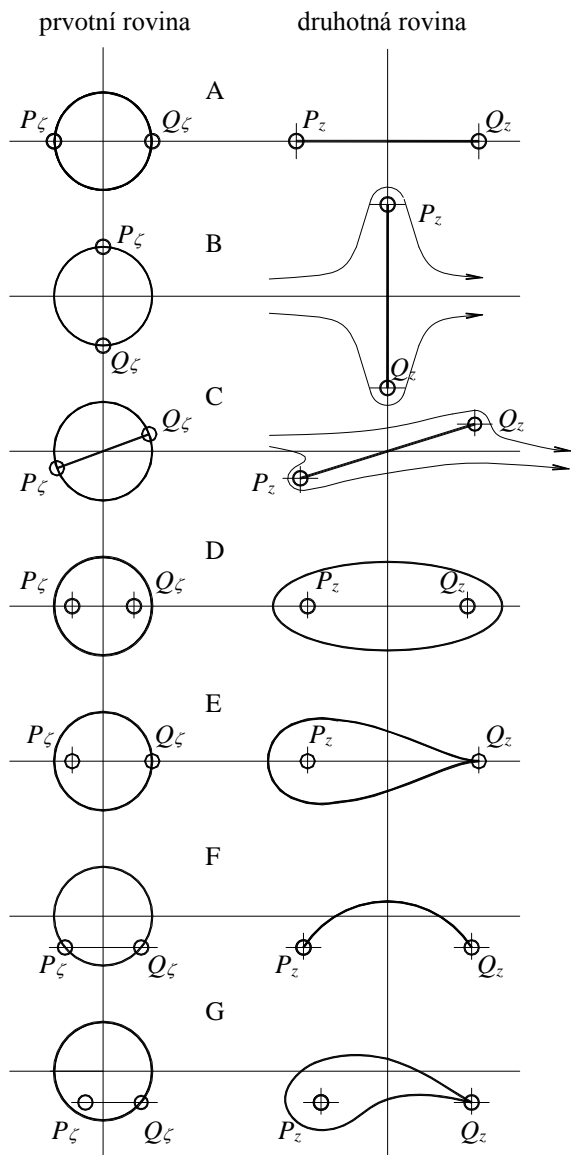
Dále se budeme zabývat jen transformací Žukovského, která z obecné transformační rovnice ponechává pouze dva členy (9.2.9). Snadno se přesvědčíme, že $\kappa_1 = \lambda^2$, kde $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$ jsou polohy 2 transformačních pólů v rovině ζ .

Žukovského transformační rovnice:
$$z = \zeta + \frac{\kappa_1}{\zeta} = \zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta} \quad (9.2.9)$$

Znovu připomeňme, že pokud se transformační pól nachází v proudovém poli, rychlost v něm v prvotní rovině musí být nastavena na nulovou hodnotu. Toto odpadá, jestliže transformační pól je uvnitř obtékaného tělesa. U Žukovského transformace se to může týkat jednoho nebo i obou pólů.

9.3 Přehled Žukovských transformací válce

Na následujícím obr. 9.3.1 jsou vlevo uvedeny polohy transformačních pólů na obtékaném válci, vpravo přidružené útvary vzniklé Žukovského transformací, s uvedením míst, kam se dostaly obrazy transformačních pólů. Vidíme, že Žukovského transformací vzniká obtékání různě položených desek, elipsy, kapkovitého tělesa, oblouku a tzv. Žukovského leteckého profilu. Tvar i tloušťka obtékaných těles: (elipsy, kapky, profilu) závisejí na poloze transformačních pólů. Lze je přesně určit pomocí transformační rovnice, jak ukážeme na příkladu obtékané desky.



Obr. 9.3.1

Příklad

U konformní transformace obtékání válce na desku kolmou k proudění zjistit vztahy pro přenos geometrie (proudnic) a rychlosti proudění.

Geometrie: pro B na obr. 9.3.1 a 9.3.2 platí: $\lambda_1 = ir_0, \lambda_2 = -ir_0, \lambda_1^2 = -r_0^2, \lambda_2^2 = -r_0^2$ (9.3.1)

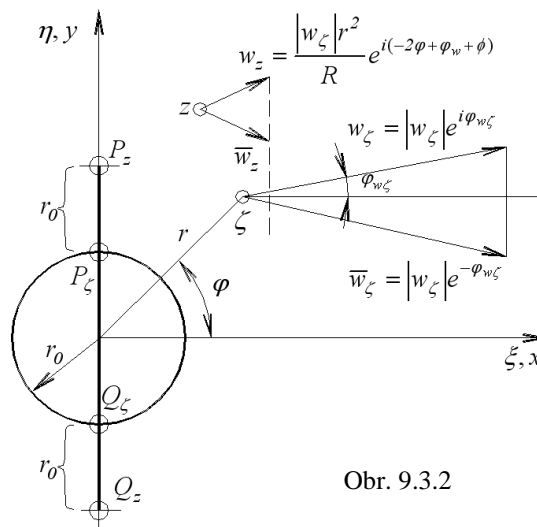
Pro horní polovinu: $z = \zeta + \frac{\lambda_1^2}{\zeta} = re^{i\varphi} - \frac{r_0^2}{re^{i\varphi}} = re^{i\varphi} - \frac{r_0^2}{r} e^{-i\varphi}$ (9.3.2)

Pro samotný válec: $z_V = r_0 e^{i\varphi} - \frac{r_0^2}{r_0} e^{-i\varphi} = r_0 (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$ (9.3.3)

Pro P_ζ , kde $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $z_P = r_0 \left(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}} \right) = r_0 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ (9.3.4)

U některých případech, jako jsou příčně a šikmo obtékané desky, nelze zajistit nulovou rychlost v obou transformačních pólech. Zde je nutno řešit transformaci na dvakrát, zvláště pro horní a dolní polovinu obrazu. Žádný problém v tomto směru není v případě A, D, E, F, G, u elipsy jsou dokonce oba póly uvnitř válce.

Převod se dříve řešil graficky, tj. přenášel se bod za bodem každé proudnice a stejně vektor za vektorem se transformovala rychlost. Dnes upřednostníme numerické řešení jak u samotného válce tak u konformního obrazu. Ještě pravděpodobnější dnes by bylo přímé řešení proudové funkce Ψ z Laplaceovy rovnice $\Delta\Psi = 0$.



Obr. 9.3.2

$$z_P = r_0(i+i) = i2r_0, \text{ délka desky } L = 4r_0 \quad (9.3.5)$$

$$w_z = ? \quad \bar{w}_z = \frac{\bar{w}_\zeta}{dz} = \frac{\bar{w}_\zeta}{1 - \frac{\lambda_1^2}{\zeta^2}} = \frac{\bar{w}_\zeta}{1 + \frac{r_0^2}{\zeta^2}} = \frac{\bar{w}_\zeta}{1 - \frac{r_0^2}{r^2 \cdot e^{i2\varphi}}} = \frac{\bar{w}_\zeta \cdot r^2 \cdot e^{i2\varphi}}{r^2 \cdot e^{i2\varphi} + r_0^2} = \frac{\bar{w}_\zeta \cdot r^2 \cdot e^{i2\varphi}}{R \cdot e^{i\Phi}} \quad (9.3.6)$$

$$R, \Phi = ? \quad R \cos \Phi = r^2 \cos 2\varphi + r_0^2 \quad (9.3.7)$$

$$R \sin \Phi = r^2 \sin 2\varphi \quad (9.3.8)$$

$$R^2 = (r^2 \cos 2\varphi + r_0^2)^2 + (r^2 \sin 2\varphi)^2 \rightarrow R = \left[(r^2 \cos 2\varphi + r_0^2)^2 + (r^2 \sin 2\varphi)^2 \right]^{1/2} \quad (9.3.9)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{r^2 \sin 2\varphi}{r^2 \cos 2\varphi + r_0^2} \rightarrow \Phi = \operatorname{arctg} \frac{r^2 \sin 2\varphi}{r^2 \cos 2\varphi + r_0^2} \quad (9.3.10)$$

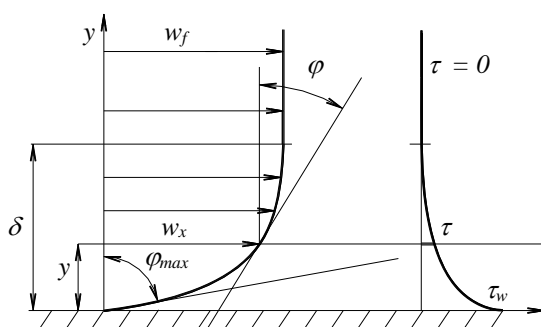
$$(9.3.6): \quad \bar{w}_z = \frac{|w_\zeta| e^{-i\varphi_w} \cdot r^2 e^{i2\varphi}}{\operatorname{Re} e^{i\Phi}} = \frac{|w_\zeta| r^2}{R} e^{i(2\varphi - \varphi_w - \Phi)} \quad (9.3.11)$$

10. Vazké proudění

Každé proudění je vazké. Při nižších rychlostech se uplatňuje molekulární tření, při vysokých rychlostech molární tření, dané shluky molekul v turbulentních vírech. První typ proudění je laminární, druhý, mnohem komplikovanější, je turbulentní. V tomto kurzu se budeme zabývat hlavně laminárním prouděním, turbulentním případům je věnován další kurz. O molekulárním tření budeme zásadně předpokládat, že je newtonovské a tekutina jednofázová, tj. kapalina nebo plyn, nikdy jejich směs nebo dokonce plazma.

10.1 Molekulární vazkost

Mějme velmi jednoduchý případ obtékání tělesa vazkou tekutinou, a to proudění podél desky. Profil rychlosti na obr. 10.1.1 se skládá ze 2 částí, ze zakřivené o tloušťce δ a z přímé o konstantní rychlosti w_f .



Obr. 10.1.1

Při laminárním proudění se smykové napětí τ vyjádří podle Newtona:

$$\tau = \eta \cdot \frac{\partial w_x}{\partial y} = \eta \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (10.1.1)$$

Největší τ je přímo na stěně v místě $y=0$, kde úhel φ tangenty profilu dosahuje nejvyšší hodnoty. S rostoucí vzdáleností od stěny y smykové napětí klesá a v místě $y=\delta$ nabývá nulové hodnoty. Ta je nulová všude, kde je rychlost $w_f = \text{konst}$. To znamená, že τ a vazkost se uplatňuje jen v poměrně úzké vrstvě δ u stěny (tzv. mezní vrstva), zatím co

vně mezní vrstvy se proudění chová jako nevazké, potenciální, tak jak jsme se jím zatím zabývali u obtékaných těles. To je důležitý poznatek pro vnější aerodynamiku, že při hladkém obtékání těles je nutné vazkost respektovat jen v tenké mezní vrstvě při stěně.

Z Newtonova vztahu (10.1.1) plyne, že smykové napětí τ bude konstantní, pokud rychlost w_x vzrůstá lineárně se vzdáleností y od stěny. Takovou část na rychlostním profilu najdeme, zejména v těsné blízkosti stěny. Někdy se pro analytické účely uvažuje lineární průběh rychlosti $w_x(y)$ v celé mezní vrstvě. Nereálné

proudění o $\tau = konst$ v mezní vrstvě se označuje jako Couettovo. V jiných případech existovat může, např. mezi deskami.

Z definice smykového napětí (10.1.1) můžeme zpětně vypočítat koeficient η , kterému se říká součinitel dynamické vazkosti, krátce dynamická vazkost. Na řádku (10.1.2) je uveden též rozměr η . Běžně se η považuje pro danou látku za konstantní, ve skutečnosti se mění s teplotou, nepatrně s tlakem. Více než s dynamickou vazkostí η se pracuje s kinematickou vazkostí $\nu = \eta/\rho$. Rozměr součinitele kinematické vazkosti na řádku (10.1.3) obsahuje pouze kinematické veličiny m, s , proto ten název.

$$\text{dynamická vazkost:} \quad \eta = \frac{\tau}{\frac{\partial w_x}{\partial y}} \left[\frac{N}{m^2} \frac{sm}{m} = \frac{Ns}{m^2} = \frac{kg}{ms} \right] \quad (10.1.2)$$

$$\text{kinematická vazkost:} \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} \left[\frac{kg}{m} \frac{m^3}{s \cdot kg} = \frac{m^2}{s} \right] \quad (10.1.3)$$

a) Závislost součinitele dynamické vazkosti na teplotě a tlaku

U plynů se dá smykové napětí určit kinetickou teorií plynu a porovnat s fenomenologickým Newtonovým výrazem, viz (10.1.4). Lze odtud vypočítat η (10.1.5). Význam použitých symbolů ρ, λ, c^*, r, T je uveden. Z nich střední volná dráha molekul λ je nepřímo úměrná hustotě ρ , tedy součin $\rho\lambda = konst$. U ideálního plynu střední rychlost molekul c^* se vypočte podle (10.1.6). Dosadíme-li tento výraz do η , ukazuje se, že jedinou proměnnou je zde absolutní teplota a dynamická vazkost ideálního plynu je tedy úměrná odmocnině z jeho absolutní teploty. U reálných plynů vzrůstá η s teplotou poněkud rychleji. Nezávislost molekulární vazkosti ideálních i reálných plynů na tlaku odpovídá skutečnosti v poměrně velkém rozsahu tlaků.

$$\tau = \frac{1}{3} \rho \lambda c^* \frac{\partial w_x}{\partial y} = \eta \frac{\partial w_x}{\partial y} \quad (10.1.4)$$

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \lambda c^* \quad (10.1.5)$$

kde ρ = hustota tekutiny
 λ = střední volná dráha molekul tekutiny
 c^* = střední rychlost pohybu molekul
 $\rho \cdot \lambda = konst$

$$\text{U ideálního plynu} \quad c^* = \sqrt{3grT} \quad (10.1.6)$$

kde g = gravitační zrychlení
 r = plynová konstanta
 T = absolutní teplota

$$(6) \rightarrow (5): \quad \eta = \frac{1}{3} konst \sqrt{3grT} = K\sqrt{T} \quad (10.1.7)$$

Dynamická vazkost kapalin se mění v závislosti na teplotě právě opačně než u plynů, tj. η kapalin s rostoucí teplotou klesá. Dokumentují to 2 údaje η pro kapalnou vodu při teplotě nepatrně vyšší než $0^\circ C$ a při teplotě nepatrně nižší než $100^\circ C$. S tlakem se η kapalin téměř nemění, teprve při vysokých tlacích se η zvětšuje.

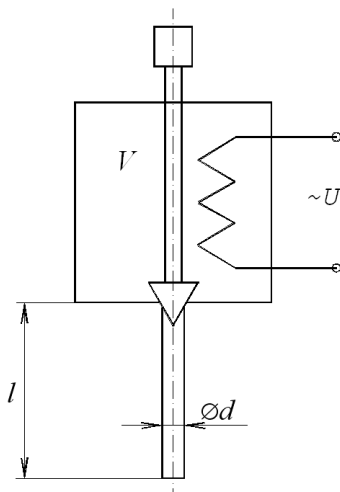
$$\sim 0^\circ C \quad \eta_{H_2O} \doteq 1,80 \cdot 10^{-3} \text{ N s/m}^2 \quad (10.1.8)$$

$$\sim 100^\circ C \quad \eta_{H_2O} \doteq 2,84 \cdot 10^{-4} \text{ N s/m}^2 \quad (10.1.9)$$

Na závěr uvedme orientační hodnoty kinematické vazkosti pro 2 nejčastější media:

$$\text{kapalná voda} \quad \nu_{H_2O} \doteq 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \text{vzduch} \quad \nu_{vd} \doteq 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \quad (10.1.10)$$

b) Měřené vazkosti



Obr. 10.1.2

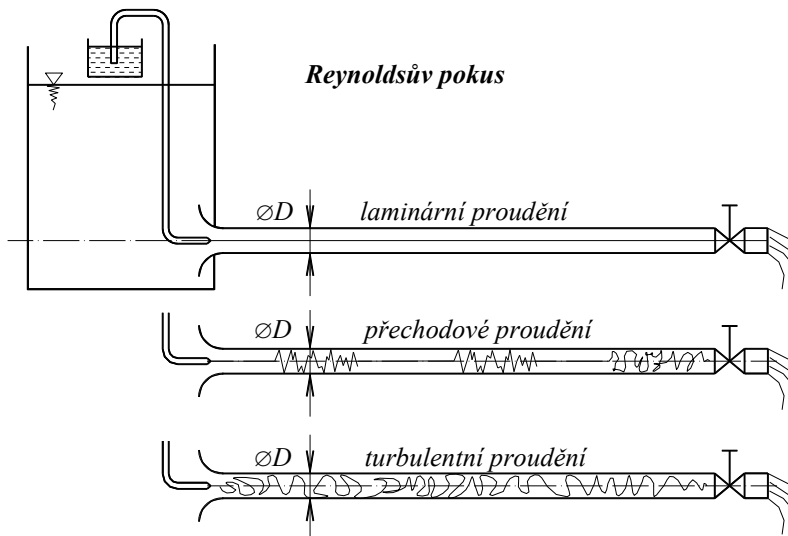
K měření se využívá jevů, které jsou vazkostí silně ovlivněné. Měřicí přístroje se podle toho dělí na rotační, tělískové, výtokové aj. U rotačního principu jsou základem dva kotoučky, mezi nimiž je měřená tekutina. Jestliže se jeden kotouč nuceně otáčí, roztočí se i druhý, ale s určitým zpožděním, závislým na vazkosti. U tělískových viskozimetrů se η či ν vyhodnocuje z doby pádu tělíska v tekutině, která Stokesovým zákonem závisí na vazkosti. Z výtokových viskozimetrů poněkud detailněji popíšeme **Englerův viskozimetr** používaný zejména pro oleje.

Je to nádobka definovaných rozměrů o obsahu $V = 200 \text{ cm}^3$, vybavená elektrickým vytápěním, do níž je dole zaústěna výtoková trubička $\phi d = 2,8 \text{ mm}$, délky $l = 100 \text{ mm}$. Vypustí-li se z nádoby voda o teplotě $T = 20^\circ\text{C}$, trvá to $t_0 = 50$ až 52 s . Doba výtoku oleje ohřátého na požadovanou teplotu je t . Pomocí obou dob je definován Englerův stupeň: $E = t/t_0$. Z Englerových stupňů dostaneme kinematickou vazkost oleje $\nu [\text{m}^2/\text{s}]$ pomocí empirického vzorce (10.1.11):

$$\nu \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] = \left(7,32E - \frac{6,31}{E} \right) \cdot 10^{-6} \quad (10.1.11)$$

10.2. Laminární, přechodové, turbulentní proudění v potrubí

Při objasnění tématu vyjdeme ze známého pokusu provedeného O. Reynoldsem v 2. polovině 19. století. K vodní nádrži je připojeno skleněné potrubí s pečlivě tvarovanou vstupní částí. Násoskou se vpravuje do středu trubky pramének barviva. Průtočné množství se řídí koncovým ventilem.



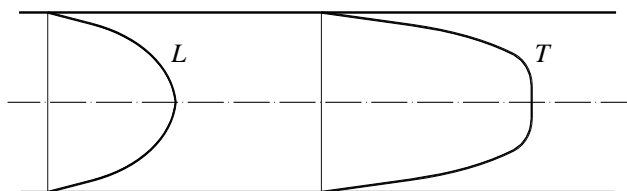
Obr. 10.2.1

Při malých průtocích a rychlostech se pramen barviva drží uprostřed trubky a směrem k výstupu se poněkud rozpívá vlivem molekulární difúze. Přesto pohyb kapaliny probíhá hlavně v soustavě rovnoběžných válcových vrstev. Vrstvy se po sobě posouvají a vytvářejí parabolický rychlostní profil. Proudění je laminární.

Zvýší-li se rychlost průtoku přes určitou mez, dochází ke střídání laminárních průtoků a průtoků turbulentních, vyznačujících se intenzivním promícháváním kapaliny a rozmícháváním barviva. Při zvyšování rychlosti se střídání (intermitence) obou druhů

proudění mění: laminární úseky se zkracují, turbulentní prodlužují. Proudění je přechodové.

Při vysokých rychlostech je proudění již jen trvale turbulentní, složené ze soustavy stochastických vírů, na jejichž stavbě se podílejí molární částice. Rychlostní profil se z laminárního parabolického mění na



Obr. 10.2.2

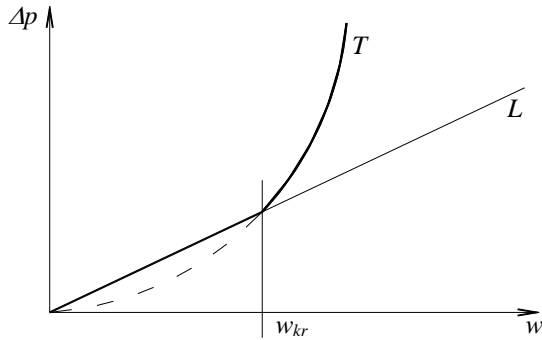
turbulentní, který je ve střední části plochý a velmi strmý při stěnách trubice. Je výslednicí intenzivního přenosu hybnosti od promíchávání vírů a molárních částic, jež vyrovnává rychlosti uprostřed trubice. O to větší spád rychlosti musí být při stěně. Velký spád znamená vysoká třecí napětí, prostřednictvím kterých se kinetická energie proudění ztrácí, mění na teplo. Ztráta se projevuje v poklesu tlaku Δp . Určitý názor o tlakových ztrátách v

závislosti na rychlosti proudění w dává obr. 10.2.3. U laminárního proudění je závislost $\Delta p(w)$ lineární, u turbulentního proudění parabolická.

a) Vymezení pásem typů proudění

Bylo zjištěno, že typ proudění (laminární, přechodové, turbulentní) závisí na průřezové střední rychlosti w , na průměru potrubí D a na kinematické vazkosti ν . Tyto tři veličiny se seskupují do bezrozměrového Reynoldsova čísla:

$$Re = \frac{wD}{\nu} \quad [-] \quad (10.2.1)$$



Obr. 10.2.3

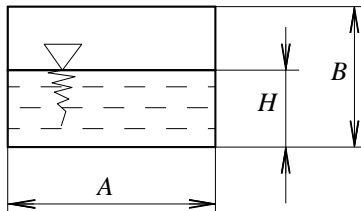
Reynoldsovo číslo je jedním z kritérií podobnosti, kterých později poznáme více, a vyjadřuje poměr setrvačných a třecích sil. U proudění v potrubích rozhoduje o typu proudění:

- je-li $Re \leq 2320$, proudění může být jen laminární. Turbulentní režim, třeba uměle vybuzený, se nemůže trvale udržet. Třecí síly převládají nad setrvačnými. $Re = 2320$ se nazývá kritické Reynoldsovo číslo $Re_{KR} = w_{KR} D/\nu$.

- Je-li $Re_{KR} < Re < 10^5$, proudění může být laminární, přechodové nebo turbulentní. Záleží na podmínkách. Laminární proudění se může udržet do dost vysokých Re čísel, jestliže vstupní proud do trubice je uklidněný jemným sítem, vstupní hrdlo je pečlivě tvarované, stěny

hladké, bez otřesů. V opačném případě může turbulentní proudění existovat těsně nad Re_{KR} . Totéž platí o přechodovém intermitentním proudění, které může pokrývat širší nebo docela úzké pásmo Re čísel.

- je-li $Re > 10^5$, proudění je zaručeně turbulentní s převládajícími setrvačnými silami nad silami třecími. To znamená, že molekulární vazkost lze zanedbat.



Obr. 10.2.4

Reynoldsova čísla jako rozhodujícího kriteria o typu proudění používáme též u kanálů nekruhového průřezu. V tomto případě se musí sestavit Re číslo, které má jako charakteristický rozměr místo průměru D tzv. ekvivalentní průměr D_{ek} , definovaný na řádku (10.2.2). Ekvivalentní průměr je níže propočten opět pro potrubí kulatého průřezu, kde vyjde $D_{ek} = D$, pro mezikruhový kanál, kde $D_{ek} = D_2 - D_1$, a pro částečně zaplněné koryto obdélníkového průřezu.

$$Re = \frac{wD_{ek}}{\nu}, \quad D_{ek} = \frac{4S}{o} \quad (10.2.2)$$

kde S = průtočný průřez
 o = smočený obvod

Trubice $\varnothing D$:

$$D_{ek} = \frac{4S}{o} = \frac{4 \frac{\pi}{4} D^2}{\pi D} = D \quad (10.2.3)$$

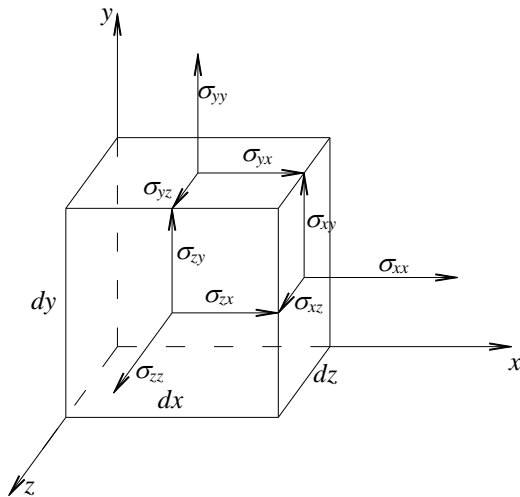
Kanál $\varnothing D_2 / \varnothing D_1$:

$$D_{ek} = \frac{4 \frac{\pi}{4} (D_2^2 - D_1^2)}{\pi (D_1 + D_2)} = \frac{(D_2 + D_1)(D_2 - D_1)}{D_1 + D_2} = D_2 - D_1 \quad (10.2.4)$$

$$D_{ek} = \frac{4AH}{A + 2H} \quad (10.2.5)$$

10.3 Tenzor napětí v tekutině

V proudící tekutině vytkneme v počátku souřadnicové soustavy x, y, z elementární hranolek o stranách dx, dy, dz . Okolní tekutina na něj působí soustavou složek napětí, jejichž vektory jsou zakresleny do obr. 10.3.1, a vytvářejí 9-ti prvkovou matici σ_{ij} , tzv. tenzor napětí.



Obr. 10.3.1

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (10.3.1)$$

Indexy i, j v tenzoru napětí σ_{ij} mají dvojnásobný význam: fyzikální a matematický.

První index i :

- udává rovinu, na kterou napětí působí, při čemž rovina je dána osou, k níž je rovina kolmá.
- znamená řádek matice

Druhý index j :

- udává směr, ve kterém napětí působí
- znamená sloupec matice

Vidíme, že napětí nalézající se na hlavní diagonále matice (10.3.1) působí ve směru normál stěn šestihranu a jsou to tedy **normálová napětí** σ_{ii} . Napětí

mimo hlavní diagonálu σ_{ij} , u nichž $i \neq j$, působí tečně k jednotlivým plochám, jsou to **smyková napětí**. Smyková napětí působící na tutéž hranu hranolku jsou symetrická podle hlavní diagonály.

To, že $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ plyne z momentové rovnováhy smykových sil. Budeme-li mít např. jen napjatost danou dvěma napětími σ_{xy}, σ_{yx} , bude platit rovnost momentů k počátku souřadnicové soustavy (10.3.2), kde plošky $dS_x = dydz$ a $dS_y = dx dz$. Po dosazení plošek se všechny diferenciály zkrátí a zůstane rovnost $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$. Totéž bychom dokázali pro zbývající 2 dvojice tzv. sdružených napětí: $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$.

$$\sigma_{xy} dS_x dx = \sigma_{yx} dS_y dy \quad (10.3.2)$$

$$\sigma_{xy} dy dz dx = \sigma_{yx} dx dz dy \quad (10.3.3)$$

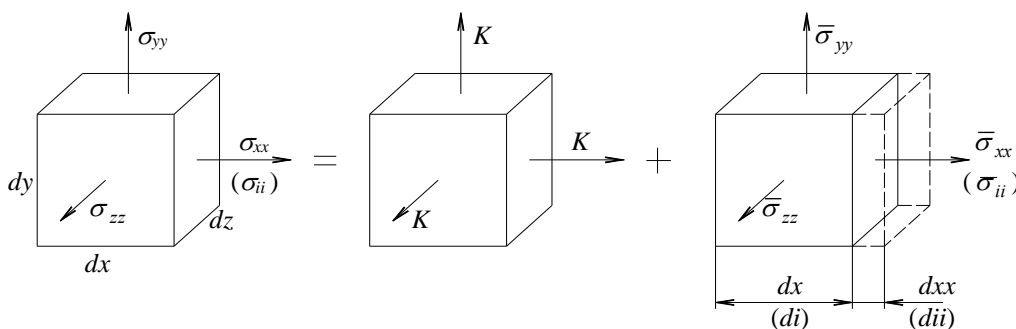
$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (10.3.4)$$

analogicky $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (10.3.5)$

Složky napětí i tenzor napětí jako celek jsou funkcemi rychlosti proudění. Určit tyto funkce $\sigma_{ij}(w)$, pro $i = j, i \neq j$ a pro všechna i, j bude úkol, který splníme v následujících bodech a), b), c).

a) Normálová napětí

Na obr. 10.3.2 máme elementární hranolek zatížený pouze normálovými napětími $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$, obecně σ_{ii} . Toto zatížení můžeme rozložit podle pružnosti-pevnosti (PP) na všestranný tah K a na doplňková napětí $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{zz}$, obecně $\bar{\sigma}_{ii}$ v i -tém směru. Tento rozklad pro směr i je zaznamenán na řádce (10.3.6). Ke stanovení $\bar{\sigma}_{ii}$ použijeme určité analogie s pružností-pevností podle (10.3.7). Zde G je modul pružnosti ve smyku



Obr. 10.3.2

a ε poměrné prodloužení, $\varepsilon = dii / di$. Tento vztah použijeme v mechanice tekutin tak, že G nahradíme η a ε nahradíme rychlostí změny poměrného prodloužení $\partial \varepsilon / \partial t$, viz. (10.3.8). Z uvedeného je zřejmé, že

mechanika tekutin řeší úlohy o řád těžší než pružnost, když pružnostářským deformacím zde odpovídají rychlosti deformací. Úpravy na řádku (10.3.8) jsou zřejmé: prohazuje se argument, podle něhož se derivuje, a derivace $\partial ii / \partial t = w_i$. Dále se $\bar{\sigma}_{ii}(w_i)$ dosadí do výchozí rovnice (10.3.6) a obdržíme (10.3.9). V ní neznáme σ_{ii} ani K . Můžeme si však pomoci, ježto je známé, že tlak p je záporně vzatým aritmetickým průměrem tahových napětí σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} dle (10.3.10). Čili když 3 rovnice (10.3.9) sečteme, můžeme levou stranu nahradit tlakem a vypočítat neznámé K . Všestranný tah K (10.3.13) dosadíme do σ_{ii} (10.3.9) a dostaneme výsledné σ_{ii} jako funkci tlaku p a složek rychlostí w_j .

$$\sigma_{ii} = K + \bar{\sigma}_{ii} \quad (10.3.6)$$

PP: $\bar{\sigma}_{ii} = 2G\varepsilon$ (G je modul pružnosti ve smyku, $\varepsilon = dii/di$ poměrné prodloužení) (10.3.7)

MT: $\bar{\sigma}_{ii} = 2\eta \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 2\eta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial ii}{\partial i} \right) = 2\eta \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial ii}{\partial t} \right) = 2\eta \frac{\partial w_i}{\partial i}$ (10.3.8)

(8)→(6): $\sigma_{ii} = K + 2\eta \frac{\partial w_i}{\partial i}$ (10.3.9)

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -\frac{1}{3} \sum \sigma_{ii} = -\frac{\sigma_{kk}}{3} \quad (10.3.10)$$

\sum (9): $\sum \sigma_{ii} = 3K + 2\eta \frac{\partial w_k}{\partial k}$ $k = x, y, z$ je sčítací index (10.3.11)

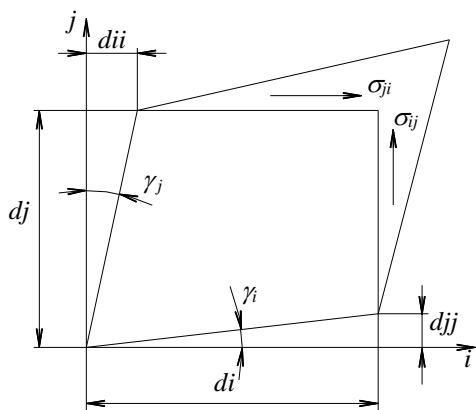
$$-3p = 3K + 2\eta \frac{\partial w_k}{\partial k} \quad (10.3.12)$$

$$K = -p - \frac{2}{3} \eta \frac{\partial w_k}{\partial k} \quad (10.3.13)$$

(13) →(9): $\sigma_{ii} = -p - \frac{2}{3} \eta \frac{\partial w_k}{\partial k} + 2\eta \frac{\partial w_i}{\partial i}$ (10.3.14)

b) Smyková napětí

Na obr. 10.3.3 máme elementární hranolek, z něhož vidíme strany di , dj , vystavený působení smykových napětí $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Vlivem nich dojde k úhlové deformaci dané úhly γ_i , γ_j . K vyjádření obou napětí jako funkcí rychlosti proudění využijeme opět jisté analogie s pružností – pevností (PP), kde σ_{ij} se vyjadřuje podle (10.3.15), když G znamená modul pružnosti ve smyku a γ úhlovou deformaci, zde součet úhlů $\gamma_i + \gamma_j$. Příslušný vzorec pro σ_{ij} v mechanice tekutin (MT) dostaneme z pružnostářského vztahu nahrazením G vazkostí η , a prosté deformace γ rychlostí deformace $\partial \gamma / \partial t$. Další úprava výrazu spočívá v prohození argumentů, podle nichž se derivuje a v zavedení příslušných složek rychlosti proudění.



Obr. 10.3.3

PP: $\sigma_{ij} = G \cdot \gamma = G(\gamma_i + \gamma_j)$, (10.3.15)

G je modul pružnosti ve smyku
 γ je úhlová deformace hranolku

MT: $\sigma_{ij} = \eta \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \eta \frac{\partial}{\partial t} (\gamma_i + \gamma_j) = \eta \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial jj}{\partial i} + \frac{\partial ii}{\partial j} \right] =$ (10.3.16)

$$= \eta \left[\frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial jj}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial j} \left(\frac{\partial ii}{\partial t} \right) \right] = \eta \left[\frac{\partial w_j}{\partial i} + \frac{\partial w_i}{\partial j} \right] \quad (10.3.17)$$

c) Tenzor napětí

Vzorce pro výpočet normálních a smykových napětí lze sjednotit do jediného vztahu pro výpočet libovolné složky tenzoru napětí σ_{ij} (10.3.18). V něm δ_{ij} je Kroneckerův jednotkový tenzor, jehož prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové, kdežto na ní jednotkové. Snadno se přesvědčíme, že vzorec funguje. Na konci je podle něho vypočteno napětí σ_{zz} a σ_{xy} jako příklad.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial w_i}{\partial j} + \frac{\partial w_j}{\partial i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial w_k}{\partial k} \right) \quad k \text{ je sčítací } x, y, z \quad (10.3.18)$$

Kroneck. jedn. tenzor:
$$\delta_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \quad (10.3.19)$$

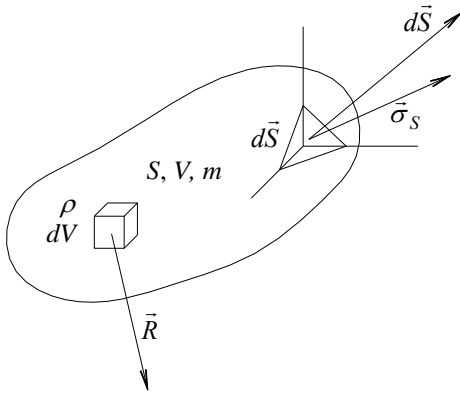
$$\sigma_{zz} = -p + \eta \left(\frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right) \quad (10.3.20)$$

$$= -p + 2\eta \cdot \frac{\partial w_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \eta \cdot \text{div} \vec{w} \quad (10.3.21)$$

$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right), \text{ obdobně } \sigma_{yz} = \eta \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right), \text{ atd.} \quad (10.3.2)$$

10.4 Pohybová rovnice

Pohybová rovnice pro třírozměrové vazké proudění je nejdůležitější z parciálních diferenciálních rovnic proudění. Nazývá se rovnice Navier – Stokesova po svých nezávislých tvůrcích. Na řádce (10.4.1) je výchozí tvar pohybové rovnice, který obsahuje na pravé straně souhrn sil F_i , jimž je tekutina o hmotnosti m vystavena. Rovnici (10.4.1) budeme aplikovat na vytknutý objem proudící tekutiny o velikosti V , hmotnosti m a o povrchu S , zobrazený na obr. 10.4.1. Uvnitř má zakreslený elementární objem dV , v němž je hustota ρ , a kde působí setrvačné zrychlení \vec{R} . Obě veličiny se mění s polohou, hustota i s časem. Na povrchu vytknuté tekutiny je zvolena elementární ploška dS . Vektor napětí, který v plošce působí je $\vec{\sigma}_S$, je v každém místě povrchu S jiný a reprezentuje účinek vytknutého objemu látky na okolní tekutinu. Když \vec{R} a $\vec{\sigma}_S$ dosadíme do hmotnostní a povrchové síly v (10.4.1), obdržíme (10.4.2). Je to integrální vektorová rovnice, kterou můžeme rozepsat do tří rovnic pro směry x, y, z . Obecně pro i -tý směr platí (10.4.3).



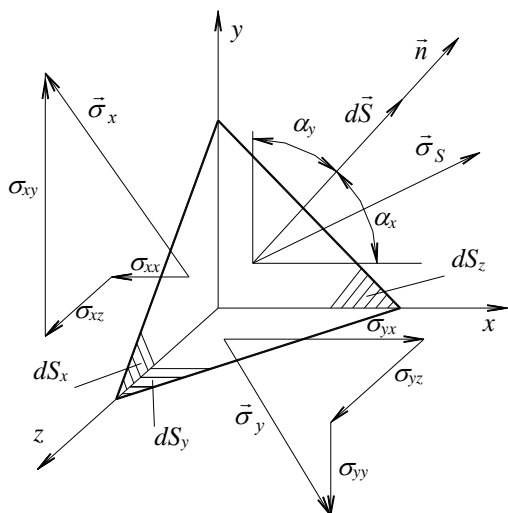
Obr. 10.4.1

$$m \frac{d\vec{w}}{dt} = \sum_I^N \vec{F}_i \quad (10.4.1)$$

$$\int_V \rho dV \frac{d\vec{w}}{dt} = \int_V \rho dV \vec{R} + \int_S \vec{\sigma}_S dS + \left(\int_V (\vec{j} \times \vec{B}) dV \right) \quad (10.4.2)$$

$$\int_V \rho \frac{dw_i}{dt} dV = \int_V \rho R_i dV + \int_S \sigma_{Si} dS + \left(\int_V (j_i \times B_i) dV \right) \quad (10.4.3)$$

Do rovnic je zařazena i elektrická síla, daná vektorovým součinem proudové hustoty \vec{j} a elektromagnetické indukce \vec{B} , abychom si uvědomili možnost působení jiných sil než jsou hmotnostní a povrchové. V dalším procesu ji však uvažovat nebudeme. Obrátíme pozornost na povrchové napětí $\vec{\sigma}_S$ (pozor, nejedná se o povrchové napětí na rozhraní 2 fází), resp. σ_{Si} . Dá se nahradit tenzorem vnitřních napětí σ_{ij} . Pro



Obr. 10.4.2

tento účel zvětšíme plošku dS a elementární čtyřstěn pod ní, což je v obr. 10.4.2. Pokud na čtyřstěn nahlížíme jako na svébytný útvar, pak napětí $\vec{\sigma}_S$ na plošce dS pochází z napětí $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$, která „přicházejí“ z vnitřku tekutiny souřadnicovými trojúhelníčky dS_x, dS_y, dS_z . Uděláme-li vektorovou rovnost sil, dostaneme (10.4.4). V ní dS_x, dS_y, dS_z jsou průměty dS do směrů souřadnicových os, což je rozvedeno v (10.4.5). V následující rovnici (10.4.6) jsou směrové kosiny přeznačeny tak, že $n_x = \cos \alpha_x, n_y = \cos \alpha_y$, atd.. Následuje rozpis vektorové rovnice do jejich tří složek pro směry x, y, z a konečně tenzorový zápis těchto rovnic (10.4.8). Je zde použita rovnost sdrúžených napětí $\sigma_{ki} = \sigma_{ik}$. Připomeňme: index i značí řádky, index k je sčítací po sloupcích. Rovnice (10.4.8) ukazuje, že vazba mezi napětím σ_{Si} a vnitřními napětími σ_{ik} je poměrně jednoduchá.

$$\vec{\sigma}_S dS = \vec{\sigma}_x dS_x + \vec{\sigma}_y dS_y + \vec{\sigma}_z dS_z = \vec{\sigma}_k dS_k \quad (10.4.4)$$

$$\vec{\sigma}_S dS = \vec{\sigma}_x dS \cos \alpha_x + \vec{\sigma}_y dS \cos \alpha_y + \vec{\sigma}_z dS \cos \alpha_z = \vec{\sigma}_k dS \cos \alpha_k \quad (10.4.5)$$

$$\vec{\sigma}_S = \vec{\sigma}_x n_x + \vec{\sigma}_y n_y + \vec{\sigma}_z n_z = \vec{\sigma}_k n_k \quad (10.4.6)$$

$$\sigma_{Si} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{Sx} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z \\ \sigma_{Sy} = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z \\ \sigma_{Sz} = \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{array} \right\} = \sigma_{ki} n_k \quad (10.4.7)$$

$$\sigma_{Si} = \sigma_{ki} n_k = \sigma_{ik} n_k \quad (10.4.8)$$

Napětí $\sigma_{Si} = \sigma_{ik} n_k$ dosadíme do pohybové rovnice a dostaneme její nový tvar (10.4.9), již bez elektrické síly, který obsahuje 2 integrály objemové a 1 plošný. Plošný integrál převedeme podle Gaussovy - Ostrogradského věty (3.4.3) na objemový, integrály převedeme na levou stranu a sečteme, viz (10.4.10). Protože objem V byl vybrán libovolně, musí být nulový i integrand. Po jeho vydělení hustotou obdržíme Navier - Stokesovu rovnici s napětím σ_{ik} (10.4.11).

$$\text{Gaussova - Ostrograd. věta: } \int_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{a} dV \Leftrightarrow \int_S a_k n_k dS = \int_V \frac{\partial a_k}{\partial k} dV \quad (3.4.3)$$

$$\int_V \rho \frac{dw_i}{dt} dV = \int_V \rho R_i dV + \int_S \sigma_{ik} n_k dS \quad (10.4.9)$$

$$\int_V \rho \frac{dw_i}{dt} dV = \int_V \rho R_i dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial k} dV \rightarrow \int_V (\rho \frac{dw_i}{dt} - \rho R_i - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial k}) dV = 0 \quad (10.4.10)$$

$$\text{N-S: } \frac{dw_i}{dt} = R_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial k} \quad (10.4.11)$$

Zbývá poslední krok, a to za σ_{ik} dosadit jeho funkční závislost na rychlosti proudění. V předchozí stati 10.3 máme uvedený výraz σ_{ij} (10.3.18). Tenzor σ_{ik} dostaneme ze σ_{ij} pouhým přepisem indexů, když místo j dáme sčítací index k a místo k další sčítací index l , viz (10.4.12). V rov. (10.4.13) byl tlak derivován podle k , ale uvedena je derivace $\partial p / \partial i$. Je to v pořádku, protože p je jen na hlavní diagonále, takže derivovat podle k znamená derivovat podle i . Totéž je v posledním členu rovnice. U předposledního jsou prohozeny argumenty, podle nichž se derivuje.

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial w_i}{\partial j} + \frac{\partial w_j}{\partial i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial w_k}{\partial k} \right) \quad (10.3.18)$$

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial w_i}{\partial k} + \frac{\partial w_k}{\partial i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial w_l}{\partial l} \right) \quad (10.4.12)$$

$$(12) \rightarrow (11) \quad \frac{dw_i}{dt} = R_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial k^2} + \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial w_k}{\partial k} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial w_k}{\partial k} \right) \right) \quad (10.4.13)$$

$$\text{N-S:} \quad \underbrace{\frac{\partial w_i}{\partial t}}_1 + w_k \underbrace{\frac{\partial w_i}{\partial k}}_2 = \underbrace{R_i}_3 - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i}}_4 + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 w_i}{\partial k^2}}_5 + \underbrace{\frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial w_k}{\partial k} \right)}_6 \quad (10.4.14)$$

V Navier – Stokesově rovnici (10.4.14) jsou první 4 členy totožné s Eulerovou rov. (5.6.4), tj. s pohybovou rovnicí pro nevazké proudění, vliv vazkosti je obsažen v 5. a 6. členu. První z nich je při vazkém proudění přítomen vždy. Druhý vazký člen jen pokud proudění je stlačitelné, protože u nestlačitelného proudění je rovnice kontinuity $\partial w_k / \partial k = 0$. Udělejme přehled o fyzikálním významu jednotlivých členů. Protože první člen je evidentně zrychlení, jsou také všechny ostatní členy zrychlení. Můžeme na ně též nahlížet jako na síly pro jednotkovou hmotnost tekutiny. Zůstaňme však u zrychlení:

1. člen je **místní (lokální) zrychlení**, které zaznamenáme při sledování určitého bodu proudového pole v průběhu času.
2. člen je **vnitřní setrvačné zrychlení**, které zaznamenáme, když se posuneme do sousedního bodu prostoru, kde je jiná rychlost.
3. člen je **vnější setrvačné zrychlení**, dané vnějšími účinky na proudové pole (gravitační zrychlení, odstředivé zrychlení, dané rotací kanálů, v němž probíhá proudění, apod.)
4. člen je **zrychlení od tlakových sil**, od rozložení tlaku v proudovém poli.
5. člen je **zrychlení od třecích sil bez ohledu na stlačitelnost proudění**.
6. člen je **zrychlení od třecích sil s ohledem na stlačitelnost proudění**.

Z matematického hlediska je Navier - Stokesova rovnice parciální diferenciální rovnice druhého řádu, obecně eliptického typu a obecně nelineární. Nelinearitu způsobuje 2. člen, který má za následek obtížné řešení a hysterezi výsledků, především rychlostí w . Analytické řešení je možné jen u zjednodušených případů, tj. když lze některé členy, zejména nelineární, vynechat, a když je geometrie řešeného útvaru prostá. Numerické řešení je reálné a běžně se provádí v komerčních programech i programech badatelů.

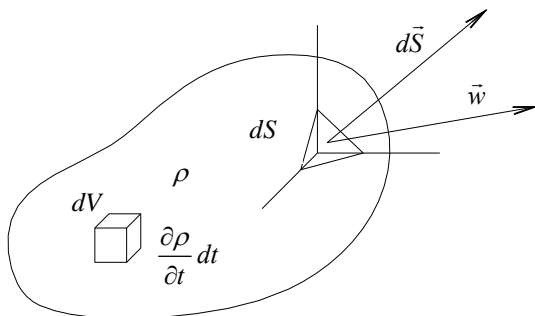
Navier - Stokesova rovnice platí jak pro laminární, tak pro turbulentní proudění. Současný stav výpočtové techniky však umožňuje řešit jen případy laminární. U turbulentních úloh, kde se všechny řešené veličiny (w , p , ρ) rychle a nahodile mění, se musí použít N-S rovnic určitým způsobem upravit (ustřednit v čas). Tím se ztrácí flukuační část veličin a zůstávají střední hodnoty proudění. I ty jsou cenné.

Na závěr uvedeme, jak bude vypadat rozpis N-S rovnice (10.4.14) v pravoúhlém dvourozměrném (2D) prostoru:

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) \quad (10.4.15)$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) \quad (10.4.16)$$

10.5 Rovnice kontinuity prostorového proudění



Obr. 10.5.1

Rovnice kontinuity byla ve stati 5.5 odvozena pro proudovou trubici, ale jeden z dosažených tvarů, konkrétně (5.5.8), platí i pro prostorové proudění. Na tomto místě uděláme přímé odvození pro objem zobrazený na obr.10.5.1. Tekutina do něho vstupuje a jinudy vystupuje. Kdyby byla tekutina nestlačitelná, pak integrál průtočné hmotnosti na levé straně (10.5.1) by se rovnal nule. Je-li však hodnota tohoto integrálu kladná, tj. více vyteče než vteče, musí se toto množství rovnat úbytku hmotnosti v objemu, způsobenému časovou změnou hustoty $\partial \rho / \partial t$ dle (10.5.1). Pomocí Gaussovy - Ostrogradského věty se převede plošný integrál na objemový, integrály

sečteme a již dříve uvedeným postupem obdržíme **rovnici kontinuity** (10.5.3). Její tenzorový zápis je (10.5.4), je-li tekutina nestlačitelná, rovnice se zredukuje na (10.5.5).

$$\int_S \rho \bar{w} d\bar{S} dt = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dt dV \quad \left| \cdot \frac{1}{dt} \right. \quad (10.5.1)$$

G-O věta:
$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \text{div}(\rho \bar{w}) dV = 0 \quad (10.5.2)$$

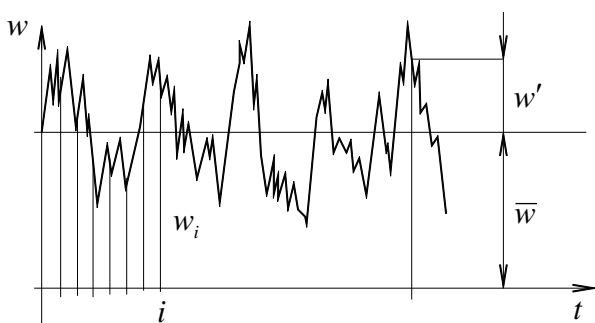
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{w}) = 0 \quad (10.5.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_k)}{\partial k} = 0 \quad (10.5.4)$$

Pro $\rho = \text{konst.}$
$$\frac{\partial w_k}{\partial k} = 0 \quad (10.5.5)$$

10.6 Rovnice turbulentního proudění

Při turbulentním proudění se základní veličiny p , ρ , w , (T) neustále nahodile mění vlivem vířivé struktury proudění. Typický průběh rychlosti v závislosti na čase je na obr. 10.6.1, kde rychlost w kolísá kolem střední hodnoty \bar{w} (základní rychlost) s okamžitými odchylkami w' (podružná rychlost, fluktuace rychlosti). Pro rychlost a obdobně pro tlak či hustotu platí (10.6.1), kde časově střední hodnoty se vypočtou dle (10.6.2).



obr. 10.6.1

Čas t_0 musí být samozřejmě dostatečně dlouhý, teoreticky nekonečně dlouhý. Totéž platí o numerickém vzorkování w_i , p_i , kde počet vzorků N musí být náležitě vysoký. Velikost fluktuací se hodnotí podle směrodatné odchylky fluktuací, anglicky root mean square (RMS), která je pro w' , p' definovaná na řádcích (10.6.3), (10.6.4). Velikost fluktuací rychlosti se nejvýstižněji vyjadřuje intenzitou turbulence o složkách I_x, I_y, I_z dle (10.6.5). Bývá udávána v procentech a potom za uklidňujícími síty má velikost desetiny procenta a naopak za turbulizujícími hrubými mřížemi desítky procent základní rychlosti \bar{w} .

$$w = \bar{w} + w' \quad , \quad p = \bar{p} + p' \quad , \quad \rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (10.6.1)$$

$$\bar{w} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} w dt = \frac{1}{N} \sum_1^N w_i \quad , \quad \bar{p} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} p dt = \frac{1}{N} \sum_1^N p_i \quad (10.6.2)$$

$$\text{RMS } w' = \sqrt{\overline{w'^2}} = \left(\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} w'^2 dt \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{N} \sum_1^N w_i'^2 \right)^{1/2} \quad (10.6.3)$$

$$\text{RMS } p' = \sqrt{\overline{p'^2}} = \left(\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} p'^2 dt \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{N} \sum_1^N p_i'^2 \right)^{1/2} \quad (10.6.4)$$

$$I_x = \frac{\sqrt{\overline{w_x'^2}}}{\bar{w}} \cdot 100 [\%] \quad , \quad I_y = \frac{\sqrt{\overline{w_y'^2}}}{\bar{w}} \cdot 100 [\%] \quad , \quad \text{kde } \bar{w} = \sqrt{\bar{w}_x^2 + \bar{w}_y^2 + \bar{w}_z^2} \quad (10.6.5)$$

Všimněme si, že v použité symbolice pruh nad písmenem znamená střední hodnotu dosaženou integračním procesem (10.6.6). Pak snadno pochopíme uvedená ustředňovací pravidla: časová střední hodnota rovnice se provede, když ustředníme levou a pravou stranu rovnice zvlášť; střední hodnota součtu je součet středních hodnot; střední hodnota z fluktuací je nula, protože kladné a záporné fluktuace se za dlouhý čas ruší; střední hodnota ze střední hodnoty již střední hodnotu nemění; atd.

$$\bar{a} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} a dt \quad \quad \bar{b} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} b dt \quad (10.6.6)$$

$$\overline{a=b} \Leftrightarrow \bar{a}=\bar{b} \quad (10.6.7)$$

$$\overline{a+b} = \bar{a}+\bar{b} \quad (10.6.8)$$

$$\bar{a}'=0, \quad \bar{\bar{a}}=\bar{a}, \quad \overline{\bar{a}+a'}=\bar{\bar{a}}+\bar{a}'=\bar{a}, \quad \overline{a'b'}=\bar{a}'\bar{b}'=0 \quad (10.6.9)$$

$$\overline{\bar{a}+b}=\bar{a}+\bar{b}, \quad \overline{a'b'} \neq 0, \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial k} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial k} \quad (10.6.10)$$

Můžeme přistoupit k ustředění základních rovnic turbulentního proudění, tj. rovnice kontinuity, Navier - Stokesovy rovnice a u neizotermických proudění by se ještě ustřednila energetická rovnice.

- **Ustřednění rovnice kontinuity** provedeme krok za krokem, postup není třeba komentovat. Výsledná rovnice (10.6.13) má oproti výchozí rovnici kontinuity jeden člen navíc, obsahující derivaci tzv. kovariance fluktuací $\rho'w'_k$ (ve skutečnosti jsou to obecně členy 3). Pokud je proudění nestlačitelné, viz (10.6.14), není rozdílu mezi rovnicemi spojitosti laminárního a turbulentního proudění. Turbulentní rovnice však operuje s ustředěnými rychlostmi \bar{w}_k .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_k)}{\partial k} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} w_k)}{\partial k} = \bar{0} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} w_k)}{\partial k} = 0 \quad (10.6.11)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial[(\bar{\rho} + \rho')(\bar{w}_k + w'_k)]}{\partial k} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{w}_k + \rho'w'_k + \bar{\rho}w'_k + \rho'w'_k)}{\partial k} = 0 \quad (10.6.12)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{w}_k)}{\partial k} + \frac{\partial \rho'w'_k}{\partial k} = 0 \quad (10.6.13)$$

$$\text{pro } \rho = \text{konst}, \rho' = 0 \quad \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial k} = 0 \quad (10.6.14)$$

- **Ustřednění Navier - Stokesovy rovnice** je složitější než u rovnice kontinuity. Výchozím tvarem N-S rovnice je (10.4.11), kterou pro ustřednění upravíme následujícím způsobem. Vynásobíme ji ρ a dostaneme (10.6.15). Rovnici kontinuity vynásobíme w_i , tím vznikne (10.6.17). Tuto rovnici přičteme k upravené N-S r. (10.6.15), čímž se hodnota N-S nezmění, protože přičtená RK má nulovou hodnotu. Součtová N-S je (10.6.18) a kdykoliv budeme potřebovat, můžeme se vrátit k jejímu původnímu tvaru (10.6.15), který je ekvivalentní. Upravenou N - S rovnici ustředníme člen po členu (10.6.19). Na řádcích (10.6.20) až (10.6.22) je připraveno ustřednění součinnů $\overline{\rho w_i}, \overline{\rho w_k w_i}, \overline{\rho R_i}$. Člen $\overline{\rho w_k w_i}$ je ustředněn podle Van Driesta, který se na součin ρw_k dívá jako na celek, jenž má svou základní $\overline{\rho w_k}$ a flukuační j'_k hodnotu, tj. $\rho w_k = \overline{\rho w_k} + j'_k$. Dosazení ustředněných součinnů do rovnice je uděláno tak, že členy obsahující fluktuace jsou převedeny na pravou stranu, čímž vznikne **Van Driestova rovnice** (10.6.23). Pokud její levou stranu vrátíme do původního výchozího tvaru, dostaneme (10.6.24), která má první čtyři členy stejné jako pro laminární proudění (ovšem veličiny jsou vesměs ustředněné v čase) a vliv fluktuací je v posledních 2 členech pravé strany. Tyto 2 členy ovšem po rozepsání rovnice do tří rovnic a uplatnění součtového indexu k reprezentují ve skutečnosti $3 + 9 = 12$ **nových neznámých**, které u laminárního proudění neexistují. Matice o 9 prvcích je symetrická, takže neznámých má 6.

$$\text{N-S} \quad \frac{dw_i}{dt} = R_i + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial k} \quad \Bigg| \cdot \rho \quad (10.4.11)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial w_i}{\partial t} + \rho w_k \frac{\partial w_i}{\partial k} = \rho R_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial k} \quad (10.6.15)$$

$$\text{R.K.} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_k)}{\partial k} = 0 \quad \Bigg| \cdot w_i \quad (10.6.16)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot w_i + \frac{\partial(\rho w_k)}{\partial k} w_i = 0 \quad (10.6.17)$$

$$(15)+(17): \quad \frac{\partial(\rho w_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_k w_i)}{\partial k} = \rho R_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial k} \quad (10.6.18)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} w_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} w_k w_i)}{\partial k} = \bar{\rho} R_i + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ik}}{\partial k} \quad (10.6.19)$$

$$\overline{\rho w_i} = \overline{(\bar{\rho} + \rho')(\bar{w}_i + w'_i)} = \bar{\rho}\bar{w}_i + \rho'w'_i + \bar{\rho}w'_i + \rho'w'_i = \bar{\rho}\bar{w}_i + \rho'w'_i \quad (10.6.20)$$

$$\overline{\rho w_k w_i} = \overline{(\rho w_k + j'_k)(\bar{w}_i + w'_i)} = \overline{\rho w_k \bar{w}_i} + \overline{j'_k \bar{w}_i} + \overline{\rho w_k w'_i} + \overline{j'_k w'_i} = \overline{\rho w_k \bar{w}_i} + \overline{j'_k w'_i} \quad (10.6.21)$$

$$\overline{\rho w_i} = (\overline{\rho} + \overline{\rho'}) \bar{R}_i = \overline{\rho} \bar{R}_i \quad (10.6.22)$$

$$\text{V.D.:} \quad \frac{\partial(\overline{\rho w_i})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho w_k \cdot w_i})}{\partial k} = \overline{\rho} \bar{R}_i + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ik}}{\partial k} - \frac{\partial(\overline{\rho' w'_i})}{\partial t} - \frac{\partial(\overline{j'_k w'_i})}{\partial k} \quad (10.6.23)$$

$$\text{V.D.:} \quad \overline{\rho} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t} + \overline{\rho w_k} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial k} = \overline{\rho} \bar{R}_i + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ik}}{\partial k} - \frac{\partial(\overline{\rho' w'_i})}{\partial t} - \frac{\partial(\overline{j'_k w'_i})}{\partial k} \quad (10.6.24)$$

Van Driestova rovnice platí pro stlačitelné turbulentní proudění. Jestliže budeme mít proudění nestlačitelné, platí pro ně podmínky (10.6.25) a po jejich dosazení do Van Driestovy rovnice obdržíme **Reynoldsovu rovnici** (10.6.26) resp. (10.6.27). Nové neznámé s fluktuacemi tvoří symetrickou matici o $3 \times 3 = 9$ prvcích. Pro 6 z nich neznámých $-\overline{\rho w'_k \cdot w'_i}$ se musí sestavit 6 doplňkových rovnic, tzv. transportních. Protože přirozené principy (zákony zachování hmotnosti, hybnosti, energie) jsou vyčerpány, jsou transportní rovnice vytvořeny poněkud uměle. Této problematice je věnována pozornost v navazujícím kurzu mechaniky tekutin.

$$\text{nestlačitelná tekutina:} \quad \rho = \text{konst}, \quad \rho' = 0, \quad j'_k = \rho w'_k \quad (10.6.25)$$

$$(25) \rightarrow (24): \quad \rho \cdot \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t} + \overline{\rho w_k} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial k} = \rho \bar{R}_i + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ik}}{\partial k} + \frac{\partial(-\overline{\rho w'_k w'_i})}{\partial k} \quad (10.6.26)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t} + \overline{\rho w_k} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial k} = \rho \bar{R}_i + \frac{\partial}{\partial k} (\bar{\sigma}_{ik} - \overline{\rho w'_k w'_i}) \quad (10.6.27)$$

Ze závorky poslední rovnice je zřejmé, že oba členy musí být tenzory napětí, první je molekulární, druhý molární, turbulentní.

10.7. Molární vazkost

Zabývejme se tenzorem napětí v závorce Reynoldsovy rovnice (10.6.27) pro nestlačitelné proudění. Když za molekulární část dáme jeho závislost na střední rychlosti \bar{w} podle (10.3.18), dostaneme rozpis (10.7.1). Z 9 složek σ_{ij} určíme alespoň 2, a to normální σ_{xx} a smykovou σ_{yx} . Je zažitým zvykem značit smyková napětí písmenem τ , tedy $\sigma_{yx} = \tau_{yx}$.

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \overline{\rho w'_j w'_i} = -\bar{p} \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial i} \right) - \overline{\rho w'_j w'_i} \quad (10.7.1)$$

$$\sigma_{xx} = -\bar{p} + 2\eta \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} - \overline{\rho w'_x{}^2} \quad (10.7.2)$$

$$\sigma_{yx} = \eta \left(\frac{\partial \bar{w}_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right) - \overline{\rho w'_x w'_y} = \tau_{yx} \quad (10.7.3)$$

Uvažujme proudění, u něhož existuje pouze základní rychlost $\bar{w}_x(x, y)$. Turbulentní fluktuace jsou vždy prostorové, tj. vedle w'_x zde bude též w'_y, w'_z , takže smykové napětí (10.7.3) se zjednoduší na (10.7.4). Je pochopitelnou snahou vyjádřit turbulentní složku smykového napětí stejným způsobem jako laminární složku pomocí jakési turbulentní či molární vazkosti η_T . Vyjádření η_T dostaneme z porovnání posledních členů (10.7.4) a (10.7.5).

$$\bar{w}_x(x, y): \quad \tau_{yx} = \sigma_{yx} = \eta \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} - \overline{\rho w'_x w'_y} \quad (10.7.4)$$

$$\tau_{yx} = \sigma_{yx} = \eta \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} + \eta_T \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \quad (10.7.5)$$

$$\eta_T = \frac{-\overline{\rho w'_x w'_y}}{\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}} \quad (10.7.6)$$

Vidíme, že molární vazkost η_T na rozdíl od molekulární η není zásadně látkovou vlastností, ale závisí na stavu proudění, tj. na rychlostním spádu základní rychlosti $\partial \bar{w}_x / \partial y$, na kovarianci fluktuací w'_x, w'_y a

z látkových vlastností pouze na hustotě. Je zřejmé, že vzhledem ke značné proměnlivosti citovaných rychlostních veličin, se bude η_T v proudovém poli měnit vlastně od bodu k bodu a práce s ní bude obtížná. Rychlostní veličiny v η_T se dají měřit, konkrétně kovariance $\overline{w'_x w'_y}$ drátkovým nebo laserovým anemometrem. Kovariance se však nedá vypočítat, protože s nahodilými fluktuacemi o širokém spektru frekvencí nelze dosud numericky pracovat.

Počínaje rokem 1925 po celý zbytek 20. století probíhaly výzkumy, jak turbulentní vazkost η_T vyjádřit jinak než pomocí fluktuací rychlosti. První model navrhl ve zmíněném roce L. Prandtl na bázi tzv. směšovací délky l , kolmé k obtékané stěně. Molární částice po proběhnutí l ztrácejí fluktuační rychlost w'_y (analogie střední volné dráhy molekul), viz (10.7.7). Těžiště problému se přesunulo na určení směšovací délky l . Prandtl sám navrhl $l = \kappa y$ ($\kappa = 0,4$) a jeho spolupracovníci Nikuradse a Kármán doporučili jiné vztahy níže uvedené.

Prandtl v roce 1945 navrhl nový model $\eta_T = \rho \sqrt{K} \cdot l$. Zde $K = \overline{w_k'^2} / 2$, turbulentní kinetická energie, se nepočítá z fluktuací, ale ze speciálně postavené diferenciální rovnice pro transport K , zatím co l se stále určuje z algebraického vzorce. Model tedy využívá 1 diferenciální rovnici a je modelem jednorovnicovým. Zdá se, že byl Prandtl inspirován Kolmogorovem, který v roce 1942 publikoval $\eta_T = \rho K / f$, dvourovnicový model, u něhož se turbulentní kinetická energie K a frekvence f energetických vírů (největších vírů ve spektru turbulence) počítají z parciálních diferenciálních rovnic pro transport K a f .

Vývoj pokračoval, vznikly pěti i vícerovnicové modely, od 80. let se ustálil na Chowově dvourovnicovém K - ε modelu $\eta_T = C_\eta \rho K^2 / \varepsilon$, vytvořeném ve smyslu úvah Kolmogorova. Konstanta C_η se doporučuje 0,09 až 0,11, ρ je hustota, K turbulentní kinetická energie, ε měrná disipace, udávající množství kinetické energie přeměněné na teplo v 1 kg látky. Obě poslední veličiny se vypočítávají z provázané soustavy 2 parciálních diferenciálních rovnic pro transport K a ε . K - ε model je nosným modelem turbulentní vazkosti soudobých programů pro výpočet proudění.

Nástin vývoje η_T :

$$\text{Prandtl (1925):} \quad \eta_T = \rho l^2 \cdot \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y}, \quad l = \kappa y \quad (\kappa = 0,4) \quad (10.7.7)$$

$$l = 0,07\delta, \quad \delta \text{ je tloušťka mezní vrstvy na desce} \quad (10.7.8)$$

$$l = \left[0,14 - 0,08(1 - y/R)^2 - 0,06(1 - y/R)^4 \right] \cdot R \quad (10.7.9)$$

u trubky $\varnothing 2R$ dle Nikuradse

$$\text{Kármán (1930):} \quad \eta_T = \rho l^2 \cdot \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y} \quad l = \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial^2 \overline{w}_x}{\partial y^2} \quad (10.7.10)$$

$$\text{Prandtl (1945):} \quad \eta_T = \rho \sqrt{K} l, \quad K = \frac{1}{2} \overline{w_k'^2} \text{ se určuje z parciální transportní rovnice} \quad (10.7.11)$$

l se určí z algebraického vzorce
 $\equiv 1$ rovnicový model

$$\text{Kolmogorov (1942):} \quad \eta_T = \rho K / f, \quad K = \frac{1}{2} \overline{w_k'^2} \text{ se určuje z parciální transportní rovnice} \quad (10.7.12)$$

f je frekvence energetických vírů z parc. dif. rovnice
 $\equiv 2$ rovnicový model

$$\text{Bradshaw (1967):} \quad \eta_T = a \rho K, \quad a = 0,3, \quad \rho \text{ je hustota} \quad (10.7.13)$$

$K = \frac{1}{2} \overline{w_k'^2}$ se určuje z parciální diferenciální rovnice
 $\equiv 1$ rovnicový model

$$\text{Chow (1945):} \quad \eta_T = C_\eta \rho K^2 / \varepsilon, \quad C_\eta = 0,09 \div 0,11, \quad \rho \text{ je hustota} \quad (10.7.14)$$

$K = \frac{1}{2} \overline{w_k'^2}$ se určuje z parciální diferenciální rovnice
 ε je měrná disipace a také se určuje se z parc. dif. rovnice
 $\equiv 2$ rovnicový model

11. Podobnost v mechanice tekutin

Existují velká a složitá technická díla, např. parní kotle, která stále neumíme komplexně z hlediska proudění či sdílení tepla propočítat tak, abychom měli jistotu, že po uvedení do provozu budou mít požadované parametry, jako je výkon, pevnost, funkční spolehlivost atd. Je však možné jejich vlastnosti předem ověřit na zmenšeném fyzikálním modelu, u drobných děl na zvětšeném modelu. Při tom místo spalín se modelem kotle prohání voda a přesto jsou naměřené výsledky přenesitelné na mnohonásobně větší dílo. Je třeba ovšem vědět, jak má model vypadat, co v něm při testech měřit, jak zpracovat výsledky měření, aby se daly přenést na dílo a měly co nejobecnější platnost. Odpověď na tyto a další otázky dává teorie podobnosti.

11.1 Teorie podobnosti

Základním nástrojem teorie podobnosti je **kriterium podobnosti**. Kriterium podobnosti v oboru proudění je seskupení hlavně geometrických, kinematických a fyzikálních veličin, které je bezrozměrové a má hlubší fyzikální význam. Bezrozměrových seskupení veličin je možné vytvořit tisíce, ale jen některá mají hlubší fyzikální význam: jsou poměrem významných sil, poměrem energií apod. Jedno z kritérií podobnosti jsme poznali, a sice Reynoldsovo číslo $Re = wD/\nu$. Je poměrem setrvačné a třecí síly, obsahuje w jako kinematickou veličinu, D jako geometrickou a ν jako fyzikální veličinu. Ne všechny 3 citované druhy veličin musí kriterium podobnosti v proudění obsahovat. Existují jednoduchá kritéria, tzv. simplexy, které jsou poměrem dvou veličin. Např. pro potrubí je charakteristickým simplexem L/D , kde L je délka a D průměr.

Máme-li nějaký fyzikální proces, zpravidla u něho můžeme sestavit více kritérií podobnosti K_1, K_2, \dots, K_n . Je-li jiný proces podobný, dají se u něho sestavit tatáž kritéria K_1, K_2, \dots, K_n . Mezi kritérii procesu existuje určitá závislost, kterou můžeme vyjádřit implicitně funkcí (11.1.1) nebo explicitně tak, že kriterium, jež nás zajímá nejvíce, např. K_2 , vyjádříme jako funkci zbývajících podle (11.1.2). Kritéria K_1, K_3, \dots, K_n , která zůstala na pravé straně, jsou tzv. určující kritéria podobnosti.

$$f(K_1, K_2, K_3, \dots, K_n) = 0 \quad (11.1.1)$$

$$K_2 = f(K_1, K_3, \dots, K_n) \quad (11.1.2)$$

Uvedeným rovnicím sestaveným z kritérií podobnosti se říká **kriteriální rovnice**. U podobných jevů jsou kriteriální rovnice totožné včetně konstant. Kriteriální rovnici můžeme považovat za experimentální cestou vyšetřené řešení parciálních diferenciálních rovnic popisujících zkoumaný případ proudění. Kdybychom totiž dané rovnice řešili analyticky a správně, dostaneme určitý výsledek. Jestliže tutéž úlohu vyšetřujeme experimentálně při totožných podmínkách, přičemž správně měříme a správně vyhodnocujeme výsledek do kriteriální rovnice, musí být oba výsledky totožné.

Co se měří? Při zkouškách nutno měřit všechny veličiny obsažené v kritériích podobnosti zkoumaného procesu. Ale ne všechny veličiny se musí měnit při vyšetřování závislostí a vazeb. To je velmi významné. Jestliže chci např. měnit Re číslo, nemusím střídat tekutiny k dosažení různých vazkostí, nemusím měnit rozměry kanálu. Stačí když měním rychlost proudění změnou otáček čerpadla či kompresoru, tedy jednoduše a pohotově. Při přímém vyšetřování závislostí mezi veličinami, když bych nepracoval s kritérii, musel bych všechny veličiny měnit.

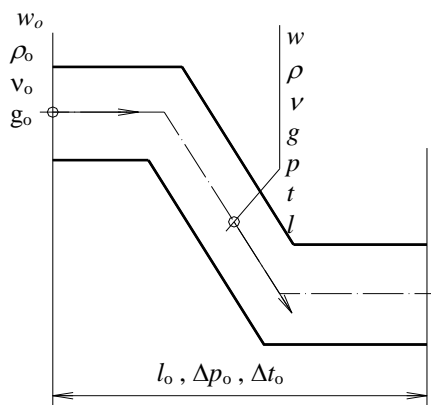
Jakým způsobem zpracovat výsledky zkoušek? Podle předchozího textu snadno odpovíme: výsledky nutno vyjádřit kritérii podobnosti a vztahy mezi nimi dát do tvaru kriteriální rovnice.

Kdy jsou 2 jevy či procesy podobné? Jsou podobné, jestliže splňují geometrickou podobnost a jestliže mají podobné okrajové podmínky, tj. určující kritéria (na pravé straně kriteriální rovnice) jsou číselně totožná. Geometrická podobnost se může týkat i takových detailů, jakými jsou drsnosti stěn, zaoblení hran apod.

Zbývá vyřešit poslední principiální otázku, a to jak a odkud pořídíme všechna kritéria podobnosti platná pro vyšetřovaný proces. Jsou 2 možnosti. Pokud známe parciální **diferenciální rovnice** zkoumaného jevu, pak z nich. V následující stati ukážeme, jak se to dělá. Pokud rovnice neznáme, můžeme použít **dimenzionální analýzu**, tj. sepiše se seznam veličin, o nichž se domníváme, že mají v dané úloze význam, a analýzou jejich rozměrů se určí počet a druh kritérií. Úspěch výsledku závisí na správném seznamu veličin. Bude-li jich málo, nikdy úlohu nezobecníme, bude-li jich moc, zbytečně se nadřeme, protože některé nemají vliv.

11.2. Odvození kritérií podobnosti

Zjistíme, která kritéria podobnosti plynou z Navier - Stokesovy rovnice (10.4.14). Zkrátíme ji o poslední člen, který má z hlediska podobnosti stejný význam jako předposlední. Rovnici budeme aplikovat na proudění v kanálu na obr. 11.2. Konkrétně na zvolený bod o parametrech w, ρ, ν, g, p , vzdálený l od vstupu v okamžiku t . Známe parametry na vstupu w_0, ρ_0, ν_0, g_0 , délku kanálu l_0 , celkovou změnu tlaku na ní Δp_0 a čas potřebný k protečení kanálem Δt_0 . Zavedeme bezrozměrové parametry (11.2.1) a pomocí nich vyjádříme



Obr. 11.2.1

všechny veličiny v N-S rovnici, dostaneme (11.2.2). Každý člen rovnice se skládá jednak ze známých vstupních veličin, jednak z bezrozměrových parametrů. Seskupení vstupních veličin s indexy 0 jsou označena pořadovými čísly (1) až (5).

Vydělme celou rovnici skupinou (2) a sledujme co se stalo. Po vydělení obsahuje 2. člen pouze bezrozměrové parametry. Protože rovnice je homogenní, musí být všechny členy bezrozměrové. V prvním členu je tedy celek bezrozměrový, část která obsahuje derivaci je bezrozměrová a tedy zbytek s nulovými indexy musí být rovněž bezrozměrový. Navíc vznikl porovnáním 1. a 2. členu N-S rovnice, má tudíž hlubší fyzikální význam, je to kritérium podobnosti. Když budeme Δt_0 považovat za periodu periodického pohybu, můžeme ji nahradit frekvencí a dostaneme známé Strouhalovo číslo $Sh = fl/w$. Následuje odvození dalších kritérií. V dělení rovnice není zachován systém, protože kritéria byla známa a používána dříve než N - S rovnice.

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + w_k \cdot \frac{\partial w_i}{\partial k} = R_i - \frac{l}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial i} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w_i}{\partial k^2} \quad (10.4.14)$$

$$\frac{w}{w_0} = c_w, \quad \frac{t}{\Delta t_0} = c_t, \quad \frac{l}{l_0} = c_l, \quad \frac{g}{g_0} = c_g, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = c_\rho, \quad \frac{\nu}{\nu_0} = c_\nu, \quad \frac{p}{\Delta p_0} = c_p \quad (11.2.1)$$

$$\frac{w_0}{\Delta t_0} \frac{\partial c_{wi}}{\partial t} + \frac{w_0^2}{l_0} \cdot c_{wk} \frac{\partial c_{wi}}{\partial c_l} = g_0 c_g - \frac{\Delta p_0}{\rho_0 l_0} \frac{l}{c_\rho} \frac{\partial c_p}{\partial c_l} + \frac{\nu_0 w_0}{l_0^2} c_\nu \frac{\partial^2 c_{wi}}{\partial c_l^2} \quad (11.2.2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} : \quad \frac{w_0 l_0}{\Delta t_0 w_0^2} = \frac{l_0}{\Delta t_0 w_0} = \frac{f_0 l_0}{w_0} \rightarrow \frac{f \cdot l}{w} = Sh \quad \text{Strouhalovo číslo} \quad (11.2.3)$$

Strouhalovo číslo vyjadřuje poměr místního a setrvačného zrychlení, poměr lokální a setrvačné síly.

$$\frac{(3)}{(2)} : \quad \frac{g_0 l_0}{w_0^2} \rightarrow \frac{gl}{w^2} = Fr \quad \text{Froudeho číslo} \quad (11.2.4)$$

Froudeho číslo vyjadřuje poměr tíhové a setrvačné síly.

$$\frac{(4)}{(2)} : \quad \frac{\Delta p_0 l_0}{\rho_0 l_0 w_0^2} = \frac{\Delta p_0}{\rho_0 w_0^2} \rightarrow \frac{\Delta p}{\rho w^2} = Eu \quad \text{Eulerovo číslo} \quad (11.2.5)$$

Eulerovo číslo vyjadřuje poměr tlakové a setrvačné síly

$$\frac{(2)}{(5)} : \quad \frac{w_0^2 l_0^2}{l_0 \nu_0 w_0} = \frac{w_0 l_0}{\nu_0} \rightarrow \frac{wl}{\nu} = Re \quad \text{Reynoldsovo číslo} \quad (11.2.6)$$

Reynoldsovo číslo vyjadřuje poměr setrvačné a třecí síly.

Pokud bychom vyšetřovali kritérium podobnosti, které dává rovnice kontinuity, dostaneme Strouhalovo číslo. Ze vztahu pro roztažnost kapaliny plyne simplex γAT :

$$dV = \gamma dT, \quad \frac{V}{V_0} = c_V, \quad \frac{\gamma}{\gamma_0} = c_\gamma, \quad \frac{T}{\Delta T_0} = c_T, \quad V_0 d c_V = \gamma_0 V_0 \Delta T_0 c_\gamma c_V d c_T \rightarrow K = \gamma \Delta T \quad (11.2.7)$$

Kritéria je dovolené mezi sebou násobit a dělit, čímž vznikají další používaná kritéria podobnosti, např. Galileovo číslo (11.2.8) nebo Grashoffovo číslo (11.2.9)

$$Fr \cdot Re^2 = \frac{gl}{w^2} \cdot \frac{w^2 l^2}{\nu^2} = \frac{gl^3}{\nu^2} = Ga \quad \text{Galileovo číslo} \quad (11.2.8)$$

Galileovo číslo vyjadřuje poměr tíhové a třecí síly

$$\gamma \Delta T \cdot Ga = \gamma \Delta T \frac{gl^3}{\nu^2} = Gr \quad \text{Grashoffovo číslo} \quad (11.2.9)$$

Grashoffovo číslo vyjadřuje poměr tíhové a třecí síly s ohledem na teplotní roztažnost tekutiny.

Kritérii podobnosti v proudění se používá více, všeobecně dobře známé je Machovo číslo $Ma = w/a$, kde w je rychlost proudění a a je rychlost zvuku, nebo Lavalovo číslo $La = w/w_{KR}$, kde w_{KR} je rychlost proudění v minimálním průřezu kanálu rovná rychlosti zvuku. Některá kritéria jsou dosti speciální, např. Eckertovo číslo, které se používá u zředěných plynů, či třeba kritéria charakterizující tvorbu parních bublin na stěně nádrže.

11.3 Tvorba kritériální rovnice

Mějme případ periodického proudění o střední rychlosti w , měnící se s frekvencí f , které probíhá v kanále s charakteristickým rozměrem l . Tekutina má hustotu ρ a kinematickou vazkost ν . Chtěli bychom zjistit závislost tlakové ztráty Δp na výše uvedených parametrech. Kdybychom pracovali bez znalosti teorie podobnosti, museli bychom vyšetřovat závislost Δp na 5 veličinách podle (11.3.1), tj. postupně a nezávisle by se měnilo oněch 5 veličin, aby se funkce stanovila – snad to ani vzhledem k rozsahu měření nejde. Druhá možnost je, že se z veličin sestaví kritéria podobnosti uvedená na řádku (11.3.2) a vyšetřuje se závislost Eu číslo na zbývajících dvou, tj. Re , Sh . K změnám Re stačí měnit rychlost w , ku změnám Sh frekvenci f . Tato úloha je zvládnutelná

$$\Delta p = f(w, \rho, l, \nu, f) \quad (11.3.1)$$

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho w^2}, \quad Re = \frac{wl}{\nu}, \quad Sh = \frac{f \cdot l}{w} \quad (11.3.2)$$

$$Eu = f(Re, Sh) \quad (11.3.3)$$

Model, na kterém se měří, musí být podobný dílu a určující kritéria se musí číselně rovnat, tj. musí být splněny vztahy (11.3.4) až (11.3.7). Poslední dva vztahy váží spolu měřítka rychlosti c_w , velikosti c_l , vazkosti c_ν a frekvence c_f mezi modelem a dílem. Je zřejmé, že jestliže zvolíme měřítka délek c_l a měřítka vazkosti c_ν , první ze vztahů (11.3.7) vydá měřítka rychlosti c_w a druhý vztah měřítka frekvencí c_f .

$$Re_M = Re_D, \quad Sh_M = Sh_D \quad (11.3.4)$$

$$\frac{w_M l_M}{\nu_M} = \frac{w_D l_D}{\nu_D}, \quad \frac{f_M l_M}{w_M} = \frac{f_D l_D}{w_D} \quad (11.3.5)$$

$$\frac{w_M \cdot l_M}{w_D \cdot l_D} = 1, \quad \frac{f_M \cdot l_M}{f_D \cdot l_D} = 1 \quad (11.3.6)$$

$$\frac{\nu_M}{\nu_D} = 1, \quad \frac{w_M}{w_D} = 1$$

$$\frac{c_w \cdot c_l}{c_\nu} = 1, \quad \frac{c_f \cdot c_l}{c_w} = 1 \quad (11.3.7)$$

Zvolíme-li c_l, c_ν , z (11.3.7) dostaneme c_w, c_f . U

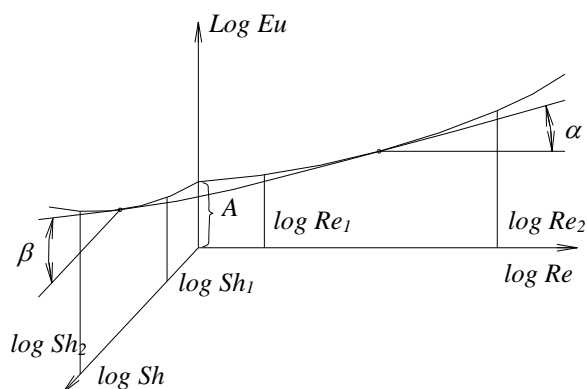
kritériálních rovnic se osvědčuje exponenciální tvar (11.3.8). Je třeba potom určit konstanty c, m, n . Za tím účelem kritériální rovnici zlogaritmuje a logaritmy naměřených hodnot nanese do diagramu na obr. 11.3.1. Jestliže vznikne mírně prohnutá plocha, můžeme ji rozložit na menší plochy, které lze považovat za rovinné. Každá má pak svoje konstanty.

$$Eu = C \cdot Re^m \cdot Sh^n \quad (11.3.8)$$

$$\log Eu = \log C + m \log Re + n \log Sh \quad (11.3.9)$$

Pro $Re_1 < Re < Re_2$ a $Sh_1 < Sh < Sh_2$

$$\text{platí: } C = 10^A, \quad m = \text{tg} \alpha, \quad n = \text{tg} \beta \quad (11.3.10)$$



Obr. 11.3.1

12 Bernoulliova rovnice

Bernoulliova rovnice je zvláštním případem pohybové rovnice Navier - Stokesovy, resp. její nevazké formy rovnice Eulerovy. Má řadu tvarů podle stupně zjednodušení. Při použití je třeba zvážit, jaké vlastnosti chceme při řešení respektovat a na základě toho vybrat patřičný tvar Bernoulliovy rovnice. Velmi oblíbený je nejjednodušší tvar, který je pouhou algebraickou rovnicí, vhodnou pro prostá jednorozměrová proudění v potrubích. Přes svou jednoduchost dává cenné informace.

12.1 Bernoulliova rovnice při různých podmínkách

Při odvození série Bernoulliových rovnic vyjdeme z Navier – Stokesovy rovnice (10.4.14) a postupným zaváděním zjednodušujících předpokladů dostaneme Bernoulliovy rovnice různého stupně obecnosti. Především zavedením $\nu = 0$ dostaneme Eulerovu rovnici (12.1.1). Jsou to vlastně 3 rovnice ve směru os x, y, z , které postupně vynásobíme dx, dy, dz , obecně di a sečteme, vznikne (12.1.3). Protože platí vztahy na řádku (12.1.4), můžeme je použít a dostaneme **obecnou Bernoulliovu rovnici** (12.1.5).

$$\frac{dw_i}{dt} = R_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i} + \nu \frac{\partial^2 w_i}{\partial k^2} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial w_k}{\partial k} \right) \quad (10.4.14)$$

$$\nu = 0$$

$$\frac{dw_i}{dt} = R_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i} \quad \Big| \quad di \quad (12.1.1)$$

$$w_i dw_i = R_i di - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i} di \quad (12.1.2)$$

$$\sum: w_k dw_k = R_k dk - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial k} dk \quad (12.1.3)$$

$$w^2 = w_k^2 \rightarrow w dw = w_k dw_k, \quad dp = \frac{\partial p}{\partial t} dt + \frac{\partial p}{\partial k} dk \quad (12.1.4)$$

Obecná Bernoulliova rov. $w dw = R_k dk - \frac{1}{\rho} \left(dp - \frac{\partial p}{\partial t} dt \right) \quad (12.1.5)$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

proudění je stacionární:

$$w dw = R_k dk - \frac{dp}{\rho} \quad (12.1.6)$$

$$R_x = R_z = 0, R_y = -g$$

tekutina v gravitačním poli:

$$w dw = -g dy - \frac{dp}{\rho} \quad (12.1.7)$$

$$\int$$

rovnici integrujeme podél proudnice:

$$\frac{w^2}{2} = -gy - \int \frac{dp}{\rho} + C \quad (12.1.8)$$

$$\rho = konst$$

proudění je nestlačitelné:

$$\frac{w^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho} = C \quad \Big| \cdot \frac{1}{g} \quad (12.1.9)$$

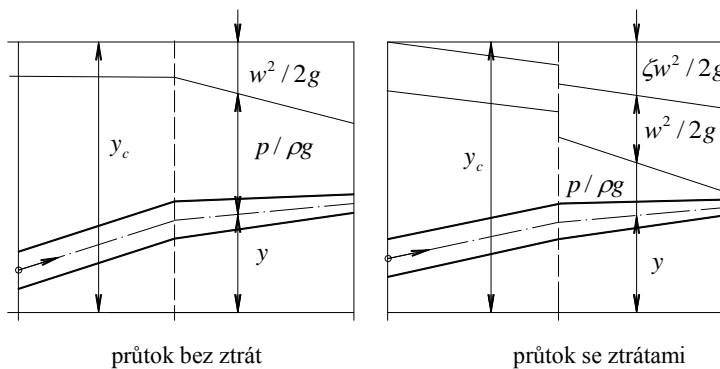
obyčejná Bernoulliova r. ve formě výšek

$$\frac{w^2}{2g} + y + \frac{p}{\rho g} = y_C \quad \Big| \cdot \rho g \quad (12.1.10)$$

obyčejná Bernoulliova r. ve formě tlaků

$$\rho \frac{w^2}{2} + \rho g y + p = p_C \quad (12.1.11)$$

Obyčejnou Bernoulliovu rovnici máme **ve formě energií** 1 kilogramu proudící tekutiny – rychlostní (kinetické), polohové (potenciální), tlakové a celkové C na řádku (12.1.9), **ve formě výšek** – rychlostní, geometrické, tlakové a celkové y_C (12.1.10), **ve formě tlaků** – dynamickeho, hydrostatickeho, statickeho a celkového p_C (12.1.11). V rámečcích jsou uvedeny zjednodušující předpoklady, k nimž musíme přihlídnout, chceme-li ten který tvar Bernoulliovy rovnice použít. Na samém počátku zjednodušovací posloupnosti je $\nu = 0$, čili proudění bez tření a beze ztrát. Přesto je snaha obyčejnou Bernoulliovu rovnici používat i pro proudění se ztrátami. V tomto případě se Bernoulliova rovnice rozšíří o ztrátový člen



Obr. 12.1.1

$$\text{buď energie} \quad \zeta \frac{w^2}{2} \quad (12.1.12)$$

$$\text{nebo výšky} \quad \zeta \frac{w^2}{2g} \quad (2.1.13)$$

$$\text{nebo tlaku} \quad \zeta \rho \frac{w^2}{2} \quad (12.1.14)$$

a vznikne **rozšířená Bernoulliova rovnice**, která ve formě výšek, viz též obr 12.1.1, má tvar :

$$\frac{w^2}{2g} + \zeta \frac{w^2}{2g} + y + \frac{p}{\rho g} = y_C \quad (12.1.15)$$

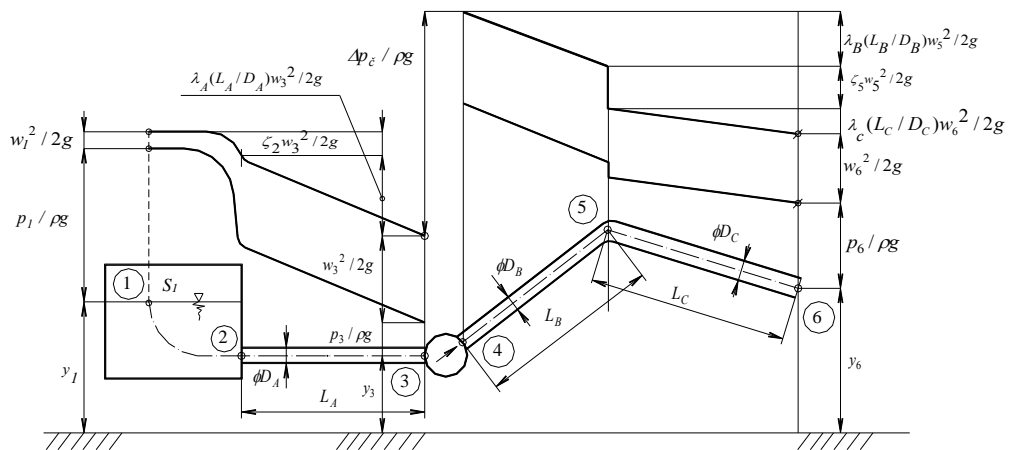
$$(1 + \zeta) \frac{w^2}{2g} + y + \frac{p}{\rho g} = y_C \quad (12.1.16)$$

Koeficient ζ je ztrátový součinitel. Je jednak místní ζ_M a třecí ζ_T . **Místní ztrátový součinitel** vyjadřuje místní ztrátu, která vzniká v potrubí při náhlé změně rychlosti nebo směru proudění, tj. v kolenech, T - kusech, ve ventilech, při náhlém rozšíření či zúžení průtokového průřezu, na mřížích, sítích apod. **Třecí ztrátový součinitel** ζ_T vyjadřuje ztrátu vznikající třením v rovných potrubních úsecích. Je úměrný délce potrubí L , nepřímo úměrný průměru potrubí D , když koeficientem úměrnosti je součinitel tření λ , viz (12.1.17)

$$\zeta_T = \lambda \frac{L}{D} \rightarrow \Delta p = \zeta_T \rho \frac{w^2}{2} = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{w^2}{2} \quad (12.1.17)$$

12.2 Použití rozšířené Bernoulliovy rovnice

K demonstraci použití rozšířené B. rovnice budeme řešit příklad zobrazený na obr.12.2. Má se určit příkon čerpadla, které dopravuje $\dot{V} [m^3/s]$ vody z uzavřené nádrže, kde je tlak p_1 na volné hladině, do prostředí o tlaku p_6 . Známe průměry D_A, D_B, D_C a délky L_A, L_B, L_C potrubních úseků, jejich součinitele tření



Obr. 12.2.1

$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$, místní ztrátové součinitele ζ_2, ζ_5 a polohy význačných bodů centrální proudnice y_1 až y_6 . Účinnost čerpadla je η_c , průřez nádrže S_1 .

Musí být splněna rovnice kontinuity (12.2.1), z níž plynou vazby mezi rychlostmi (12.2.2). Ve směru proudění stále klesající hladina celkové energie (zde ve formě výšky), vynesena silnější čarou, se musí čerpadlem zvýšit o $\Delta p_c / \rho g$, aby měla na výstupu požadovanou velikost $y_6 + p_6 / \rho g + w_6^2 / 2g$. Vypočtené Δp_c se dosadí do vzorce (12.2.5) pro příkon čerpadla.

$$\dot{V} = w_1 \cdot S_1 = \frac{\pi}{4} D_A^2 w_3 = \frac{\pi}{4} D_B^2 w_5 = \frac{\pi}{4} D_C^2 w_6 \quad (12.2.1)$$

$$w_1 = \frac{\dot{V}}{S_1}, \quad w_6 = \frac{4\dot{V}}{\pi D_C^2}, \quad w_5 = \left(\frac{D_C}{D_B}\right)^2 \cdot w_6, \quad w_3 = \left(\frac{D_C}{D_A}\right)^2 \cdot w_6 \quad (12.2.2)$$

$$\frac{\Delta p_\varepsilon}{\rho g} = \left[y_6 + \frac{p_6}{\rho g} + \frac{w_6^2}{2g} + \lambda_C \frac{L_C}{D_C} \frac{w_6^2}{2g} + \zeta_5 \frac{w_5^2}{2g} + \lambda_B \frac{L_B}{D_B} \frac{w_5^2}{2g} \right] - \left[\left(y_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} \right) - \left(\lambda_A \frac{L_A}{D_A} \frac{w_3^2}{2g} + \zeta_2 \frac{w_3^2}{2g} \right) \right] \quad (12.2.3)$$

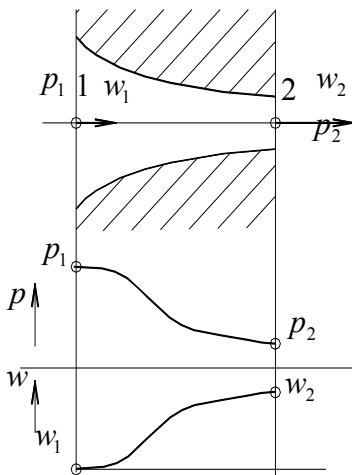
$$\Delta p_\varepsilon = \rho g \left[(y_6 - y_1) + \frac{p_6 - p_1}{\rho g} + \frac{w_6^2 - w_1^2}{2g} + \frac{w_6^2}{2g} \left(\zeta_2 \left(\frac{D_C}{D_A}\right)^4 + \zeta_5 \left(\frac{D_C}{D_B}\right)^4 + \lambda_A \frac{L_A}{D_A} \left(\frac{D_C}{D_A}\right)^4 + \lambda_B \frac{L_B}{D_B} \left(\frac{D_C}{D_B}\right)^4 + \lambda_C \frac{L_C}{D_C} \right) \right] \quad (12.2.4)$$

Příkon čerpadla:
$$P = \frac{1}{\eta_\varepsilon} \dot{V} \Delta p_\varepsilon [W] \quad (12.2.5)$$

Rovnice (12.2.4) ukazuje, že přírůstek tlaku v čerpadle Δp_ε musí pokrýt zvýšení hydrostatického tlaku mezi výstupem a počátkem vodní tratě, zvýšení statického tlaku, zvýšení dynamického tlaku a všechny místní a třecí ztráty v sací a výtlačné větvi potrubí. Tlak v žádném místě nesmí klesnout pod tlak sytosti při dané teplotě, vypařující se voda by způsobovala pulsace kavitací podstaty. Již vůbec nepřipustný je při návrhu záporný tlak. Na tlak je třeba kontrolovat místa jeho nejnižších hodnot, což je zde sání čerpadla 3 a koleno 5.

12.3 Bernoulliova rovnice pro stlačitelné proudění

Stlačitelná proudění jsou ta, jejichž rychlost se blíží nebo dokonce překračuje rychlost zvuku. Případem s vysokou podzvukovou rychlostí je výtok ideálního plynu zužujícím se otvorem na obr. 12.3.1. U otvoru známe geometrii, tj. hlavně vstupní S_1 a výstupní S_2 průřez, vstupní parametry p_1, ρ_1, w_1 , výstupní p_2 a chceme znát výtokovou rychlost w_2 a průtočnou hmotnost \dot{m} . Výtok probíhá tak vysokou rychlostí, že se během něho nestáčí přivádět či odvádět plynu teplo, čili z termodynamického pohledu je výtok tzv. izoentropický a pro změnu jeho tlaku a hustoty platí



Obr. 12.2.1

$$\rho \rho^{-\kappa} = konst, \quad \text{kde } \kappa = c_p / c_v \quad (=1,4 \text{ pro 2 atom. plyny}) \quad (12.3.1)$$

Shrneme předpoklady řešení:

- Plyn je ideální, čili nevazký: $\nu = 0$
- Stavy na vstupu a výstupu se nemění s časem, proces je stacionární: $\partial p / \partial t = 0$
- Ze setrvačných zrychlení působí pouze g , ale při vysokých rychlostech má zanedbatelný vliv: $R_x = R_y = R_z = 0$
- Proces výtoku je stlačitelný, izoentropický
- Proudění se považuje za jednorozměrové

Z obecné Bernoulliovy rovnice (12.1.5) zbyde (12.3.2), kterou můžeme integrovat mezi body 1 a 2, viz (12.3.3). K provedení integrálu s tlakem a hustotou si můžeme z rovnice izoentropie (12.3.1) připravit $\rho = f(p)$, když konstantu vyjádříme pomocí vstupních parametrů p_1, ρ_1 dle (12.3.4). Následuje výpočet integrálu a rychlosti w_2 , pomocí w_2 se určí \dot{m} .

$$wdw = R_k dk - \frac{1}{\rho} \left(dp - \frac{\partial p}{\partial t} dt \right) \quad (12.1.5)$$

$$wdw = -\frac{dp}{\rho} \quad (12.3.2)$$

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = -\int_1^2 \frac{dp}{\rho} \quad (12.3.3)$$

$$p\rho^{-\kappa} = konst = p_1\rho_1^{-\kappa} \rightarrow \rho = \rho_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (12.3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} &= -\int_1^2 \frac{dp}{\rho_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}} = -\frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_1} \int_1^2 \frac{dp}{p^{\frac{1}{\kappa}}} = -\frac{p_1 \cdot p_1^{\frac{1}{\kappa}-1}}{\rho_1} \cdot \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) \\ &= -\frac{p_1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \cdot \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) = \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \end{aligned} \quad (12.3.5)$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} + w_1^2 \quad (12.3.6)$$

$$\dot{m} = \rho_2 S_2 w_2 = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} S_2 \cdot w_2 \quad (12.3.7)$$

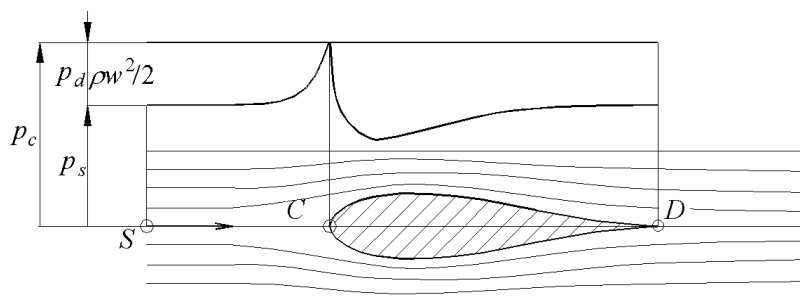
Při používání vzorce pro výtakovou rychlost ze zužující se dýzy (12.3.6) musíme být opatrní. Je nutné rozlišovat tlak ve výstupním průřezu p_2 a v prostoru za ním, kde jej označíme p_0 . Jestliže bude stav $p_1, \rho_1, w_1 = 0$ konstantní a budeme snižovat tlak p_0 za dýzou, tlak p_2 půjde s ním, tj. $p_2 = p_0$ a rychlost podle vzorce poroste, až bude dosažena rychlost zvuku $w_2 = a_2$. Za tohoto stavu má protitlak tzv. kritickou hodnotu p_{KR}

$$p_{KR} = p_2 = p_0 = p_1 \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \approx 0,528 p_1 \text{ pro 2 atom. plyny} \quad (12.3.8)$$

Jestliže budeme p_0 dále snižovat, tlak $p_2 = p_{KR}$ se již nebude měnit, zůstane nastaven na kritickou velikost a výtoková rychlost rovněž zůstává rovnou rychlosti zvuku. Pokud bychom nyní dosadili do (12.3.6) za p_2 hodnotu p_0 , dostali bychom falešnou nadzvukovou rychlost, jež se z nerozšířené dýzy nemůže dostat.

12.4. Bod nulové rychlosti

Do rovnoměrného nestlačitelného proudu o rychlosti w a o statickém tlaku p je ponořeno těleso dle obr. 12.4.1. Před tělesem uhýbá proud na obě strany, aby se vyhnul překážce. Jedna proudnice je však donucena okolím a proudnicemi narazit kolmo na přední část tělesa v bodě C , takže její rychlost zde klesne na nulu, $w_c = 0$.



Obr. 12. 4. 1

Bod C nazýváme bodem nulové rychlosti, či stagnačním bodem. V bodě C se proudnice rozděluje, a na odtokové hraně v místě D zase spojuje. Napíšeme obyčejnou Bernoulliovu rovnici pro proudnici jdoucí bodem nulové rychlosti, a to pro samotný bod C a pro bod ležící ve větší vzdálenosti před tělesem, viz (12.4.1). Protože $w_C = 0$, $y_C = y$, rovnice se zredukuje na (12.4.2), v níž p_C je celkový neboli totální tlak, $\rho w^2/2$ je dynamický tlak p_d .

$$\rho \cdot \frac{w_C^2}{2} + \rho g y_C + p_C = \rho \frac{w^2}{2} + \rho g y + p \quad (12.4.1)$$

protože $w_C = 0$, $y_C = y$:

$$p_C = \rho \frac{w^2}{2} + p \quad (12.4.2)$$

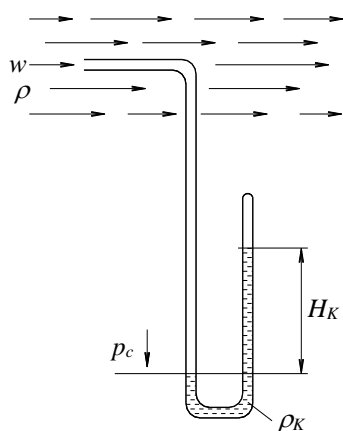
$$p_C = p_d + p \quad \left| \cdot \frac{1}{\rho} \right. \quad (12.4.3)$$

$$\frac{p_C}{\rho} = \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \quad (12.4.4)$$

Poslední rovnice, která je napsaná v energetické formě, říká, že ve stagnačním bodě se statická tlaková energie a kinetická energie přeměňuje na celkovou tlakovou energii. Stagnační bod není jen na náběžné hraně těles, ale všude tam, kde je proudění zbržděno na nulovou rychlost. Jestliže např. aerodynamický tunel nasává vzduch z klidného okolí, pak toto okolí je pro tunel stagnačním stavem, atmosférický tlak je pro otevřený aerodynamický tunel tlakem celkovým. Z energetické rovnice lze ukázat, že to co platí ve stagnačním bodě pro tlak, platí též pro teplotu, tj. že celková teplota T_c se rovná součtu dynamické teploty T_d a statické T dle (12.4.5). Proces však musí být izoentropický, aby nedocházelo k odvodu tepla.

$$T_c = T_d + T = \frac{w^2}{2c_p} + T \quad (12.4.5)$$

12.5 Měření tlaků a rychlostí

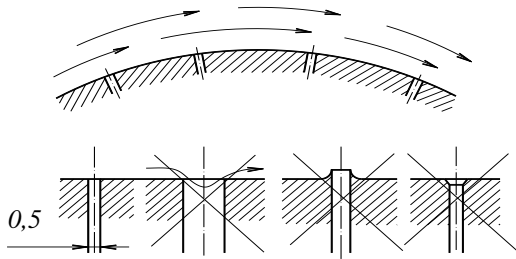


Obr. 12.5.1

a) Celkový tlak

Celkový tlak se měří Pitotovou trubicí, jejíž schéma je na obr. 12.5.1. Je to trubice jejíž otevřené rameno směřuje proti proudu, a je s ním rovnoběžné. Druhý konec je připojen k tlakoměru, kterým je dnes zpravidla elektronické čidlo, to znamená, že toto rameno trubice končí membránou snímače. Druhá možnost je zobrazena na našem obrázku: trubice je připojena ke kapalinovému manometru s tekutinou o hustotě ρ_K , která vystoupí do výšky H_K , jestliže nad hladinou v uzavřeném konci je vakuum. V obou případech je trubice uzavřená, což znamená, že částice tekutiny pronikající po centrální proudnici otevřeným ramenem do trubky jsou zbržděny na nulovou rychlost a tlak je tu celkový. Při dokonalém tvarování a opatrném zacházení Pitotova trubice měří s přesností $\sim 1\%$. Není-li trubice rovnoběžná s osou proudu, snímá se jen složka celkového tlaku. Pracovní konec trubice je však upraven tak, aby Pitotova trubice byla na menší vychýlení (do 15°) necitlivá.

$$p_c = \rho \frac{w^2}{2} + p = \rho_K \cdot gH_K \quad (12.5.1)$$



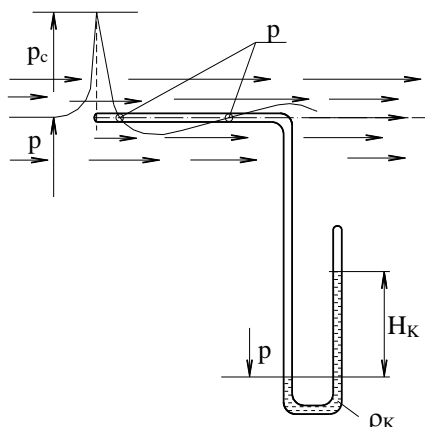
Obr. 12.5.2

b) Statický tlak

Statický tlak se měří pomocí otvorů vyvrtaných ve stěně, která je ve styku s prostředím, jehož tlak nás zajímá. Otvory jsou vrtané kolmo ke stěně. Statický tlak přechází spojitě do otvorů. Ideální průměr otvorů je 0,3÷0,5mm. Je-li \varnothing otvoru velký, snímá se se statickým tlakem i část dynamického tlaku. Na závadu jsou otřepy hran otvorů stejně jako sražené hrany, viz obr.12.5.2.

Pro měření statického tlaku uvnitř proudu se používá **statická trubice** schematicky zobrazená na obr. 12.5.3. Ohnuté rameno rovnoběžné s proudem má

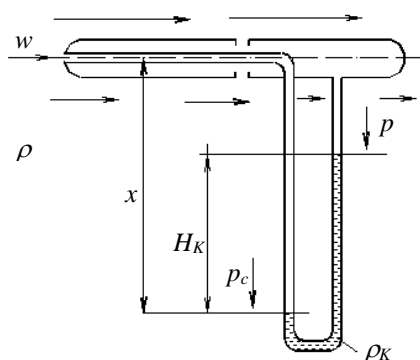
náběžný konec uzavřený a aerodynamicky upravený, aby byla trubice hladce obtékána. V plášti jsou navrtané malé otvory ke snímání statického tlaku. Průběh tlaku podél povrchu trubice zakreslený na obrázku ukazuje, že



Obr. 12.5.3

diferenciálního manometru. Pokud požadujeme automatizaci měření, manometr je elektrický, jinak může být kapalinový dle obrázku. Bude-li hustota proudícího média ρ srovnatelná s hustotou tlakoměrné kapaliny ρ_K , potom z rovnováhy tlaků na spodní hladinu manometru (12.5.2) dostaneme p_d (12.5.3) a rychlost w (12.5.4).

Je-li $\rho \ll \rho_K$, bude w (12.5.5). Pokud měříme elektronickým manometrem, změřenou veličinou je přímo p_d .



Obr. 12.5.4

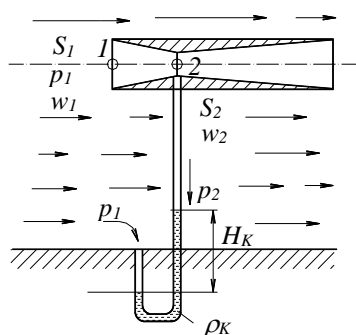
$$p_c + \rho g x = p + \rho_K g H_K + \rho g (x - H_K) \quad (12.5.2)$$

$$p_d = p_c - p = g H_K (\rho_K - \rho) = \rho \frac{w^2}{2} \quad (12.5.3)$$

$$w = \sqrt{\frac{2 p_d}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 g H_K (\rho_K - \rho)}{\rho}} \quad (12.5.4)$$

$$\text{pro } \rho \ll \rho_K \quad w = \sqrt{\frac{2 g H_K \rho_K}{\rho}} \quad (12.5.5)$$

Uvedené rovnice pro Prandtlovu trubici platí přesně bez empirických korekcí. Protože čidlo vzniklo spojením Pitotovy a statické trubice, o jeho geometrii a funkci lze říci totéž, co bylo uvedeno o nich.



Obr. 12.5.5

- **Venturiho trubice** pro měření dynamického tlaku a rychlosti je na obr. 12.5.5. Ve společné trubici je průtočná část rozdělena do dvou kuželů, z nich první mezi body 1, 2 je konfuzor, a druhý difuzor. V nejužším místě je nejvyšší rychlost a maximální podtlak oproti statickému tlaku p_1 . Rozdíl tlaků $p_1 - p_2$ se měří buď elektronickým nebo kapalinovým diferenciálním manometrem. Kuželový difuzor za nejužším místem zlepšuje účinnost Venturiho trubice tím, že snižuje ztrátu rozšířením proudu, zamezuje odtržení proudu od stěn.

Pro nestlačitelný průtok tekutiny konfuzorem mezi body 1 a 2 platí rovnice spojitosti (12.5.6) a při zanedbání ztrát (ty jsou v konfuzoru nepatrné) Bernoulliho rovnice (12.5.7). Z nich se vypočte dynamický tlak p_d a z něho rychlost w_1 .

$$S_1 w_1 = S_2 w_2 \quad \rightarrow \quad w_2 = w_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} \quad (12.5.6)$$

$$p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{w_2^2}{2} = p_2 + \rho \frac{w_1^2}{2} \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \quad (12.5.7)$$

$$p_d = \rho \frac{w_1^2}{2} = \frac{p_1 - p_2}{(S_1/S_2)^2 - 1} \quad (12.5.8)$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{2p_d}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[(S_1/S_2)^2 - 1]}} = \sqrt{\frac{2gH_K(\rho_K - \rho)}{\rho[(S_1/S_2)^2 - 1]}} \quad (12.5.9)$$

Venturiho trubice má proti Prandtlově a Pitotově trubici výhodu v tom, že při konstantní rychlosti w_1 lze poměrem průřezů S_1/S_2 měnit tlakový rozdíl $p_1 - p_2$. Bude-li :

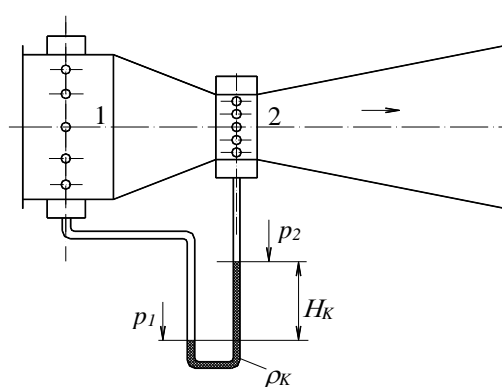
$$\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1 = 1 \rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \sqrt{2} = 1,41 \quad (12.5.10)$$

pak není rozdíl mezi tlakovou diferencí Venturiho trubice na jedné straně a Prandtlůvou a Pitotovou trubicí na straně druhé. U Pitotovy trubice na letounu předpokládáme, že je připojena k diferenciálnímu manometru, na jehož nižší tlakovou stranu přichází střední statický tlak z otvorů po obvodu trupu. Při $S_1/S_2 > 1,41$ se u Venturiho trubice dostává větší a lépe měřitelný rozdíl tlaku, proto se používá u pomalejších letadel do 250 km/h , Pitotova a Prandtlůva trubice u rychlých letadel.

12.6 Měření průtočného množství

Máme tu na mysli průtokoměry, jejichž funkce vyžaduje ke zpracování výsledků Bernoulliho rovnici, tedy clony, dýzy, Venturiho trubice, klasické průtokoměry. Dnes již existuje řada průtokoměrů na zcela jiných principech - laserových, ultrazvukových, Coriolisových aj.

a) Venturiho trubice při měření průtočného objemu či hmotnosti je vložena mezi příruby potrubí. Diferenciálním manometrem se měří rozdíl statických tlaků, který je v místě před Venturiho trubicí a v jejím nejúžším průřezu dle obr. 12.6.1. Platí a použijí se tytéž rovnice jako v předchozí stati pro Venturiho rychloměr, které vedou na rychlost w_1 (12.5.9). Když rychlost vynásobíme průřezem, dostaneme průtočný objem \dot{V}



Obr. 12.6.1

$$w_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[(S_1/S_2)^2 - 1]}} \quad (12.5.9)$$

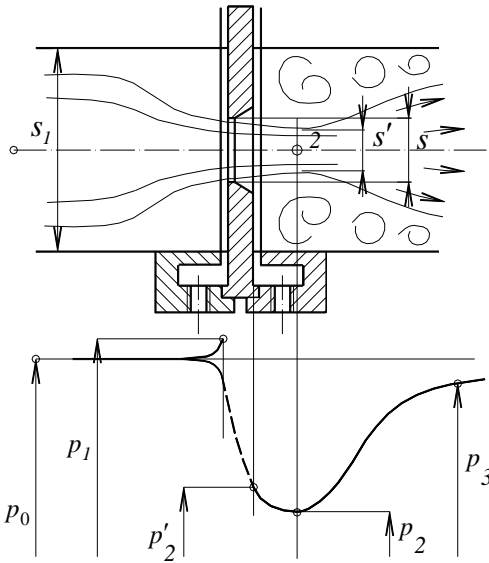
$$\dot{V} = S_1 w_1 = S_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[(S_1/S_2)^2 - 1]}} = K \cdot S_1 \sqrt{p_1 - p_2} \quad (12.6.1)$$

K je konstanta Venturiho průtokoměru, která se stanoví vyzkoušením, takže zahrne i ztráty vzniklé průtokem vaské tekutiny. Venturiho měřiče bývají stálou součástí potrubí a samočinně zaznamenávají průtokové množství \dot{V} [m^3/s] nebo \dot{m} [kg/s].

b) Clona. Princip zjištění průtokového množství tekutiny clonou nebo dýzou je takový: proud tekutiny se vložením desky s průtokovým otvorem menším než je

světlost potrubí stáhne do úzkého paprsku s vysokou rychlostí, změří se pokles tlaku v tomto místě $p_1 - p_2$, viz obr. 12.6.2, a z něho se vypočte rychlost a protékající objem nebo hmotnost.

Průtok clonou musí splňovat rovnici kontinuity nestlačitelného proudění. Je do ní zaveden jednak součinitel kontrakce proudu $\alpha' = S'/S$, jednak $m = S/S_1$ jako poměr průřezu otvoru ku průřezu potrubí. Plyne odtud $w_1 = f(\alpha, m, w_2)$, viz (12.6.4). Dále lze pro body 1 a 2 napsat rozšířenou Bernoulliho rovnici (12.6.5) a z ní určit rychlost w_2 . V Bernoulliho rovnici je podle (12.6.2) nahrazen ztrátový součinitel ζ rychlostním součinitelem φ .



Obr. 12.6.2

$$\alpha = \frac{S'}{S}, m = \frac{S}{S_1}, l + \zeta = \frac{l}{\varphi^2} \quad (12.6.2)$$

$$w_1 S_1 = w_2 S' = w_2 \alpha S \quad (12.6.3)$$

$$w_1 = \alpha \cdot \frac{S}{S_1} \cdot w_2 = \alpha m w_2 \quad (12.6.4)$$

$$p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{w_2^2}{2} + \zeta \rho \frac{w_2^2}{2} \quad (12.6.5)$$

$$p_1 + \alpha^2 m^2 \rho \frac{w_2^2}{2} = p_2 + (l + \zeta) \rho \frac{w_2^2}{2} \quad (12.6.6)$$

$$p_1 + \alpha^2 m^2 \rho \frac{w_2^2}{2} = p_2 + \frac{l}{\varphi^2} \rho \frac{w_2^2}{2} \quad (12.6.7)$$

$$w_2 = \frac{\varphi}{\sqrt{l - \alpha^2 m^2 \varphi^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (12.6.8)$$

$$\dot{V} = S' w_2 = \alpha S w_2 = \quad (12.6.9)$$

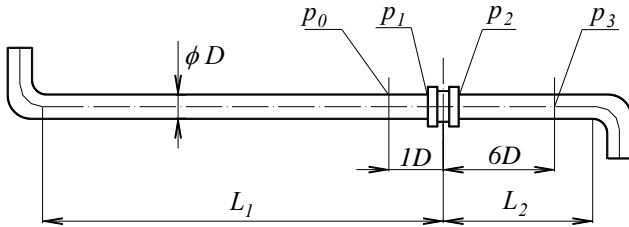
$$= \frac{\alpha \varphi S}{\sqrt{l - \alpha^2 m^2 \varphi^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (12.6.10)$$

$$= \mu S \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (12.6.11)$$

kde průtokový součinitel μ :

$$\mu = \frac{\alpha \varphi}{\sqrt{l - \alpha^2 m^2 \varphi^2}} \quad (12.6.12)$$

Průtokový součinitel μ závisí na součiniteli kontrakce α , rychlostním součiniteli φ a na poměru průřezů $m = S/S_1$. Hodnotu μ lze určit z tabulek v závislosti na Reynoldsově čísle a na m . Rozměry clony přesně určuje norma a normou je též určena poloha i způsob odběru obou tlaků p_1, p_2 . Nejlepší provedení je šterbinou a s prstencovou sběrací komorou zobrazenou v obrázku clony a dýzy. Aby ohyby, armatury apod. nesnižovaly přesnost měření, jsou předepsané nejmenší délky přímých potrubních úseků před ($L_1 = 5 \div 30D$) a za clonou ($L_2 \geq 5D$). Zařazením clony do potrubí vzniká určitá tlaková ztráta $\Delta p_z = p_0 - p_3$. Místa pro měření tlaků p_0, p_3 jsou též stanovena normou.



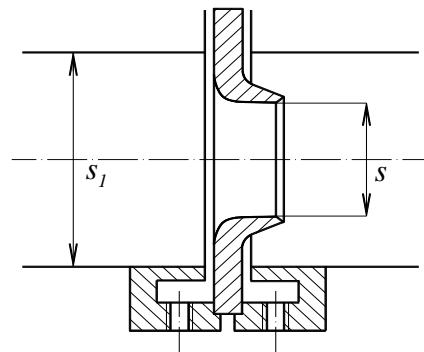
Obr. 12.6.3

U stlačitelné tekutiny je třeba přihlížet ke změně hustoty s tlakem. Při zjištění průtokového množství by se opět vyšlo z Bernoulliovy rovnice, ale psané pro stlačitelnou tekutinu, viz stať 12.3. Výsledek se upravuje na tvar shodný s (12.6.11):

$$\dot{V} = \varepsilon \mu S \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \quad (12.6.13)$$

kde ε je tzv. expanzní součinitel uvedený v tabulkách a v diagramech normy.

c) Dýza. Výpočet průtokového množství je stejný jako u clony. Jsou zde však jiné hodnoty μ , které přesahují v závislosti na Reynoldsově čísle a na $m = S/S_1$ i hodnotu 1 (např. 1,2). To lze vysvětlit tím, že součinitel kontrakce je tu prakticky roven 1 a více se tu uplatňuje vliv přítokové rychlosti w_1 i způsob měření tlaku p_2 . Dýza je šetrnější čidlo než clona, trvalá ztráta je nižší.

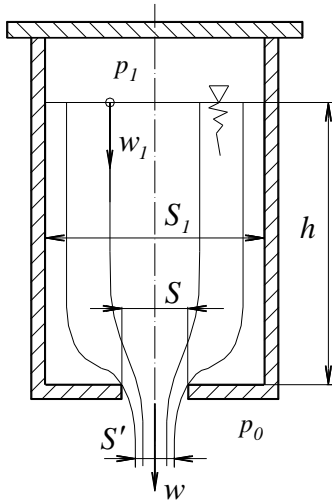


Obr. 12.6.4

13. Výtok kapaliny

13.1 Výtok malým otvorem do ovzduší

Z uzavřené nádoby na obr. 13.1.1 vytéká kapalina rychlostí w do okolí o tlaku p_0 . Tlak plynu nad kapalinou je p_1 , volná hladina klesá rychlostí w_1 . Průřez nádoby S_1 je konstantní (obecně bude proměnný), průřez výtokového otvoru je S .



Obr. 13.1.1

Proudnice, které v kapalině všechny začínají na volné hladině, směřují do výtokového otvoru. Proudící částice kapaliny mají určitou setrvačnost, a ta způsobuje, že se proudnice nemohou ostře lomit. Proudnice, zejména ty, které jdou podél stěn, mění ve výtokovém otvoru spojitě směr a stahují tak vytékající proud kapaliny do paprsku o průřezu $S' < S$. Poměr nejužšího průřezu výtokového paprsku a plochy otvoru se nazývá součinitel zúžení (kontrakce) α .

$$\alpha = \frac{S'}{S} = \frac{\text{nejužší průřez výtokového paprsku}}{\text{plocha otvoru}} \quad (13.1.1)$$

Pro ostrý kruhový otvor $\alpha = 0,61 \div 0,69$.

Při zjištění výtokové rychlosti w budeme uvažovat skutečnou, tj. vazkou tekutinu. Vyjdeme proto z rozšířené Bernoulliovy rovnice psané pro 2 body téže proudnice, a to pro bod na volné hladině a bod ve výtokovém otvoru. Z rovnice vypočteme rychlost w , při čemž komplex ztrátového součinitele $l/\sqrt{1+\zeta}$ nahradíme součinitelem rychlosti φ .

$$h + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = 0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} + \zeta \frac{w^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} (1 + \zeta) \quad (13.1.2)$$

$$w = \frac{l}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2g \left(h + \frac{p_1 - p_0}{\rho g} \right) + \frac{w_1^2}{2g}} = \varphi \sqrt{2gH} = \varphi w_{icor} \quad (13.1.3)$$

kde $w_{icor} = \sqrt{2gH}$ je teoretická výtoková rychlost bez ztrát (13.1.4)

$$H = h + \frac{p_1 - p_0}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} \quad \text{je celková neboli efektivní výška} \quad (13.1.5)$$

$$\varphi = \frac{w}{w_{icor}} \quad \text{je rychlostní součinitel} \quad (13.1.6)$$

$$\varphi = \frac{l}{\sqrt{1+\zeta}} \rightarrow \zeta = \frac{l}{\varphi^2} - 1 \quad (13.1.7)$$

$$\varphi = 0,95 \div 0,99 \quad \text{pro ostrý kruhový otvor}$$

Změna tlaku plynu nad kapalinou u uzavřené nádoby se obvykle uvažuje izotermická $p_1 V_1 = konst$, kde V_1 je objem nad kapalinou. Rychlost klesání volné hladiny a výtoková rychlost jsou vázány rovnicí kontinuity:

$$S_1 w_1 = S' w = \alpha S w \rightarrow w_1 = \frac{\alpha S}{S_1} w, \quad \text{bude-li } \frac{S}{S_1} \ll 1, \text{ je } w_1 \approx 0 \quad (13.1.8)$$

Výtokové množství:

$$\dot{V} = S'w = \alpha \cdot S \cdot \varphi \cdot w_{icor} = \mu \dot{V}_{icor} \quad (13.1.9)$$

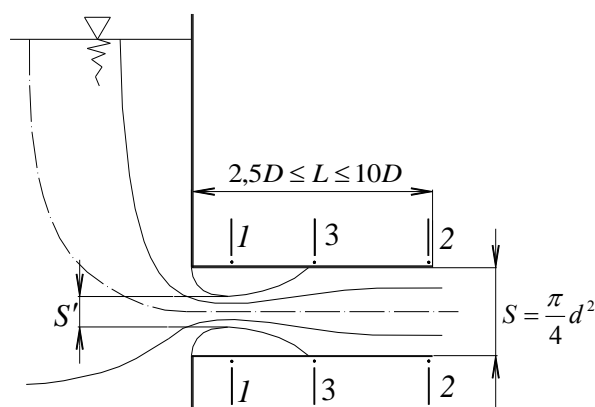
kde $\mu = \alpha\varphi$ je výtokový součinitel vyjadřující poměr skutečného a teoretického výtokového množství

$$\mu = \dot{V} / \dot{V}_{icor}$$

Pro ostrý kruhový otvor je střední hodnota $\mu = \alpha\varphi = 0,62 \cdot 0,98 = 0,61$

13.2. Výtok válcovým nátrubkem

Jestliže k prostému otvoru, jímž vytéká kapalina z nádoby, přidáme nedlouhý nátrubek $2,5D < L < 10D$ dle obr. 13.2.1, zjistíme, že výtokové množství se zvětší. Co se týče koeficientů α, φ, μ , ty budou v řezu 1 stejné ať nátrubek je či není. Vezmeme hodnoty z předchozího textu (13.2.1). V řezu 2 je tomu jinak. Vidíme, že $\alpha_2 = 1$ a rychlostní součinitel je zde poměrně nízký, je odměřen kolem 0,82. Zhoršení je způsobeno rozšířením proudu, které vždy probíhá za silného víření a tedy ztrát. Přehled koeficientů v řezu 2 je na řádku (13.2.2). Výtokový



Obr. 13.2.1

součinitel $\mu_2 > \mu_1$ a protože ostatní parametry pro výtok s nátrubkem a bez něho jsou stejné, u nátrubku se zvýšil průtok v poměru μ_2/μ_1 .

$$\alpha_1 = 0,62, \quad \varphi_1 = 0,98, \quad \mu_1 = 0,61 \quad (13.2.1)$$

$$\alpha_2 = 1, \quad \varphi_2 = 0,82, \quad \mu_2 = 0,82 \quad (13.2.2)$$

$$\dot{V}_{NATR} / \dot{V} = \mu_2 / \mu_1 \quad (13.2.3)$$

Zjistíme, jaký tlak je v nátrubku v místě kontrakce proudu. K tomu použijeme jednak rovnici kontinuity pro řezy 1 a 2 a jednak rozšířenou Bernoulliovu rovnici psanou opět pro místa 1,2:

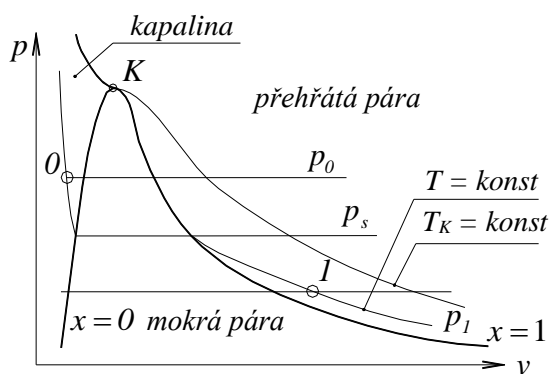
$$S'w_1 = Sw_2 \rightarrow w_1 = \frac{S}{S'}w_2 = \frac{w_2}{\alpha_1} \quad (13.2.4)$$

$$p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} = p_0 + \rho \frac{w_2^2}{2} (1 + \zeta_2) = p_0 + \rho \frac{w_2^2}{2} \cdot \frac{1}{\varphi_2^2} \quad (13.2.5)$$

$$p_1 = p_0 + \rho \frac{w_2^2}{2} \left(\frac{1}{\varphi_2^2} - \frac{1}{\alpha_1^2} \right) = p_0 + \rho \frac{w_2^2}{2} \left(\frac{1}{0,82^2} - \frac{1}{0,62^2} \right) = p_0 - 1,1\rho \frac{w_2^2}{2} \quad (13.2.6)$$

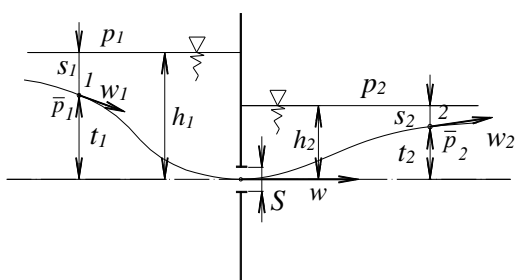
Podtlak vysvětluje skutečnou fyzikální příčinu zvětšeného průtoku s nátrubkem. V obou případech je v místě 1 stejný průtokový průřez, jenže s nátrubkem je zde podtlak, tedy větší tlakový spád v efektivní výšce a tudíž vyšší rychlost. Kdybychom nátrubek v místě 1 navrtali, pronikne sem atmosférický tlak, paprsek se nerozšíří na plný průřez trubky a výtokové množství bude stejné jako u otvoru bez nátrubku.

Kavitace může u výtoku s nátrubkem vzniknout, pokud by snížený tlak p_1 byl nižší než je tlak sytosti p_s při dané teplotě T , viz diagram p - v H_2O na obr. 13.2.2. V tomto případě je stav v místě kontrakce v oblasti přehřáté páry, v bodě 1 diagramu. Přestala existovat vodní zátka v nátrubku, která odděluje vnější atmosférický tlak p_0 od nižšího tlaku p_1 . Atmosférický tlak pronikne do nátrubku k místu maximální kontrakce. Jenže diagram ukazuje, že při parametrech p_0, T je kapalný stav, to znamená, že se obnoví proud kapaliny a kapalná zátka. Ta umožní, aby v místě 1 vznikl podtlak, při kterém se kapalina promění na páru a celý proces se opakuje. Střídají se výtoky kapaliny a páry a tomuto jevu se říká kavitace. Nebezpečné jsou obnovy kapalně fáze, kdy kapičky kapaliny jsou vrženy do místa 3 a toto místo intenzivně erodují, vymílají. Technickým problémem to je u sacích stran lopatek odstředivých čerpadel.



Obr. 13.2.2

13.3 Výtok malým ponořeným otvorem



Obr. 13.3.1

Máme 2 oddělené nádrže s tlaky p_1, p_2 nad volnými hladinami. Ve společné stěně je malý otvor o průřezu S v hloubce h_1 resp. h_2 pod volnými hladinami. Na obr. 13.3.1 je zakreslena proudnice procházející otvorem a na ní zvolen bod 1 v levé nádrži a 2 v pravé nádrži. Ke stanovení výtokové rychlosti použijeme Bernoulliovu rozšířenou rovnici rozepsanou pro citované body a napsanou ve formě výšek, které jsou vyneseny od vodorovné linie vedené středem otvoru. Poslední dva členy rovnice (13.3.1) představují ztráty, a to $\zeta w^2/2g$ v levé nádrži mezi bodem 1 a výtokovým otvorem a $(w^2 - w_2^2)/2g$ v pravé nádrži mezi otvorem a bodem 2.

$$t_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = t_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + \zeta \frac{w^2}{2g} + \frac{w^2 - w_2^2}{2g} \quad (13.3.1)$$

$$t_1 + \frac{p_1 + \rho g s_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = t_2 + \frac{p_2 + \rho g s_2}{\rho g} + (1 + \zeta) \frac{w^2}{2g} \quad (13.3.2)$$

$$h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + (1 + \zeta) \frac{w^2}{2g} \quad (13.3.3)$$

$$w = \frac{l}{\sqrt{1 + \zeta}} \sqrt{2g \left(h_1 - h_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} \right)} = \varphi \sqrt{2gH} = \varphi w_{teor} \quad (13.3.4)$$

Ve většině případů bude: $p_1 = p_2 = p_0, w_1 \doteq 0$. Potom (13.3.5)

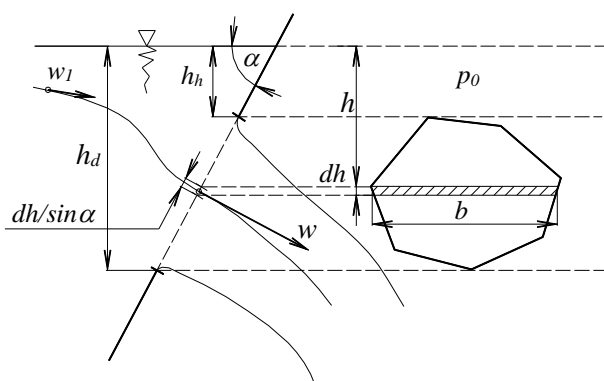
$$w = \varphi \sqrt{2g(h_1 - h_2)}.$$

U ponořeného otvoru teoretická výtoková rychlost w_{teor} nezávisí na poloze otvoru, ale jen na rozdílu výšek volných hladin v nádržích.

Výtokové množství: $\dot{V} = \mu \cdot S w_{teor}$ (13.3.6)

Výtokový součinitel μ je zhruba o 2% nižší než při výtoku do volné atmosféry. Při zjednodušující podmínce (13.3.5) platí poslední vzorec (13.3.6) i pro velký otvor, protože rychlost je ve všech bodech jeho průřezu stejná.

13.4 Výtok velkým otvorem do ovzduší



Obr. 13.4.1

Je-li otvor dost velký, pak výtoková rychlost není stejná ve všech bodech otvoru, který je ve svislé nebo obecně šikmé stěně. Pro výtokovou rychlost platí dříve odvozený vzorec (13.1.3), podle něhož rychlost s rostoucí hloubkou h se zvyšuje. Ku zjištění výtokového množství proto vytkneme v otvoru průřez elementární výšky $dh/\sin \alpha$ a šířky b , vyšrafovaný na obr. 13.4.1. Množství kapaliny procházející jednotlivými elementárními ploškami sečteme, tj. zintegrujeme, viz. (13.4.2). Abychom mohli integrál provést, budeme uvažovat otvor konstantní šířky b , a dostaneme výsledek (13.4.5). Při zjednodušující podmínce $p_1 = p_0, w_1 = 0$ se vzorec pro průtočný objem \dot{V} zredukuje na (13.4.6).

$$w = \varphi \sqrt{2g \left(h + \frac{p_1 - p_0}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} \right)} = \varphi w_{teor} \quad (13.1.3)$$

$$dS = \frac{b \cdot dh}{\sin \alpha} \quad (13.4.1)$$

$$\dot{V} = \mu \int_{h_h}^{h_d} w_{teor} \cdot dS = \mu \int_{h_h}^{h_d} \sqrt{2g \left(h + \frac{p_1 - p_0}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} \right)} \frac{bdh}{\sin \alpha} \quad (13.4.2)$$

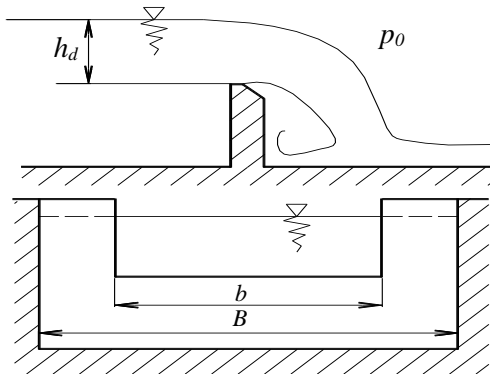
$$\text{pro } b = konst, w_1 = konst: \dot{V} = \frac{\mu b}{\sin \alpha} \sqrt{2g} \int_{h_h}^{h_d} \sqrt{h + K} dh, \quad \text{kde } K = \frac{p_1 - p_0}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} \quad (13.4.3)$$

$$\dot{V} = \frac{\mu b}{\sin \alpha} \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{2}{3} (h + K)^{\frac{3}{2}} \Big|_{h_h}^{h_d} = \frac{2}{3} \frac{\mu b}{\sin \alpha} \cdot \sqrt{2g} \left(\sqrt{(h_d + K)^3} - \sqrt{(h_h + K)^3} \right) \quad (13.4.4)$$

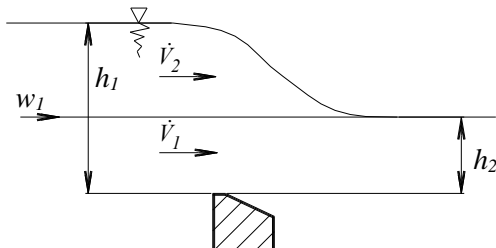
$$\dot{V} = \frac{2}{3} \frac{\mu b}{\sin \alpha} \cdot \sqrt{2g} \left(\sqrt{\left(h_d + \frac{p_1 - p_0}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} \right)^3} - \sqrt{\left(h_h + \frac{p_1 - p_0}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} \right)^3} \right) \quad (13.4.5)$$

$$\text{pro } p_1 = p_0, w_1 = 0 \quad \dot{V} = \frac{2}{3} \frac{\mu b}{\sin \alpha} \cdot \sqrt{2g} \left(\sqrt{(h_d)^3} - \sqrt{(h_h)^3} \right) \quad (13.4.6)$$

13.5 Přepad kapaliny



Obr. 13.5.1



Obr. 13.5.2

Není-li obdélníkový otvor na obr. 13.4.1 nahoře omezen, tj. $h_h=0$, takže kapalina přetéká přes vodorovnou hranu šířky b , mluvíme o přepadu. U něho ke stanovení průtočného objemu platí (13.4.5), samozřejmě s patřičnými zjednodušeními, která jsou v souhrnu na řádku (13.5.1). Po jejich uplatnění bude výsledek (13.5.2).

$$b = konst, h_h = 0, p_1 = p_0, \sin \alpha = 1 \quad (13.5.1)$$

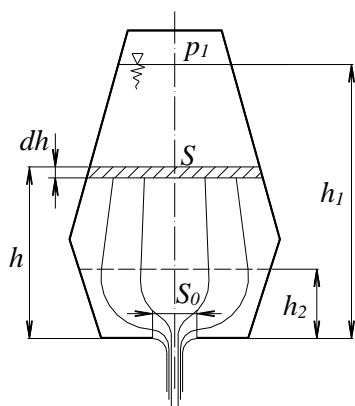
$$\dot{V} = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left(\sqrt{\left(h_d + \frac{w_1^2}{2g} \right)^3} - \sqrt{\left(\frac{w_1^2}{2g} \right)^3} \right) \quad (13.5.2)$$

Jestliže má vzduch dobrý přístup pod přepadající proud, bývá hodnota výtokového součinitele $\mu = 0,65$, pokud šířka přepadu b je rovna šířce kanálu B . Je-li $b < B$, vzniká též postranní zúžení proudu a μ bude nepatrně nižší. Dobře větranému přepadu na obr. 13.5.1 se říká **dokonalý přepad**.

Nedokonalý přepad má přepadovou hranu níže než je volná hladina spodní nádrže nebo toku. Průtočný objem \dot{V} je součtem objemu \dot{V}_1 , protékajícího myšleným potopeným otvorem výšky h_2 , a objemu \dot{V}_2 , počítaného jako dokonalý přepad s průtokovým otvorem o výšce $h_1 - h_2$. Výsledný vztah pro \dot{V} je tudíž kombinací vzorce (13.3.6), při respektování konstantní rychlosti po výšce průřezu, a (13.5.2), jen s jiným označením výšek.

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \mu_1 b h_2 \sqrt{2g \left(h_1 - h_2 + \frac{w_1^2}{2g} \right)} + \frac{2}{3} \mu_2 b \sqrt{2g} \left(\sqrt{\left(h_1 - h_2 + \frac{w_1^2}{2g} \right)^3} - \sqrt{\left(\frac{w_1^2}{2g} \right)^3} \right) \quad (13.5.3)$$

13.6 Doba výtoku



Obr. 13.6.1

a) Obecná nádoba bez přítoku je zobrazena na obr. 13.6.1. Průřez S nádoby se po výšce mění, dole je výtokový otvor průřezu S_0 . Nádoba je v čase $t = 0$ nalita do výše h_1 , ptáme se, za jak dlouho volná hladina klesne do polohy h_2 , kde h_2 může být též nula. Pro účely výpočtu vytkneme obecnou polohu hladiny z průběhu výtoku, kdy má výšku h , a vyznačíme na obrázku elementární objem, který odpovídá poklesu dh . Za odpovídající čas dt musí uvedený objem Sdh vytéci z nádoby. Rovnost obou objemů je v rovnici (13.6.2), znaménkem (-) vyjadřujeme úbytek výšky h . Z rovnice se vypočte dt (13.6.3) a rovnice se integruje, viz (13.6.4). Pokud zavedeme zjednodušující předpoklady $p_1 = p_0$, $w_1 \doteq 0$, výraz se přemění na (13.6.5), ale k jeho integraci musíme znát závislost $S(h)$. Bude-li $S = konst$, dostáváme výsledek (13.6.6).

$$\dot{V} = \mu \cdot S_0 \sqrt{2g \left(h + \frac{p_1 - p_0}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} \right)} = \mu S_0 \sqrt{2gH} \quad (13.6.1)$$

$$\dot{V} dt = -S dh \quad (13.6.2)$$

$$dt = \frac{-S dh}{\dot{V}} = \frac{-S dh}{\mu S_0 \sqrt{2gH}} \quad (13.6.3)$$

$$t = \int_0^t dt = -\frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{S dh}{H^{1/2}} = \frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h_2}^{h_1} \frac{S dh}{H^{1/2}} \quad (13.6.4)$$

pro $p_1 = p_0$, $w_1 \doteq 0$ je $H = h$:
$$t = \frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h_2}^{h_1} \frac{S dh}{h^{1/2}} \quad (13.6.5)$$

pro $S = konst$:
$$t = \frac{S}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h_2}^{h_1} \frac{dh}{h^{1/2}} = \frac{2S}{\mu S_0 \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) \quad (13.6.6)$$

b) Obecná nádoba s přítokem. Přitéká-li do nádoby na obr. 13.6.1 stálé množství stejné kapaliny $\dot{V}_0 [m^3/s] = konst$, lze vyjít při stanovení doby výtoku z této úvahy: přírůstek objemu kapaliny v nádobě se rovná přitéklému množství minus odtékající množství za elementární čas dt . Matematické vyjádření objemové rovnosti je na řádku (13.6.7). Plyne odtud elementární čas dt a po integraci doba t , za níž se hladina z polohy h_1 posune do polohy h_2 , viz (13.6.9).

$$S dh = \dot{V}_0 dt - \dot{V} dt = (\dot{V}_0 - \mu S_0 \sqrt{2gH}) dt \quad (13.6.7)$$

$$dt = \frac{S dh}{\dot{V}_0 - \mu S_0 \sqrt{2gH}} \quad (13.6.8)$$

$$t = \int_0^t dt = \int_{h_1}^{h_2} \frac{S dh}{\dot{V}_0 - \mu S_0 \sqrt{2gH}} \quad (13.6.9)$$

Abychom došli ke konkrétnímu výsledku, úlohu zjednodušíme podle podmínek (13.6.10). Integrální vyjádření substitucí, výsledný čas t je dán (13.6.14).

pro $S = konst$, $w_1 = 0$, $p_1 = p_0$ a při dočasném označení $k = \mu S_0 \sqrt{2g}$ (13.6.10)

$$t = S \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\dot{V}_0 - k\sqrt{h}} \quad (13.6.11)$$

$$x = \dot{V}_0 - k\sqrt{h} \rightarrow h = \frac{(\dot{V}_0 - x)^2}{k^2} = \frac{\dot{V}_0^2 - 2\dot{V}_0 x + x^2}{k^2} \rightarrow dh = \frac{-2(\dot{V}_0 - x)dx}{k^2} \quad (13.6.12)$$

$$t = S \int \frac{-2(\dot{V}_0 - x)dx}{k^2 x} = -\frac{2S}{k^2} \int \left(\frac{\dot{V}_0}{x} - 1 \right) dx = -\frac{2S}{k^2} [\dot{V}_0 \ln x - x] = \quad (13.6.13)$$

$$= -\frac{2S}{k^2} \left[\dot{V}_0 \ln(\dot{V}_0 - k\sqrt{h}) - (\dot{V}_0 - k\sqrt{h}) \right]_{h_1}^{h_2} = \frac{2S}{k^2} \left[\dot{V}_0 \ln \frac{\dot{V}_0 - k\sqrt{h_1}}{\dot{V}_0 - k\sqrt{h_2}} + k(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) \right] \quad (13.6.14)$$

Mohou nastat 3 případy:

- $\dot{V}_0 = \dot{V}$: výška hladiny se nemění, protože přítok se rovná výtoku
- $\dot{V}_0 < \dot{V}$: hladina klesá a ustálí se na výšce, při níž $\dot{V}_0 = \dot{V}$
- $\dot{V}_0 > \dot{V}$: hladina stoupá a ustálí se na výšce, při které $\dot{V}_0 = \dot{V}$

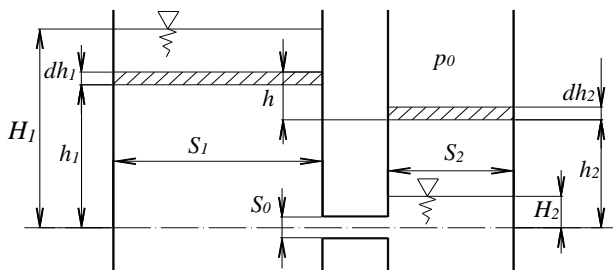
Hladina v nádobě se blíží svému rovnovážnému stavu při výtoku asymptoticky a doba, za kterou tohoto stavu dosáhne, je teoreticky nekonečně velká. Plyne to právě z rovnice (13.6.14): bude-li h_2 poloha konečné ustálené hladiny, pak zde platí

$$\dot{V}_0 = \dot{V} = \mu S \sqrt{2gh_2} = k\sqrt{h_2} \quad (13.6.15)$$

čímž se zlomek v logaritmu bude blížit k nekonečnu a tím i čas. Reálná skutečnost je poněkud jiná. Hladina se velmi přiblíží své koncové poloze v konečném čase a teprve zbylý nepatrný posuv se odehraje v čase nekonečně dlouhém. Čili za h_2 do (13.6.14) je třeba dát polohu trochu odlišnou, reálnou, a dostaneme rozumný čas.

13.7 Doba vyrovnání hladin ve spojitých nádobách

Pro jednoduchost budeme uvažovat nádoby s velmi rozlehlými hladinami S_1 , S_2 , spojené nátrubkem malého průřezu S_0 , takže lze zanedbat rychlost posuvu hladin, nad nimiž je vzduch o stejném tlaku p_0 . Počáteční poloha hladin je H_1 a H_2 , vše je zakreslené v obr. 13.7.1.



Obr. 13.7.1

Při výpočtu času musí být splněna podmínka o objemech a o výškách. Objem, o který klesne kapalina v levé nádobě za čas dt se rovná objemu, o který vystoupí hladina v pravé nádobě za čas dt a tento objem musí také za stejnou dobu protéci nátrubkem, viz.(13.7.1). Podmínka, která váže výšky h , h_1 , h_2 je na řádku (13.7.2). Jejím zdiferencováním vznikne (13.7.3) a po dosazení za dh_1 a dh_2 ze (13.7.1) vznikne (13.7.4).

Z této rovnice vypočteme čas t .

$$dV = -S_1 dh_1 = S_2 dh_2 = \mu S_0 \sqrt{2gh} dt \quad (13.7.1)$$

$$h = h_1 - h_2 \quad (13.7.2)$$

$$dh = dh_1 - dh_2 \quad (13.7.3)$$

$$dh = -\frac{\mu S_0 \sqrt{2gh} dt}{S_1} - \frac{\mu S_0 \sqrt{2gh} dt}{S_2} = -\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) \mu S_0 \sqrt{2gh} dt \quad (13.7.4)$$

$$t = \int_0^t dt = \frac{-1}{\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) \mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{H_1-H_2}^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) \mu S_0 \sqrt{2g}} [2\sqrt{h}]_0^{H_1-H_2} \quad (13.7.5)$$

$$t = \frac{2\sqrt{H_1 - H_2}}{\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)\mu S_0 \sqrt{2g}} \quad (13.7.6)$$

Podle vzorce (13.7.6) je doba vyrovnání hladin v nádobách jednoznačně konečná.

14. Věta o změně toku hybnosti

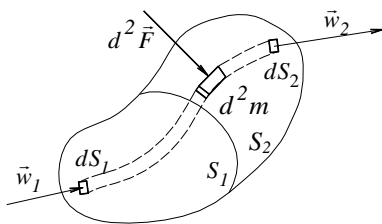
Věta o změně toku hybnosti je oblíbeným nástrojem k vyšetřování aerodynamických sil a momentů, kterými proudící tekutina působí na obtékaná nebo protékaná tělesa. Zejména se to týká lopatkových turbostrojů. Výhoda použití věty o změně toku hybnosti (VZTH) spočívá v tom, že aerodynamické účinky řešíme na základě znalosti stavu proudění na tzv. kontrolní ploše obalující zkoumané proudové pole, aniž bychom znali vlastnosti tohoto pole uvnitř. VZTH můžeme tedy zařadit mezi metody typu „černá skříňka“ nebo GUHA, u nichž se vnitřní procesy určují na základě znalosti procesu na povrchu, na vstupu a na výstupu.

VZTH lze použít pro nevazké i vazké proudění, když příslušné třecí síly zařadíme mezi vnější síly působící na tekutinu. Proudění by mělo být ustálené, neustálené se může podrobit VZTH, jestliže střední hodnoty neustáleného procesu jsou stálé, tj. proudění je tzv. zdánlivě stacionární.

VZTH je modifikací pohybové rovnice, patří tedy do třídy rovnic reprezentované rovnicemi Navier-Stokesovou, Reynoldsovou, Van Driestovou, Bernoulliovou. Jestliže některá z nich je použita k řešení proudění o více neznámých, nemůžeme připsat VZTH jako další nezávislou rovnici, ježto její princip byl již aplikován.

14.1 Podstata VZTH a návod k použití

Větu o změně toku hybnosti odvodíme z pohybové rovnice. Především je třeba povědět, že hybnost je součin hmotnosti a její rychlosti $m\vec{w}$, kdežto tok hybnosti je součin průtočné hmotnosti a její rychlosti $\dot{m}\vec{w}$. Uvažujeme objem tekutiny dle obr. 14.1.1. Jeho povrch, tzv. kontrolní plochu, můžeme rozdělit na 2 části: plochou S_1 tekutina do objemu vstupuje, vektor \vec{w}_1 má proto záporné znaménko; plochou S_2 tekutina vystupuje, znaménko \vec{w}_2 je kladné, protože kladný směr je ven z objemu. Ploškou $d\vec{S}_1$ vstupuje do kontrolní plochy



Obr. 14.1.1

proudové vlákno, uvnitř mění svůj průřez $d\vec{S}$, hustotu ρ , rychlost \vec{w} a ploškou $d\vec{S}_2$ vychází. Na zvyrazněnou část proudového vlákna elementárního průřezu a délky, hmotnosti d^2m , působí okolní tekutina silou $-d^2\vec{F}$. Pohybová rovnice pro d^2m se dá upravit podle (14.1.1). Rovnici integrujeme po délce vláken a po průřezu dle (14.1.2), aby platila pro celý objem. Bude-li průtočná hmotnost vláknem po délce konstantní, můžeme vnitřní integrál provést, což je na řádcích (14.1.3), (14.1.4). Následuje realizace vnějšího integrálu za předpokladu, že na ploše S_1 jsou ρ_1, w_1 konstantní, stejně jako na ploše S_2 jsou neměnné ρ_2, w_2 , řádek (14.1.5). Poslední

úprava spočívá v otočení znaménka, čímž na levé straně je síla, kterou tekutina uzavřená v kontrolní ploše působí na okolí (kladně směrem ven), a rovná se rozdílu vstupního a výstupního toku hybnosti.

$$-d^2\vec{F} = d^2m \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d^2m}{dt} \cdot d\vec{w} = \frac{d}{dt}(dm)d\vec{w} = d\dot{m}d\vec{w} \quad (14.1.1)$$

$$-\int_S \int_l d^2\vec{F} = \int_S \int_l d\dot{m}d\vec{w} \quad (14.1.2)$$

$$\text{pro } d\dot{m} = \text{konst} \quad -\int_S \int_l d^2\vec{F} = \int_S \int_l d\dot{m} \int_l d\vec{w} = \int_S d\dot{m}(\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \quad (14.1.3)$$

$$-\int_S d\vec{F} = \int_S (\rho_2 dS_2 w_2 \vec{w}_2 - \rho_1 dS_1 w_1 \vec{w}_1) \quad (14.1.4)$$

pro $\rho_1, \rho_2, w_1, w_2 = konst$ $-\vec{F} = \rho_2 S_2 w_2 \vec{w}_2 - \rho_1 S_1 w_1 \vec{w}_1$ (14.1.5)

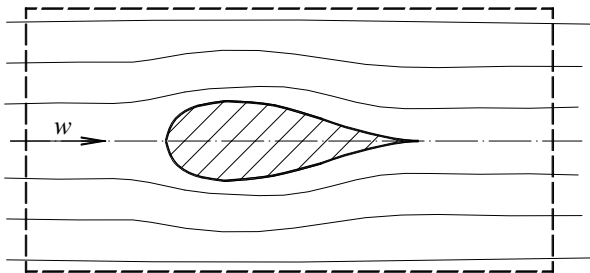
$$\vec{F} = \rho_1 S_1 w_1 \vec{w}_1 - \rho_2 S_2 w_2 \vec{w}_2 = \dot{m}_1 \vec{w}_1 - \dot{m}_2 \vec{w}_2 \quad (14.1.6)$$

- Praktický postup při konstrukci VZTH

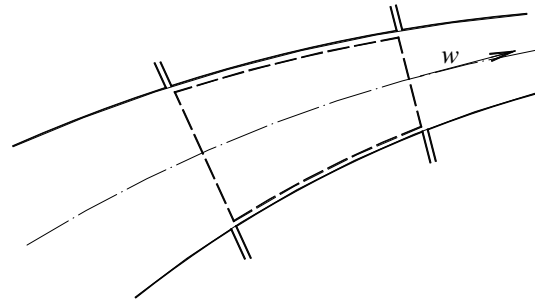
- Zvolí se souřadnicový systém.
- Zvolí se vhodná kontrolní plocha, aby výpočet byl co nejjednodušší, viz níže.
- Napiší se věty o změně toku hybnosti ve směrech souřadnicových os.
- Na levou stranu se píše síly, jimiž tekutina uzavřená v kontrolní ploše působí na kontrolní plochu a na obtékaná tělesa. Znaménka sil se určují podle směru os.
- Na pravou stranu VZTH se píše suma toků hybnosti, při čemž vstupní toky se značí kladně, výstupní toky záporně a směry toků se konfrontují se směry příslušných os.

- Kontrolní plocha

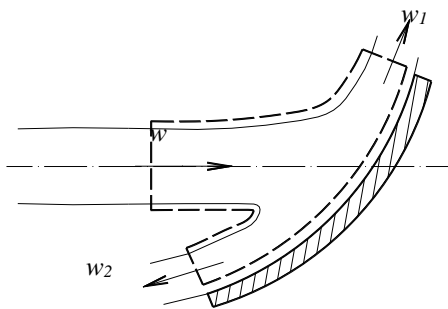
Kontrolní plochu při praktických aplikacích zavádíme tak, aby vyčíslení výrazů pro průtokové hybnosti bylo co nejjednodušší. Vhodnou volbou lze v četných případech omezit toky hybnosti jen na vstupní a výstupní průřez. Např. u kapkovitého tělesa na obr. 14.1.2 jsou vodorovné linie kontrolní plochy tak daleko od tělesa, aby jimi tekutina neprocházela. Obdobně svislé strany kontrolní plochy jsou v místech, kde je vyrovnaný tlak, nenarušený tělesem. Na obr. 14.1.2 až 14.1.5 a na obr.14.1.6 jsou příklady kontrolních ploch.



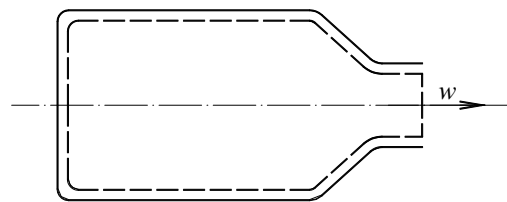
Těleso obtékané tekutinou
Obr. 14.1.2



Protékaný kanál
Obr. 14.1.3



Těleso částečně obtékané
Obr.14.1.4

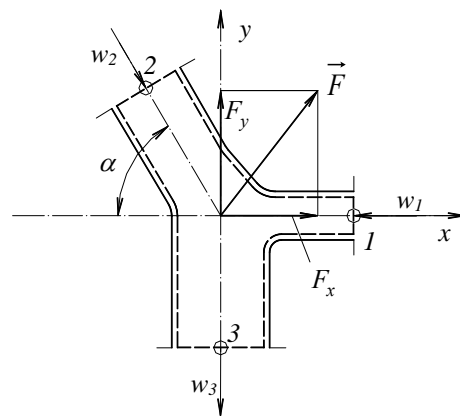


Výtok z nádoby
Obr. 14.4.5

Příklad

Má se určit síla \vec{F} , tj. F_x, F_y , působící na potrubní úzel. Známe stavy proudění kapaliny ve vstupních řezech 1, 2 a ve výstupním řeze 3. Je tedy dáno: $S_1, S_2, S_3, p_1, p_2, p_3, w_1, w_2, w_3, \rho, \alpha$ a tvar potrubí na obr.14.1.6.

Postupujeme podle návodu. Po zvolení os x, y zavedeme kontrolní plochu totožnou s obrysem potrubního úzlu. Zvolíme směr síly \vec{F} , kterou vyvozuje



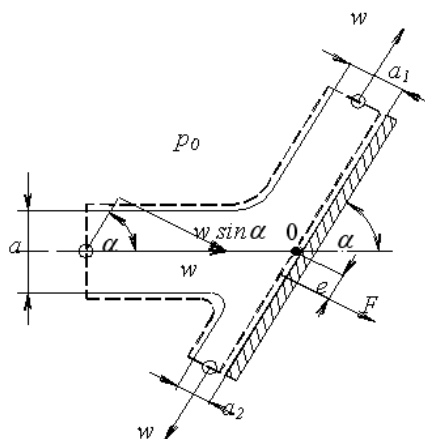
Obr. 14.1.6

proudící tekutina na stěny potrubního ježka. Znaménko složek F_x, F_y výpočet buď potvrdí či nikoliv. Napíšeme VZTH pro směr x a y podle (14.1.7) a (14.1.8). U toků hybnosti kontrolujeme, zda je vstupní (+) nebo výstupní (-), ve směru osy (+) nebo proti ní (-). Kladný směr tlakových sil je dán působením tlaku tekutiny uvnitř na kontrolní plochu.

$$\text{směr } x: \quad F_x + p_1 S_1 - p_2 S_2 \cos \alpha = -\rho S_1 w_1^2 + \rho S_2 w_2^2 \cos \alpha \quad (14.1.7)$$

$$\text{směr } y: \quad F_y + p_2 S_2 \sin \alpha - p_3 S_3 = -\rho S_3 w_3^2 + \rho S_2 w_2^2 \sin \alpha \quad (14.1.8)$$

14.2 Síla od proudu kapaliny na pevnou desku



Obr. 14.2.1

Na rovnou desku skloněnou pod úhlem α dopadá proud kapaliny o rychlosti w a šířce a . Proudění budeme považovat za rovinné, hloubka proudu i desky je rovna jednotce délky. Zvolíme kontrolní plochu vyznačenou čárkovaně. Uvnitř volného a jednostranně vedeného proudu je tlak roven tlaku okolního ovzduší p_0 a tedy také bude rychlost všude stejná: $w = w_1 = w_2$, jak to plyne z Bernoulliovy rovnice pro nestlačitelnou tekutinu bez tření. V úloze jsou 4 neznámé: a_1, a_2, F, e . K řešení potřebné 4 rovnice budou: věta o změně toku hybnosti ve směru kolmém k desce a rovnoběžném s deskou (14.2.1), (14.2.2), rovnice kontinuity (14.2.3) a momentová rovnováha sil a toků hybnosti k bodu 0 (14.2.6.). Síla F plyne hned z první rovnice VZTH.

$$\text{VZTH } \perp \text{ na desku:} \quad F = \rho \dot{V} w \sin \alpha = \rho a w^2 \sin \alpha \quad (14.2.1)$$

$$\text{VZTH } \parallel \text{ s deskou:} \quad 0 = -\rho a_1 w^2 + \rho a_2 w^2 + \rho a w^2 \cos \alpha \rightarrow -a_1 + a_2 + a \cos \alpha = 0 \quad (14.2.2)$$

$$\text{rov. kontinuity:} \quad \rho a_1 w + \rho a_2 w - \rho a w = 0 \rightarrow a_1 + a_2 - a = 0 \quad (14.2.3)$$

$$(2)+(3): \quad 2a_2 + a(\cos \alpha - 1) = 0 \rightarrow a_2 = \frac{-a(\cos \alpha - 1)}{2} \quad (14.2.4)$$

$$(3)-(2): \quad 2a_1 - a(\cos \alpha + 1) = 0 \rightarrow a_1 = \frac{a(\cos \alpha + 1)}{2} \quad (14.2.5)$$

$$\text{moment. rovnováha:} \quad \rho a_2 w^2 \frac{a_2}{2} + Fe - \rho a_1 w^2 \frac{a_1}{2} = 0 \quad (14.2.6)$$

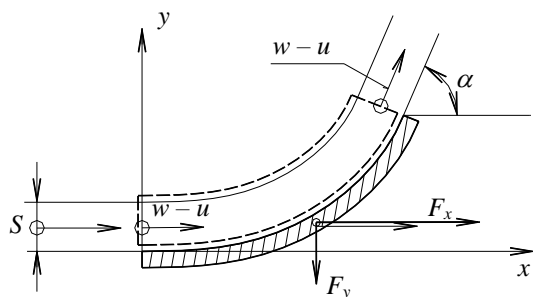
$$(1) \rightarrow (6): \quad \rho a_2 w^2 \frac{a_2}{2} + \rho a w^2 \sin \alpha \cdot e - \rho a_1 w^2 \frac{a_1}{2} = 0 \quad (14.2.7)$$

$$\frac{a_2^2}{2} - \frac{a_1^2}{2} = -a \sin \alpha \cdot e \quad (14.2.8)$$

$$e = \frac{a_1^2 - a_2^2}{2a \sin \alpha} = \frac{a^2 (\cos \alpha + 1)^2 - a^2 (\cos \alpha - 1)^2}{8a \sin \alpha} = \frac{a(\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha + 1 - \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 1)}{8 \sin \alpha} \quad (14.2.9)$$

$$e = \frac{a \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{a}{2} \cot \alpha \quad (14.2.10)$$

14.3 Síla paprsku kapaliny na lopatku v pohybu



Obr. 14.3.1

Na zakřivenou lopatku, pohybující se ve směru osy x rychlostí u , dopadá proud kapaliny o rychlosti w v množství \dot{V} , viz obr. 14.3.1. Vzhledem k pohybující se lopatce vstupuje proud do kontrolní plochy relativní rychlostí $w - u$. Protože opět uvažujeme kapalinu nestlačitelnou a zanedbáváme ztrátu třením a rázem, bude i výstupní rychlost z kontrolní plochy $w - u$. Napišeme VZTH ve směru osy x (14.3.1) a y (14.3.2), které dávají síly F_x, F_y . Pomocí síly F_x a rychlosti u dostaneme výkon lopatky P (14.3.3). Při dané rychlosti w výkon závisí na u, α . Řádek (14.3.4) ukazuje, že z hlediska úhlu α bude výkon extrémní při $\alpha = 0$, kdy je

nulový, a při $\alpha = \pi$, kdy je maximální. U izolované lopatky lze realizovat $\alpha = 180^\circ$, což znamená otočit proudění do protisměru. U lopatek Peltonovy turbíny je toto otočení nemožné, protože proud by narážel do následné lopatky a srážel její výkon. Úhel α se dělá 160° až 165° .

$$F_x = \rho \dot{V}(w-u) - \rho \dot{V}(w-u) \cos \alpha = \rho \dot{V}(w-u)(1 - \cos \alpha) \quad (14.3.1)$$

$$F_y = \rho \dot{V}(w-u) \sin \alpha \quad (14.3.2)$$

$$P = F_x u = \rho \dot{V}(w-u)(1 - \cos \alpha)u \quad (14.3.3)$$

$$\text{extrém: } \frac{\partial P}{\partial u} = 0 = \rho \dot{V}(w-u)u \sin \alpha \rightarrow \alpha = 0 (P = 0), \alpha = \pi (P = P_{\max}) \quad (14.3.4)$$

Dále vyšetříme optimální rychlost u pro dané w . Obdobně jako u optimálního α budeme paralelně řešit u_{opt} pro izolovanou lopatku a pro lopatkování Peltonova kola. V prvním případě průtočný objem vstupující do kontrolní plochy je $\dot{V} = S(w-u)$. V druhém $\dot{V} = Sw$. Čím je to způsobené? U Peltonova kola dává výkon jen lopatka, která se nalézá pod ostřikem vody, ostatní nikoliv. Vyjde-li z ostřiku, dostane se na její místo další lopatka. Čili z hlediska průtočného množství je to, jako kdyby v místě ostřiku lopatka stále stála a dostávala plný průtok $\dot{V} = Sw$. Na řádcích (14.3.5) až (14.3.9) je pak odvozena u_{opt} pro oba typy lopatek.

a) izolovaná lopatka

$$\dot{V} = S(w-u)$$

$$P = \rho S(w-u)^2(1 - \cos \alpha)u$$

$$\frac{\partial P}{\partial u} = 0 = \rho S(1 - \cos \alpha) \left[2(w-u)(-1)u + (w-u)^2 \right] \quad (14.3.7)$$

$$0 = -2u + w - u$$

$$u_{opt} = \frac{w}{3}$$

b) lopatka Peltonova kola

$$\dot{V} = Sw \quad (14.3.5)$$

$$P = \rho Sw(w-u)(1 - \cos \alpha)u \quad (14.3.6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial u} = 0 = \rho Sw(1 - \cos \alpha) \left[(-1)u + (w-u) \right] \quad (14.3.7)$$

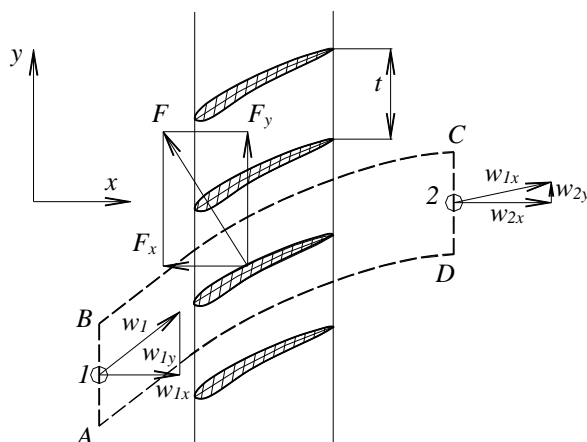
$$0 = w - 2u \quad (14.3.8)$$

$$u_{opt} = \frac{w}{2} \quad (14.3.9)$$

14.4 Síla od proudící tekutiny na pevnou lopatkovou mříž

Kompresorová lopatková mříž na obr. 14.4.1 o rozteči lopatek t a délce lopatek $L = l$ je protékána tekutinou, která hladce nabíhá na lopatky. Je zvolena souřadnicová soustava x, y a kontrolní plocha $ABCD$. Její obloukovité strany jsou vedeny po roztečných proudnicích, takže tudy tekutina neprochází a z hlediska toků hybnosti se o ně nemusíme starat. Ani o tlaky zde nemusíme pečovat, jsou na obou obloucích stejně rozloženy, opačného směru, takže se ruší. Vstupní a výstupní přímkové linie kontrolní plochy jsou v dostatečné vzdálenosti před a za mříží, tudíž rychlosti w_1, w_2 a tlaky p_1, p_2 jsou na nich rozloženy rovnoměrně. Za neznámé budeme považovat F_x, F_y, p_1, p_2 a za dané $t, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \rho = konst$. Čtyři rovnice potřebné k řešení budou: rovnice kontinuity ve směru osy x (14.4.1), Bernoulliova rovnice (14.4.2) psaná pro proudění beze ztrát, ježto jsou tu

zanedbatelné, VZTH pro směr x (14.4.4) a y (14.4.6). Poslední 2 rovnice dávají složky F_x, F_y , z nichž plyne F na řádku (14.4.7).



Obr. 14.4.1

$$\text{R.K. ve směru } x: tw_{1x} = tw_{2x} \rightarrow w_{1x} = w_{2x} = w_x \quad (14.4.1)$$

$$\text{B.R:} \quad p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{w_2^2}{2} \quad (14.4.2)$$

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}(w_1^2 - w_2^2) = \frac{\rho}{2}(w_{1x}^2 + w_{1y}^2 - w_{2x}^2 - w_{2y}^2) = \frac{\rho}{2}(w_{1y} + w_{2y})(w_{1y} - w_{2y}) = \rho w_{sy} \Delta w_y \quad (14.4.3)$$

$$\text{VZTH pro směr } x: -F_x - p_1 t + p_2 t = \rho \dot{V}(w_{1x} - w_{2x}) = 0 \quad (14.4.4)$$

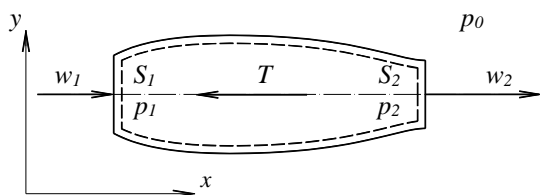
$$(4): \quad F_x = (p_2 - p_1)t = \rho w_{sy} \Delta w_y t \quad (14.4.5)$$

$$\text{VZTH pro směr } y: \quad F_y = \rho \dot{V}(w_{1y} - w_{2y}) = \rho t w_x (w_{1y} - w_{2y}) = \rho w_x \Delta w_y t \quad (14.4.6)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\rho^2 \Delta w_y^2 t^2 (w_{sy}^2 + w_x^2)} = \rho \Delta w_y t w_s \quad (14.4.7)$$

kde $w_s = \sqrt{w_{sy}^2 + w_x^2}$ je střední průtočná rychlost mříží

14.5 Tah proudového a raketového motoru



Obr. 14.5.1

Do **proudového motoru** na obr. 14.5.1 vstupuje množství vzduchu $\dot{V}_1 [m^3/s]$ rychlostí w_1 a vystupuje z něj $\dot{V}_2 [m^3/s]$ spalin o rychlosti w_2 . Tlak ovzduší je p_0 , tlak ve vstupním průřezu p_1 , ve výstupním p_2 . Zavedeme souřadnicový systém x, y a kontrolní plochu ztotožníme s obrysem tělesa motoru. Napíšeme větu o změně toku hybnosti ve vodorovném směru x . Z ní se vypočte tah motoru T (14.5.2).

Vystupující hmotnost spalin $\rho_2 \dot{V}_2$ je o hmotnost paliva větší než $\rho_1 \dot{V}_1$. Rozdíl je však nepatrný a proto lze při hrubém výpočtu položit $\rho_1 \dot{V}_1 = \rho_2 \dot{V}_2 = \rho \dot{V}$. Bude-li dále tlak $p_1 = p_0$, bude tah T dán (14.5.3), a při $p_1 = p_0$ se vztah dále zjednoduší na (14.5.4).

$$-T - S_1(p_1 - p_0) + S_2(p_2 - p_0) = \rho_1 \dot{V}_1 w_1 - \rho_2 \dot{V}_2 w_2 \quad (14.5.1)$$

$$T = \rho_2 \dot{V}_2 w_2 - \rho_1 \dot{V}_1 w_1 + S_2(p_2 - p_0) - S_1(p_1 - p_0) \quad (14.5.2)$$

$$\text{pro } \rho_1 \dot{V}_1 = \rho_2 \dot{V}_2, p_2 = p_0: \quad T = \rho \dot{V} (w_2 - w_1) + S_2 (p_2 - p_0) \quad (14.5.3)$$

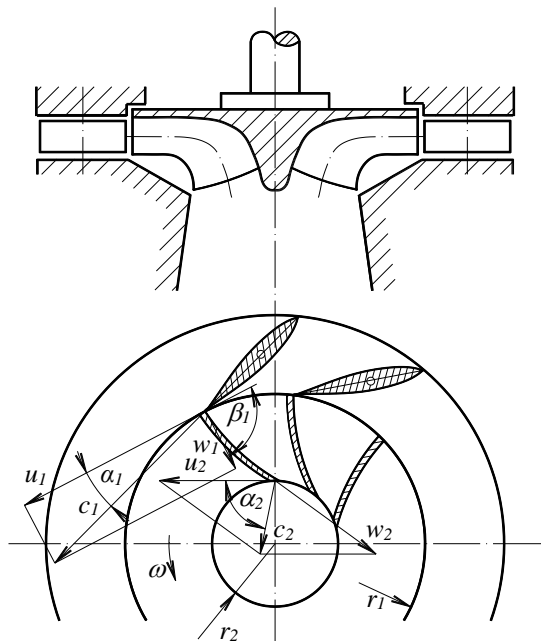
$$\text{pro } p_2 = p_0: \quad T = \rho \dot{V} (w_2 - w_1) \quad (14.5.4)$$

- **Raketový motor** má vstupní průřez $S_1 = 0$, žádný vzduch do něj nevstupuje, tj. $\rho_1 \dot{V}_1 = 0$. Dosazením do (14.5.2) dostaneme tah T raketového motoru (14.5.5), popř. při $p_2 \doteq p_0$ (14.5.6), když $\dot{V}_2 = S_2 w_2$.

$$T = \rho_2 S_2 w_2^2 + S_2 (p_1 - p_0) \quad (14.5.5)$$

$$T = \rho_2 S_2 w_2^2 \quad (14.5.6)$$

14.6 Výpočet výkonu radiální turbíny



Obr. 14.6.1

$l \text{ kg/s}$ protékající tekutiny P_{lt} (14.6.2). Rovnici pro P_{lt} lze upravit použitím kosinové věty (14.6.3), (14.6.4) na tzv. Eulerovu turbínovou větu (14.6.5).

$$M = \rho \dot{V} c_1 \cos \alpha_1 r_1 - \rho \dot{V} c_2 \cos \alpha_2 r_2 = \rho \dot{V} (c_1 r_1 - c_2 r_2 \cos \alpha_2) \quad (14.6.1)$$

$$P_{lt} = \frac{M\omega}{\rho \dot{V}} = c_1 r_1 \omega \cos \alpha_1 - c_2 r_2 \omega \cos \alpha_2 = c_1 u_1 \cos \alpha_1 - c_2 u_2 \cos \alpha_2 \quad (14.6.2)$$

$$\text{kos. věta:} \quad w_1^2 = u_1^2 + c_1^2 - 2u_1 c_1 \cos \alpha_1 \rightarrow u_1 c_1 \cos \alpha_1 = \frac{1}{2} (u_1^2 + c_1^2 - w_1^2) \quad (14.6.3)$$

$$\text{analogicky:} \quad u_2 c_2 \cos \alpha_2 = \frac{1}{2} (u_2^2 + c_2^2 - w_2^2) \quad (14.6.4)$$

$$(3),(4) \rightarrow (2): \quad P_{lt} = \frac{u_1^2 - w_1^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \quad (14.6.5)$$

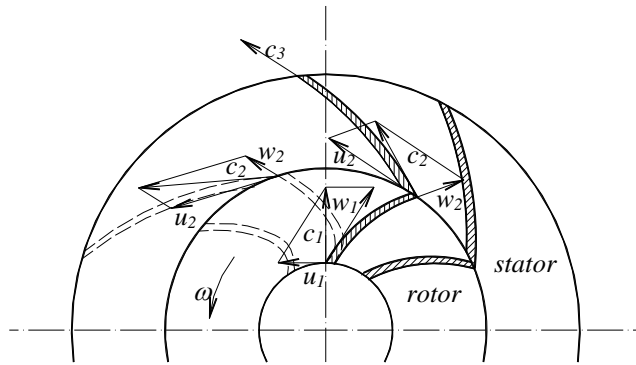
Podle Eulerovy turbínové věty je výkon turbíny pro $l \text{ kg/s}$ protékající tekutiny dán:

- poklesem kinetické energie rotující tekutiny
- poklesem absolutní kinetické energie proudu
- zvýšením relativní kinetické energie proudu v mezilopatkových kanálech rotoru.

Ztráty u rotačních strojů se respektují účinností $\eta = P/P_t < 1$, kde P je skutečný a P_t teoretický výkon. Tedy u řešené vodní turbíny bude při použití hydraulické účinnosti η_H skutečný jednotkový výkon:

$$P_l = \eta_H P_{lt} = \eta_H (c_1 u_1 \cos \alpha_1 - c_2 u_2 \cos \alpha_2) \quad (14.6.6)$$

14.7 Výpočet výkonu odstředivého čerpadla, kompresoru



Obr. 14.7.1

V odstředivém čerpadle či kompresoru proudí tekutina od středu k obvodu stroje. Prochází nejprve rotorem, který jí zvýší kinetickou energii a potom proudí lopatkovým statorem, v němž se vysoká kinetická energie přemění na tlak. Vstupní absolutní rychlost c_1 má čistě radiální směr, když nepředchází usměrňovací lopatkování. Rozloží se na obvodovou rychlost u_1 a relativní rychlost w_1 , která je tečnou ke vstupní části rotorové lopatky. Vlivem rozšiřování mezilopatkových kanálů směrem k obvodu relativní rychlost w klesá až na w_2 . Ta je tečnou k výstupní části lopatky rotoru a s obvodovou rychlostí u_2 se složí na absolutní c_2 . Vysoká

rychlost c_2 se ve statoru s rozšiřujícími se mezilopatkovými kanály sníží na c_3 a zároveň se zvýší tlak. Pro teoretický příkon čerpadla a kompresoru platí zcela stejné rovnice jako pro turbínu, tj. (14.6.2) a (14.6.5). P_{lt} dle první i druhé rovnice vychází číselně záporný, což potvrzuje skutečnost, že energii nutno přivádět.

$$P_{lt} = c_1 u_1 \cos \alpha_1 - c_2 u_2 \cos \alpha_2 \quad (14.6.2)$$

$$P_{lt} = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \quad (14.6.3)$$

Při průtoku dochází k postupnému zvyšování tlaku: v rotoru se tlak zvýší o Δp_r podle (14.7.1) a ve statoru o Δp_s (14.7.2). Výsledný nárůst tlaku ve stroji $\Delta p = \Delta p_r + \Delta p_s$.

$$\Delta p_r = \rho \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \rho \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \quad (14.7.1)$$

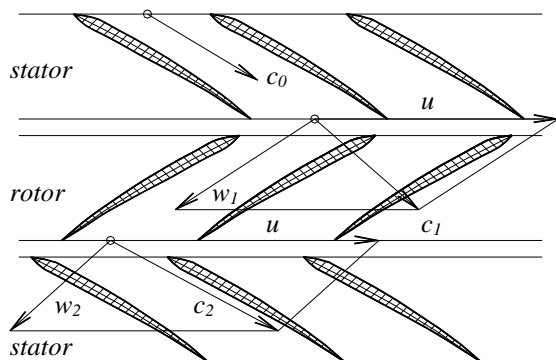
$$\Delta p_s = \rho \frac{c_2^2 - c_3^2}{2} \quad (14.7.2)$$

Velmi záleží na tom, zda lopatky rotoru jsou otočené dozadu, jak je naznačeno na pravé straně obr. 14.7.1, nebo dopředu dle levé poloviny. U strojů s dopředu otočenými lopatkami se dosahuje vyšší rychlosti c_2 , kterou je potom nutno obtížně přeměnit ve statoru na tlak. Platí, že tyto stroje dávají při stejných otáčkách vyšší stlačení Δp , mají větší příkon teoretický P_t i skutečný P a horší účinnost η_H . Skutečný příkon P_l :

$$P_l = \frac{1}{\eta_H} P_{lt} = \frac{1}{\eta_H} (c_1 u_1 \cos \alpha_1 - c_2 u_2 \cos \alpha_2) \quad (14.7.3)$$

14.8 Lopatkový stroj s axiálním průtokem

Na obr. 14.8.1 je pohled na lopatkový stupeň axiálního kompresoru, který je tvořen rotorem uprostřed a následným statorem. Z předchozího stupně vychází plyn absolutní rychlostí c_1 , která se rozloží do obvodové u a relativní w_1 , tečné ke vstupní části rotorových lopatek. Rychlost w_1 v rozšiřujícím se mezilopatkovém kanále rotoru klesne na w_2 , tečné k výstupní části rotorové lopatky. Na výstupu se vektorově sečte w_2 s u na c_2 . Platí rovnice odvozené pro stroje s radiálním průtokem jen s tím, že obvodové rychlosti $u_1 = u_2 = u$. Modifikací (14.6.2), (14.6.3) dostaneme (14.8.1), (14.8.2). Obdobně se určí nárůst tlaku v rotoru a statoru kompresorového stupně.



Obr. 14.8.1

$$P_{lt} = (c_1 \cos \alpha_1 - c_2 \cos \alpha_2) u \quad (14.8.1)$$

$$P_{lt} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \quad (14.8.2)$$

$$\Delta p_r = \rho \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \quad (14.8.3)$$

$$\Delta p_s = \rho \frac{c_2^2 - c_0^2}{2} \quad (14.8.4)$$

Nárůst tlaku v lopatkovém stupni:

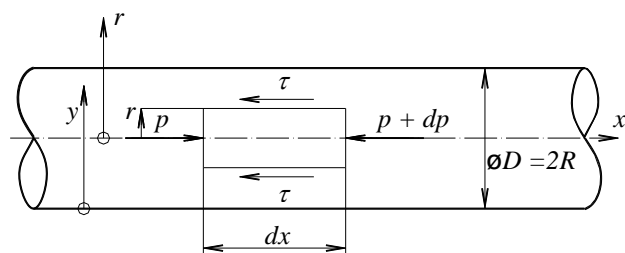
$$\Delta p = \Delta p_r + \Delta p_s \quad (14.8.5)$$

15. Rychlostní profily

Jestliže v jednotlivých bodech průtokového průřezu vyneseme graficky vektory rychlostí, koncové body vektorů vytvoří plochu zvanou rychlostní profil. Tvar rychlostního profilu ovlivňuje velikost a rozložení smykového napětí a to zase tlakové ztráty v řešeném kanálu. Takže zde nejde jen o rychlostní profily jako takové, ale o jejich silové a další důsledky. Pokud je proudění laminární, v jednoduchých geometrických konfiguracích lze úlohu řešit analyticky, jak bude níže ukázáno. Mnohem horší situace je u turbulentních proudění, kde jsme schopni řešit analyticky, a to s podporou experimentálních výsledků, jen velmi jednoduché případy, např. přímé potrubí.

15.1 Laminární proudění v trubici kruhového průřezu

V trubici o průměru $D = 2R$ proudí nestlačitelná viskózní tekutina se zanedbatelnou setrvačností. Proudění je zřejmě symetrické k ose trubky, to znamená, že všechny částice na téže válcové ploše mají stejnou rychlost. Zavedeme systém válcových souřadnic r, x . Zvolíme válcový element o poloměru r , délky dx , u něhož částice ležící na povrchu mají rychlost w . Uděláme rovnováhu sil, kterými proudící tekutina působí na vytknutý váleček.



Obr. 15.1.1

Jsou to síly od smykového napětí τ na povrchu válce a od tlaků $p, p + dp$, které působí na čela válečku. Rovnováha sil je na řádku (15.1.1), z ní se vypočte τ a po jeho rozvedení Newtonovým vztahem se určí diferenciál rychlosti dw a po integraci w . Při tom je zavedena dočasná substituce $i = -dp/dx$, což je kladné číslo, protože tlak ve směru proudění klesá. Integrační konstanta se stanoví z podmínky na stěně, kde je nulová rychlost. Výsledná rychlost je potom (15.1.8),

maximální uprostřed trubice (15.1.9). Průtočné množství $\dot{V} [m^3/s]$ je dané součtem elementárních množství, protékajících mezikružními diferenciální šířky dr o ploše $2\pi r dr$, viz (15.1.10)

$$-dp\pi r^2 - \tau 2\pi r dx = 0 \quad (15.1.1)$$

$$\tau = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{r}{2} = i \frac{r}{2} \quad \text{kde } i = -\frac{dp}{dx} > 0 \quad (15.1.2)$$

Pozn.: $r = R - y \rightarrow \frac{dw}{dy} = -\frac{dw}{dr} \rightarrow \tau = \eta \frac{dw}{dy} = -\eta \frac{dw}{dr} \quad (15.1.3)$

$$(2): \quad -\eta \frac{dw}{dy} = i \frac{r}{2} \quad (15.1.4)$$

$$(4) \quad dw = -\frac{i}{2\eta} \cdot r dr \quad (15.1.5)$$

$$\int (5) \quad w = -\frac{ir^2}{4\eta} + C \quad (15.1.6)$$

$$C: \quad r=R, \quad w=0 \rightarrow C = +\frac{iR^2}{4\eta} \quad (15.1.7)$$

$$(7) \rightarrow (6): \quad w = \frac{i}{4\eta} (R^2 - r^2) \quad (15.1.8)$$

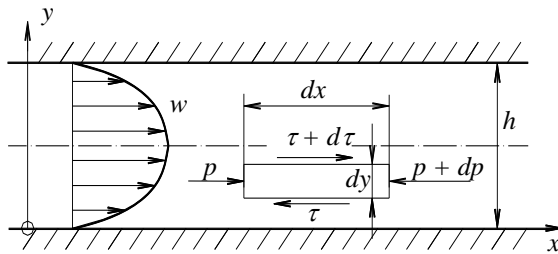
$$\text{pro } r=0: \quad w_{\max} = \frac{iR^2}{4\eta} = \frac{iD^2}{16\eta} \quad (15.1.9)$$

$$\dot{V} = \int_0^R 2\pi r w dr = \int_0^R 2\pi r \frac{i}{4\eta} (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi i}{2\eta} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi i R^4}{8\eta} = \frac{\pi i D^4}{128\eta} \quad (15.1.10)$$

Rovnice (15.1.8) říká, že laminární rychlostní profil v trubici má tvar rotačního paraboloidu. Vzorec (15.1.10) vyjadřuje Hagen - Poiseuilleův zákon. Pomocí něho určíme průřezově střední rychlost w_s , když porovnáme \dot{V} vyjádřené jednou střední rychlostí a podruhé Hagen - Poiseulleovým zákonem. Vychází $w_s = w_{\max}/2$. Uvedené vztahy se týkají proudění dále od vstupu, kde je rychlostní profil tzv. vyvinutý.

$$\dot{V} = \frac{\pi}{4} D^2 w_s = \frac{\pi i D^4}{128\eta} = \frac{\pi D^2}{8} w_{\max} \rightarrow w_s = \frac{w_{\max}}{2} \quad (15.1.11)$$

15.2 Laminární průtok mezi rovnoběžnými deskami



Obr. 15.2.1

Mezi dvěma deskami vzdálenými h proudí nestlačitelná vazká tekutina se zanedbatelnou setrvačností. Na vytknutý element tekutiny o objemu $dx dy l$ působí podle obr. 15.2.1 tlaky p a $p+dp$, smyková napětí od vazkosti τ a $\tau+d\tau$. Z rovnováhy sil působících na elementární objem postupně vypočteme $d\tau, w, w_{\max}, \dot{V}, w_s$ dle rovnic (15.2.1) až (15.2.11).

$$d\tau dx - dp dy = 0 \quad (15.2.1)$$

$$d\tau = \frac{dp}{dx} dy \quad (15.2.2)$$

$$d\left(\eta \frac{dw}{dy}\right) = -idy \quad \text{kde } i = -\frac{dp}{dx} > 0 \quad (15.2.3)$$

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{i}{\eta} y + C_1 \quad (15.2.4)$$

$$w = -\frac{i}{2\eta} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (15.2.5)$$

$$C_1, C_2: \quad y=0, \quad w=0 \rightarrow C_2=0 \quad (15.2.6)$$

$$y=h, \quad w=0 \rightarrow C_1 = \frac{i}{2\eta} \cdot h \quad (15.2.7)$$

$$w = -\frac{i}{2\eta}y^2 + \frac{i}{2\eta}hy = \frac{iy}{2\eta}(h-y) \quad (15.2.8)$$

$$\text{pro } y = \frac{h}{2} \quad w_{max} = \frac{ih}{4\eta}\left(h - \frac{h}{2}\right) = \frac{ih^2}{8\eta} \quad (15.2.9)$$

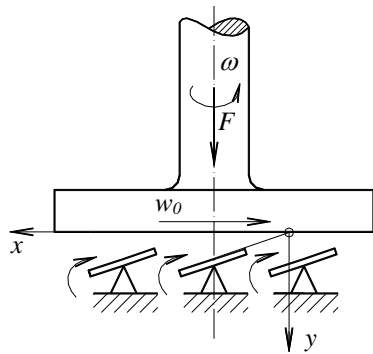
$$\dot{V} = \int_0^h w dy = \int_0^h \frac{iy}{2\eta}(h-y) dy = \frac{i}{2\eta}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{ih^3}{12 \cdot \eta} \quad (15.2.10)$$

$$\dot{V} = w_S \cdot h = \frac{ih^3}{12\eta} = \frac{ih^2}{8\eta} \cdot \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}w_{max} \cdot h \rightarrow w_S = \frac{2}{3}w_{max} \quad (15.2.11)$$

Rychlostní profil (15.2.8) je parabolický, maximální rychlost w_{max} je uprostřed (15.2.9), střední rychlost je $2/3$ z rychlosti maximální. Tuto vazbu bychom jednoduše dostali převedením parabolické úseče na obdélník výšky w_S .

15.3 Laminární průtok klínovou mezerou

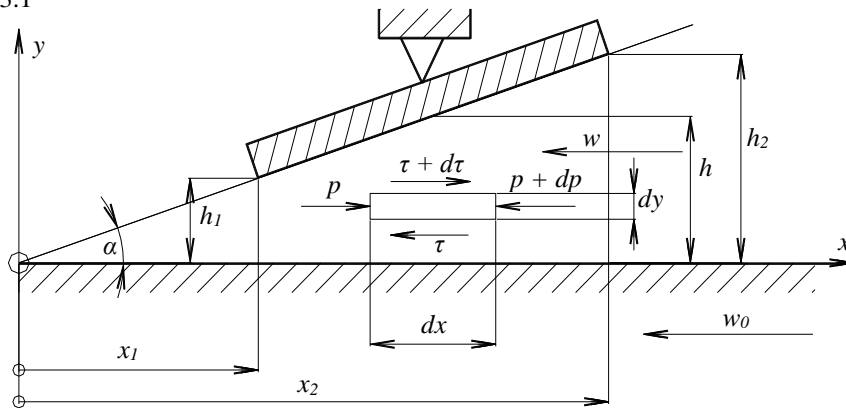
Průtok klínovou mezerou je typický pro axiální Michelova ložiska popř. radiální ložiska s čepy velkého průměru (turbína 1000 MW Temelín). Obr. 15.3.1 ukazuje axiální ložisko, u něhož se vertikální síla přenáší z rotujícího hřídele prostřednictvím opěrného kotouče o obvodové rychlosti w_0 na olej proudící ve zužujících se štěrbinách mezi deskou a segmenty. Segmenty jsou buď pevné s konstantním sklonem nebo natáčivé. Na obr.



Obr. 15.3.1

15.3.2 je detail oblasti jednoho segmentu, převrácený, aby osa y s počátkem na desce směřovala vzhůru, osa x doprava.

Mezera mezi segmentem a deskou se s rostoucím x zvětšuje, úhel α však není velký, takže v přibližném výpočtu lze složku rychlosti ve směru y zanedbat. Stejně lze předpokládat, že tlak v celém rozsahu téže šířky h je stejný a že se mění jen s osou x . Budeme-li opět uvažovat, že mezerou stacionárně proudí nestlačitelná tekutina se zanedbatelnou setrvačností a označíme-li tlaky a smyková napětí působící na objemový element $dx dy l$ stejně jako při průtoku mezi rovnoběžnými deskami, dostaneme také stejnou rovnici pro rychlost w , totožnou s (15.2.5). Ke stanovení integračních konstant C_1, C_2 jsou ovšem jiné okrajové podmínky (15.3.1), (15.3.2). Průběh rychlosti v libovolném řezu h je dán (15.3.3).



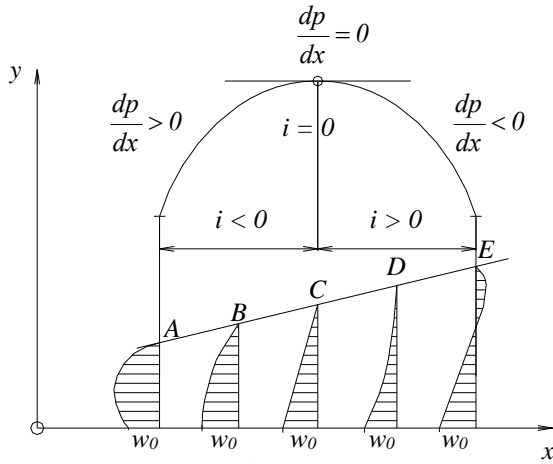
Obr. 15.3.2

$$w = -\frac{i}{2\eta}y^2 + C_1y + C_2 \quad \text{kde } i = -\frac{dp}{dx} \quad (15.2.5)$$

$$C_1 C_2: \quad y = 0, w = -w_0 \rightarrow C_2 = -w_0 \quad (15.3.1)$$

$$y = h, w = 0 \rightarrow C_1 = \frac{w_0}{h} + \frac{ih}{2\eta} \quad (15.3.2)$$

$$w = -\frac{i}{2\eta} y^2 + \left(\frac{w_0}{h} + \frac{ih}{2\eta} \right) w_0 \quad (15.3.3)$$



obr. 15.3.3

Podle poslední rovnice je rychlostní profil složen z paraboly (1. člen), z šikmé přímky (2. člen) a z konstanty $-w_0$. Tlak oleje na vstupu a výstupu z mezery je prakticky roven atmosférickému tlaku p_0 . Má-li mít ložisko určitou nosnost, musí být tlak oleje uvnitř mezery podstatně větší než atmosférický. V řezu, kde je tlak nejvyšší, je $i = -dp/dx = 0$, takže z rovnice (15.3.3) zmizí členy s i a rychlost tu má čistě přímkový průběh $w = w_0 y/h - w_0$, tj. z hodnoty $-w_0$ na desce po nulovou rychlost na segmentu, viz řez C na obr. 15.3.3. Zde jsou vyneseny i další profily. Ve vstupu do štěrbiny je na části průřezu při segmentu zpětné proudění, zatím co na výstupu přesahuje nejvyšší rychlost oleje rychlost opěrné desky w_0 .

Objemové průtočné množství jednou štěrbinou \dot{V} dostaneme integrací elementárních průtoků $d\dot{V} = -bw dy$, kde b je hloubka segmentu i štěrbiny v radiálním směru. Znaménko minus je nutné, protože w je záporná rychlost směřující proti ose x , kdežto $d\dot{V}$ je kladné číslo. Výsledné \dot{V} je na řádce (15.3.6). Zpětně z něho vypočteme i , odtud dp a $p - p_0$ v libovolném řezu štěrbiny (15.3.9). Pak již integrací tlaku $p - p_0$ podél segmentu (15.3.10) stanovíme nosnost ložiska F (15.3.11). Úkol je však opačný, F je dané a má se určit počet nosných segmentů n , třecí síla na nosné desce F_{TR} , třecí výkon P_{TR} a oteplení oleje ΔT v ložisku, viz (15.3.12) až (15.3.16). V poslední rovnici c značí měrnou tepelnou kapacitu oleje v $[J/kgK]$.

$$\dot{V} = -b \int_0^h w dy = -b \int_0^h \left[-\frac{i}{2\eta} y^2 + \left(w_0 + \frac{ih^2}{2\eta} \right) \frac{y}{h} - w_0 \right] dy \quad (15.3.4)$$

$$= -b \left[-\frac{i}{6\eta} h^3 + \left(w_0 + \frac{ih^2}{2\eta} \right) \frac{h}{2} - w_0 h \right] = -b \left[\frac{ih^3}{\eta} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + w_0 h \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] \quad (15.3.5)$$

$$= b \left[-\frac{ih^3}{12\eta} + \frac{w_0 h}{2} \right] \quad (15.3.6)$$

$$i = \frac{12\eta}{h^3} \left[\frac{w_0 h}{2} - \frac{\dot{V}}{b} \right] = -\frac{dp}{dx}, \quad \text{kde } h = x \operatorname{tg} \alpha \quad (15.3.7)$$

$$\int_{p_0}^p dp = -\frac{12\eta}{\operatorname{tg}^3 \alpha} \int_{x_1}^x \frac{1}{x^3} \left[\frac{w_0 x \operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\dot{V}}{b} \right] dx = -\frac{12\eta}{\operatorname{tg}^3 \alpha} \left[\frac{w_0 \operatorname{tg} \alpha}{2} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x} \right) - \frac{\dot{V}}{2b} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x^2} \right) \right] \quad (15.3.8)$$

$$p - p_0 = \frac{6\eta}{\operatorname{tg}^3 \alpha} \left[w_0 \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} \right) - \frac{\dot{V}}{b} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_1^2} \right) \right] \quad (15.3.9)$$

$$F = nb \int_{x_1}^{x_2} (p - p_0) dx = nb \frac{6\eta}{\operatorname{tg}^3 \alpha} \int_{x_1}^{x_2} \left[w_0 \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} \right) - \frac{\dot{V}}{b} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_1^2} \right) \right] dx \quad (15.3.10)$$

$$= nb \frac{6\eta}{\operatorname{tg}^3 \alpha} \left[w_0 \operatorname{tg} \alpha \left(\ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2 - x_1}{x_1} \right) - \frac{\dot{V}}{b} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} - \frac{x_2 - x_1}{x_1^2} \right) \right] \quad (15.3.11)$$

$$n = \frac{F \cdot \operatorname{tg}^3 \alpha}{6b\eta} \left[w_0 \operatorname{tg} \alpha \left(\ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2 - x_1}{x_1} \right) - \frac{\dot{V}}{b} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} - \frac{x_2 - x_1}{x_1^2} \right) \right]^{-1} \quad (15.3.12)$$

$$F_{TR} = nb \int_{x_1}^{x_2} \eta \cdot \frac{dw}{dy} \Big|_{y=0} dx = nb\eta \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dy} \left[-\frac{i}{2\eta} y^2 + \left(\frac{w_0}{h} + \frac{ih}{2\eta} \right) y - w_0 \right] dx \quad (15.3.13)$$

$$= nb\eta \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{w_0}{xtg\alpha} + \frac{ixtg\alpha}{2\eta} \right) dx = nb\eta \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{w_0}{xtg\alpha} + \frac{6}{x^2 tg^2 \alpha} \left(\frac{w_0 xtg\alpha}{2} - \frac{\dot{V}}{b} \right) \right) dx \quad (15.3.14)$$

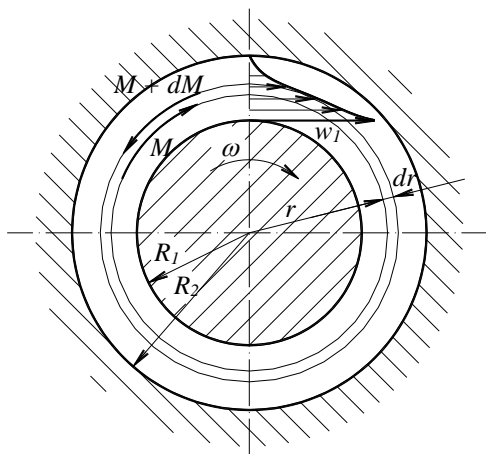
$$= nb\eta \left[\frac{w_0}{tg\alpha} \ln \frac{x_2}{x_1} + \frac{6}{tg^2 \alpha} \left(\frac{w_0 t g \alpha}{2} \ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{\dot{V}}{b} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) \right) \right] \quad (15.3.15)$$

$$P_{TR} = M\omega = F_{TR} r\omega = F_{TR} w_0 = c\rho\dot{V}\Delta T \rightarrow \Delta T = F_{TR} w_0 / c\rho\dot{V} \quad (15.3.16)$$

Při dané konstrukci ložiska a otáčkách závisí nosnost ložiska, výkon ztracený třením a oteplení oleje na průtočném množství oleje \dot{V} . Teplota oleje nesmí překročit mez, při níž se začíná rozkládat a ztrácet vazkost η .

15.4 Laminární proudění mezikruhovou mezerou

Máme tu na mysli laminární proudění mezikruhovou štěrbinou v obvodovém směru, k jakému dochází u oleje v radiálním kluzném ložisku při dostatečně vysokých otáčkách hřídele. Při nízkých otáčkách, např. při rozběhu, se musí čep v ložisku zvednout tlakovým olejem přiváděným pod čep. Při řešení úkolu uvedeného v nadpisu budeme předpokládat stacionární proudění nestlačitelné vazké tekutiny se zanedbatelnou setrvačností.



Obr. 15.4.1

Hřídel o poloměru R_1 má obvodovou rychlost $w_1 = R_1 \omega$, pánev ložiska má poloměr otvoru R_2 a délku L , viz obr. 15.4.1. Pohyb tekutiny ve směru osy hřídele zanedbáme. V proudící kapalině vytkneme válcovou vrstvu o poloměru r , délky L a tloušťky dr . Ve směru axiálním působí na vytknutou vrstvu stejné tlaky, které se vzájemně ruší. Radiální změna tlaku ve štěrbině je nulová. Tekutina pod vytknutou vrstvou je rychlejší, smykovým napětím τ vrstvu strhává do obvodového proudění a působí na ni momentem M . Naopak tekutina vně vrstvy je pomalejší, působí na ni smykovým napětím $\tau + d\tau$ proti směru proudění a vyvolává moment $M + dM$ téhož směru.

Z rovnováhy momentů na řádku (15.4.1) plyne $dM = 0$, tedy $M = konst$, označená jako konstanta C_1 , protože bude ještě další C_2 . Z rozepsaného momentu se vypočte rychlost w (15.4.5), obsahující integrační konstanty C_1, C_2 . Pro ně máme okrajové podmínky na stěnách štěrbiny,

dávající soustavu dvou algebraických rovnic (15.4.6), (15.4.7). Z nich se C_1, C_2 snadno vypočtou a po jejich dosazení do základní rovnice pro w dostáváme výsledný vzorec pro tvar rychlostního profilu (15.4.10). Důležité je smykové napětí na povrchu čepu (15.4.11), které dává třecí moment M_1 (15.4.12) a třecí výkon P . V ložisku se přemění na teplo, kterým se olej ohřeje o přírůstek teploty ΔT .

$$M - M - dM = 0 \rightarrow dM = 0 \rightarrow M = konst C_1 \quad (15.4.1)$$

$$M = \tau \cdot S r = \tau \cdot 2\pi r L r = 2\pi r^2 L \tau = C_1 \quad (15.4.2)$$

$$2\pi r^2 L \eta \frac{dw}{dr} = C_1 \quad (15.4.3)$$

$$dw = \frac{C_1}{2\pi L \eta} \frac{dr}{r} \quad (15.4.4)$$

$$w = \frac{-C_1}{2\pi L \eta} \cdot \frac{1}{r^2} + C_2 \quad (15.4.5)$$

$$C_1, C_2 = ? \quad \text{pro } r = R_1, w = w_1 \rightarrow w_1 = -\frac{C_1}{2\pi L \eta R_1} + C_2 \quad (15.4.6)$$

$$\text{pro } r = R_2, w = 0 \rightarrow 0 = -\frac{C_1}{2\pi L \eta R_2} + C_2 \quad (15.4.7)$$

$$(6)-(7): \quad w_1 = C_1 \frac{1}{2\pi L \eta} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \rightarrow C_1 = \frac{w_1 2\pi L \eta R_1 R_2}{R_1 - R_2} \quad (15.4.8)$$

$$(8)-(7): \quad C_2 = \frac{1}{2\pi L \eta R_2} \frac{w_1 2\pi L \eta R_1 R_2}{R_1 - R_2} = \frac{w_1 R_1}{R_1 - R_2} \quad (15.4.9)$$

$$w = -\frac{1}{2\pi L \eta} \frac{w_1 2\pi L \eta R_1 R_2}{R_1 - R_2} \cdot \frac{1}{r} + \frac{w_1 R_1}{R_1 - R_2} = \frac{w_1 R_1}{R_2 - R_1} \left(\frac{R_2}{r} - 1 \right) \quad (15.4.10)$$

$$\tau_{r=R_1} = \eta \frac{d}{dr} \left[\frac{w_1 R_1}{R_2 - R_1} \left(\frac{R_2}{r} - 1 \right) \right]_{r=R_1} = -\frac{\eta w_1}{R_2 - R_1} \frac{R_2}{R_1} \quad (15.4.11)$$

$$M_1 = \tau_1 2\pi R_1 L R_1 = \tau_1 2\pi R_1^2 L = -\frac{2\pi \eta L w_1 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (15.4.12)$$

$$P = M_1 \omega = -\frac{2\pi \eta L w_1 R_1 \omega R_2}{R_2 - R_1} = -\frac{2\pi \eta L w_1^2 R_2}{R_2 - R_1} \quad (15.4.13)$$

$$P = \rho \cdot c \dot{V} \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{P}{\rho c \dot{V}} \quad (15.4.14)$$

kde: ρ je hustota oleje, c je měrná tepelná kapacita oleje, \dot{V} je průtokový objem oleje, ΔT je přírůstek teploty oleje v ložisku.

Znaménko minus u smykového napětí a momentu vyjadřuje účinek oleje na čep, který má opačný směr než úhlová rychlost ω udávající kladný směr. Minus u P znamená ztracený výkon.

15.5 Turbulentní mocninový zákon

U turbulentního proudění se budeme zabývat jen prouděním v kruhové trubici. Rychlostní profil turbulentního proudění v trubce se podstatně liší od parabolického rychlostního profilu při laminárním proudění. Vlivem intenzivních směšovacích pohybů molárních částic a turbulentních vírů dochází k vyrovnávání pohybových energií jednotlivých koncentrických vrstev. Rychlostní profil je celkem plošší, o to větší spád rychlosti je v těsné blízkosti stěny. Máme na mysli rychlostní profil dále od vstupu, kde je turbulentní proudění vyvinuté.

Mocninový zákon (15.5.1) dosti dobře vystihuje odměřený turbulentní rychlostní profil v trubici

$$w = w_{max} \left(\frac{y}{R} \right)^{1/n} \quad (15.5.1)$$

kde w_{max} je rychlost ve středu trubice

y je vzdálenost od stěny

R je poloměr trubice

n je některé z přirozených čísel uvedených v tab. 15.5.1 v závislosti na Re čísle

Velmi často bývá exponent $1/7$, což vyvolalo pro mocninový zákon označení sedminový zákon. Průtočné množství \dot{V} získáváme integrací $d\dot{V} = 2\pi r dr w$, kde r převedeme na jedinou proměnnou $y = R - r$ a tu na proměnnou $\zeta = y/R$. Výsledné \dot{V} je dané vztahem (15.5.4). Když vyjádříme \dot{V} pomocí střední rychlosti w_s a porovnáme s \dot{V} dle (15.5.4), obdržíme vztah mezi w_s a w_{max} , který závisí na n . Označíme poměr $w_s/w_{max} = \beta$. Hodnoty β jsou rovněž uvedeny v tabulce 15.5.1.

$$\dot{V} = \int_0^R 2\pi r dr w = \int_R^0 2\pi(R-y) w_{max} \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} (-dy) = 2\pi R^2 w_{max} \int_0^1 \left(1-\frac{y}{R}\right) \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} d\left(\frac{y}{R}\right) \quad (15.5.2)$$

$$= 2\pi R^2 w_{max} \int_0^1 (1-\zeta) \zeta^{1/n} d\zeta = 2\pi R^2 w_{max} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n}{2n+1}\right) = \quad (15.5.3)$$

$$= \pi R^2 w_{max} \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \quad (15.5.4)$$

$$\dot{V} = \pi R^2 w_s = \pi R^2 w_{max} \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \rightarrow \frac{w_s}{w_{max}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} = \beta \quad (15.5.5)$$

Mocninový zákon vyhovuje celkem dobře pro celý průřez trubice vyjímaje její střed a oblast v těsné blízkosti stěny. Konkrétně zde má mocninový zákon nereálné derivace dw/dy . Derivace je uvedena na řádku (15.5.6). Její hodnota uprostřed trubice by měla být nulová, ale (15.5.7) ukazuje, že tomu tak není. To znamená,

Povrch stěny	drsňý	hladký	hladký	hladký	hladký
$Re = w_s D / \nu$	2 300	45 000	200 000	640 000	2 000 000
n dle (15.5.1)	6	7	8	9	10
β dle (15.5.5)	0,791	0,817	0,837	0,853	0,866

Tab. 15.5.1

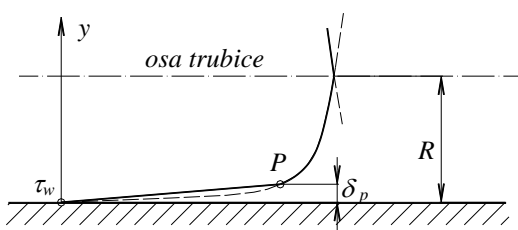
že rychlostní profil zde má mírnou špičku. Tento nedostatek mocninového zákona není závažný, běžně se přehlíží. Horší chyba vzniká u stěny, kde má derivace dw/dy nekonečně velkou hodnotu a tedy je zde nekonečně velké smykové napětí.

$$\frac{dw}{dy} = \frac{d}{dy} \left\{ w_{max} \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \right\} = \frac{w_{max}}{R^{1/n}} \frac{1}{n} \frac{1}{y^{\frac{n-1}{n}}} \quad (15.5.6)$$

uprostřed: $\frac{dw}{dy} \Big|_{y=R} = \frac{w_{max}}{R^{1/n}} \frac{1}{n} \frac{1}{R^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{w_{max}}{R n} \neq 0 \quad (15.5.7)$

u stěny: $\frac{dw}{dy} \Big|_{y=0} = \frac{w_{max}}{R^{1/n}} \frac{1}{n} \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \tau \Big|_{y=0} = \infty \quad (15.5.8)$

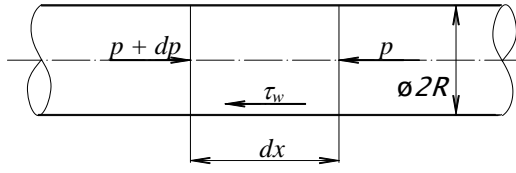
Chybu derivace dw/dy mocninového zákona u stěny je třeba napravit. Využívá se k tomu skutečnosti, že při celkově turbulentním průtoku je u stěny velmi tenká vrstva tekutiny, která proudí laminárně. Je to tzv. **vazká či laminární podvrstva** o tloušťce δ_p . Může se předpokládat, že rychlost v ní roste od stěny přímkově, jak ukazuje



Obr. 15.5.1

obr. 15.5.1. Protože ve vazké podvrstvě je konstantní derivace dw/dy , je tu také konstantní smykové napětí. Čili v bodě P je smykové napětí τ_p stejné jako na stěně τ_w . Rychlostní profil je tak složen ze dvou částí: z přímkové části a z mocninového zákona.

Tloušťku laminární podvrstvy určíme z podmínky, že tečné napětí v bodě P je stejné, ať je stanovíme z mocninového zákona nebo z vazké podvrstvy, kde je konstantní stěnové napětí τ_w . Toto napětí můžeme vyjádřit z rovnováhy sil působících na tekutinu v potrubním úseku



Obr. 15.5.2

délky dx jako funkci ztrátového součinitele tření λ a průřezově střední rychlosti w_s , viz obr. 15.5.2 a rovnice (15.5.9) a (15.5.10). Když budeme předpokládat, že stěna je hydraulicky hladká (bude vysvětleno ve statí o ztrátách), pak λ se vyjádří pomocí (15.5.11).

$$\tau_w 2\pi R dx = dp \pi R^2 \quad (15.5.9)$$

$$\tau_w = \frac{dpR}{2dx} = \lambda \frac{dx}{2R} \rho \frac{w_s^2}{2} \frac{R}{2dx} = \frac{\lambda \rho w_s^2}{8} \quad (15.5.10)$$

$$\text{kde} \quad \lambda = \frac{0,3164}{Re^{1/4}} = \frac{0,3164}{\left(\frac{w_s 2R}{\nu}\right)^{1/4}}, \quad w_s = \beta w_{max} \quad (15.5.11)$$

Následuje výpočet δ_p z rovnosti smykových napětí v hraničním bodě P a při využití právě odvozeného τ_w a uvedeného λ s omezením na hydraulicky hladká potrubí.

$$\tau_p = \tau_w \quad (15.5.12)$$

$$\eta \frac{w_p}{\delta_p} = \tau_w \quad (15.5.13)$$

$$\nu \rho \frac{1}{\delta_p} w_{max} \left(\frac{\delta_p}{R}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\lambda \rho w_s}{8} \quad (15.5.14)$$

$$\delta_p^{\frac{1-n}{n}} = \frac{\lambda w_s^2}{8} \frac{\beta R^{1/n}}{w_s \nu} = \frac{0,3164 \beta}{16 Re^{1/4}} \frac{\overbrace{w_s 2R}^{Re}}{\nu} R^{\frac{1-n}{n}} \quad (15.5.15)$$

$$\delta_p^{\frac{1-n}{n}} = \frac{0,3164 \beta}{16} Re^{3/4} R^{\frac{1-n}{n}} \quad (15.5.16)$$

$$\delta_p = \left(\frac{0,3164 \beta}{16}\right)^{\frac{n}{1-n}} \frac{R}{Re^{\frac{3n}{4(1-n)}}} \quad (15.5.17)$$

$$\text{pro } n=7 \quad \delta_p = \frac{123R}{Re^{7/8}} \quad (15.5.18)$$

Příklad

Abychom měli určitou představu o tloušťce vazké podvrstvy, uvažujme turbulentní proudění vody o střední rychlosti $w_s = 2 \text{ m/s}$, vazkosti $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ hydraulicky hladkým potrubím o $\varnothing D = 0,1 \text{ m}$.

$$Re = \frac{w_s D}{\nu} = \frac{2 \cdot 0,1}{10^{-6}} = 2 \cdot 10^5, \quad \text{z tab. 15.5.1: } n=8, \beta=0,837 \quad (15.5.19)$$

$$\delta_p = \left(\frac{0,3164 \beta}{16}\right)^{\frac{n}{1-n}} \frac{R}{Re^{\frac{3n}{4(1-n)}}} = \left(\frac{0,3164 \cdot 0,837}{16}\right)^{\frac{8}{7}} \frac{0,05}{(2 \cdot 10^5)^{\frac{6}{7}}} = 1,55 \cdot 10^{-4} \text{ m} = \underline{0,15 \text{ mm}} \quad (15.5.20)$$

15.6 Turbulentní logaritmický zákon

Logaritmický profil rychlosti má základ v Prandtlově prvotním modelu turbulentní vazkosti η_T (10.7.7) majícím bázi ve směšovací délce $l = \kappa y$, kde $\kappa = 0,4$. Takto definovanou vazkost vložíme do Newtonova vztahu pro smykové napětí $\tau = \eta_T (\partial \bar{w}_x / \partial y)$ (15.6.1) a napětí aplikujeme na oblast blízkou stěně, kde $\tau = \tau_w$ a kde je můžeme považovat za konstantu spolu s ρ nestlačitelné tekutiny. Z rovnice (15.6.2) vypočteme dw a integrací w (15.6.4).

$$\eta_T = \rho \cdot l^2 \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \quad \text{kde } l = \kappa y \quad (10.7.7)$$

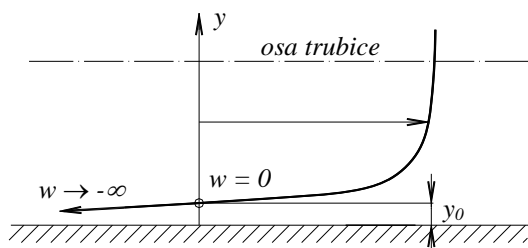
$$\tau = \eta_T \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2 \quad (15.6.1)$$

pro $y \rightarrow 0, \tau = \tau_w, \bar{w}_x = w(y): \quad \tau_w = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (15.6.2)$

$$dw = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{dy}{y} \quad (15.6.3)$$

$$w = \frac{1}{\kappa} w^* \ln y + C \quad (15.6.4)$$

kde $w^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ je tzv. třecí rychlost, $\kappa = 0,4$ (15.6.5)



Obr. 15.6.1

Třecí rychlost w^* nemá s rychlostí nic společného než rozměr rychlosti $[m/s]$. Třecí rychlost můžeme určit ze vztahu (15.5.10), odvozeném v předchozí stati. Plyne z něho w^* podle (15.6.6). Rovnice (15.6.4) vyjadřuje **logaritmický zákon** rozložení rychlosti při turbulentním proudění podél stěny. Podobně jako mocninový zákon také logaritmický zákon je problematickým v těsné blízkosti stěny. Při $y = 0$ je $\ln y = -\infty$ a tedy $w = -\infty$, $dw/dy = w^*/\kappa y = \infty$, tj. $\tau = \infty$. Úloha se zvládá posunutím stěny o y_0 směrem do proudu, kde je $w = 0$, a

pro tuto podmínku se určí integrační konstanta C (15.6.7). Po zpětném dosazení C do mocninového zákona dostaneme (15.6.8).

$$(15.5.10): \quad \tau_w = \frac{\lambda \rho w_S^2}{8} \quad \rightarrow \quad w^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = w_S \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \quad (15.6.6)$$

$$C = ? \quad \text{pro} \quad y = y_0, w = 0 \quad \rightarrow \quad C = -\frac{1}{\kappa} w^* \ln y_0 \quad (15.6.7)$$

$$w = \frac{1}{\kappa} w^* \ln y - \frac{1}{\kappa} w^* \ln y_0 = \frac{w^*}{\kappa} \cdot \ln \frac{y}{y_0} \quad (15.6.8)$$

Posuv y_0 se určuje analýzou naměřeného průběhu rychlostního profilu. Jinou možností je rozdělení rychlostního profilu na lineární část těsně u stěny ve vazké podvrstvě a na logaritmickou vedle ní. Jestliže zavedeme bezrozměrovou rychlost w^+ a bezrozměrovou vzdálenost y^+ podle (15.6.9), potom obě pásma jsou při turbulentním proudění v trubici definována vztahy (15.6.10) až (15.6.13).

$$w^+ = \frac{w}{w^*}, \quad y^+ = \frac{y w^*}{\nu} \quad (15.6.9)$$

vazká podvrstva: $y^+ \leq 11,6, \quad w^+ = y^+ \quad (15.6.10)$

logaritmická oblast: $y^+ > 11,6 \quad (15.6.11)$

stěna hydraulicky hladká: $w^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5 \quad (15.6.12)$

stěna hydraulicky drsná: $w^+ = 2,5 \ln y^+ + 8,5 \quad (15.6.13)$

16. Tlakové ztráty v potrubí

Při proudění tekutin dochází neustále k disipaci, tj. k přeměně části kinetické energie tekutiny vlivem tření na teplo. Projevem tohoto procesu je klesání celkového tlaku, a pokud se nemění rychlost proudění i tlaku statického. Z hlediska výpočtového tlakové ztráty v potrubních systémech dělíme na ztráty místní a ztráty třecí. Tradiční pojmenování budeme respektovat i když je matoucí, protože tření je příčinou všech tlakových ztrát.

Oba druhy tlakové ztráty vyjadřujeme pomocí ztrátového součinitele ζ a dynamického tlaku $\rho w^2/2$ podle (16.0.1). U ztráty třecí, která vzniká v dlouhých rovných potrubních úsecích, se ζ dále rozvíjí seskupením součinitele tření λ , délky potrubí L a průměru D dle (16.0.2)

$$\Delta p = \zeta \frac{\rho w^2}{2} \quad (16.0.1)$$

$$\zeta = \lambda \cdot \frac{L}{D} \quad (16.0.2)$$

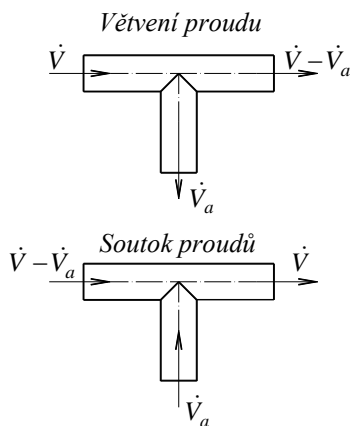
16.1 Místní ztráty

Zdrojem místních ztrát je intenzivní víření, které vzniká při náhlé změně směru proudění nebo změně velikosti rychlosti, zejména jejím náhlým snížením. K tomu dochází v kolenech, T kusech, potrubních uzlech, při náhlých rozšířeních popř. zúženích průtokového průřezu potrubí, ve ventilech, clonách, dýzách, na uklidňujících sítích či na turbulizujících mřížích a v dalších potrubních prvcích. Místní ztráty jsou tedy lokalizované na poměrně krátké úseky potrubních sítí.

K určení místních ztrátových součinitelů se používají výpočtové vzorce, tabulky, grafy, někdy jejich kombinace. Jsou samozřejmě zobecněním výsledků měření. Nejúplnější sbírkou těchto materiálů je obsáhlá kniha Idělčik: Příručka hydraulických odporů [1], která vychází po desetiletí opakovaně s doplňovanými údaji ze světových laboratoří, v jazyce ruském a anglickém. Při určování ζ je nezbytné soustředění, zvláště nutno dát pozor na to, ke které rychlosti je součinitel vztažen. Pro ilustraci uvedeme několik případů a jejich ztrátové součinitele. Jedna z největších ztrát vzniká při náhlém rozšíření průtokového průřezu a na rozdíl od ostatních se dá, jak uvidíme níže, vypočítat analyticky bez podpory experimentálních údajů.

a) Větvení proudů v T kuse

Součinitele ζ jsou uvedeny v tabulce, která platí za předpokladu, že všechny tři přípojky jsou stejně dlouhé, kruhového průřezu. Tlaková ztráta se zde vztahuje k největšímu dynamickému tlaku, tj. $\Delta p = \zeta \rho w^2/2$, kde w je rychlost spojeného proudění.

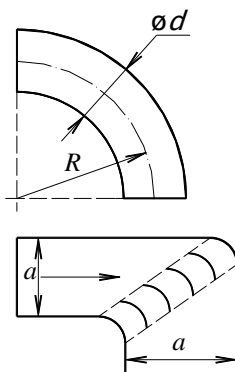


Obr. 16.1.1

\dot{V}_a/\dot{V}	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
ζ_a	0,95	0,88	0,89	0,95	1,1	1,28
ζ_d	0,04	-0,08	-0,05	0,07	0,21	0,35

ζ_d je součinitel odporu přímé větve

ζ_a je součinitel odporu kolmé větve



Obr. 16.1.2

\dot{V}_a/\dot{V}	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
ζ_a	-1,2	-0,4	0,08	0,47	0,72	0,91
ζ_d	0,04	0,17	0,3	0,41	0,51	0,6

Tab. 16.1.1

b) Ztráta v kolenu

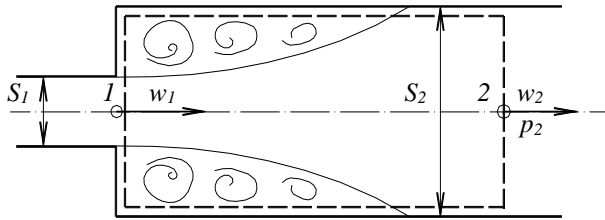
Weisbach uvádí pro pravoúhlá oblouková kolena kruhového průřezu vzorec

$$\zeta = 0,131 + 0,16 \left(\frac{d}{R} \right)^{3,5} \quad (16.1.1)$$

Pro čtvercový průřez o straně a platí:

$$\zeta = 0,124 + 3,1 \left(\frac{a}{R} \right)^{3,5} \quad (16.1.2)$$

Ztráta náhlou změnou směru v kolenu se značně zmenší vložením usměrňovacích plechů nebo lopatek podle obrázku 16.1.2. Zmírňuje se jimi odtržení proudu od vnitřní stěny.



Obr. 16.1.3

c) Ztráta náhlým rozšířením proudu

Tuto ztrátu lze, při vyhovující shodě se skutečností, vypočítat použitím věty o změně toku hybnosti (VZTH), obyčejné Bernoulliovy rovnice bez ztrát a rovnice kontinuity. Zavedeme kontrolní plochu tak, aby rozšíření proudu na zvětšený průřez proběhlo uvnitř kontrolní plochy. Postup odvození: Napiše se rovnice kontinuity pro nestlačitelné proudění a vypočte se z ní rychlost w_2 (16.1.3). Z VZTH, která respektuje

ztráty, se vypočte tlak p_2 (16.1.5) a z Bernoulliovy rovnice, jež naopak ztráty zanedbává, se určí teoretický tlak p_{2t} (16.1.7). Tlaková ztráta je dána rozdílem teoretického a skutečného tlaku na výstupu z kontrolní plochy, tj. $\Delta p = p_{2t} - p_2$ (16.1.8). Jestliže z tohoto výrazu vytkneme dynamický tlak $\rho w_1^2 / 2$, pak zbytek musí být ztrátový součinitel ζ (16.1.10).

R.K.: $S_1 w_1 = S_2 w_2 \quad \rightarrow \quad w_2 = \frac{S_1}{S_2} w_1 \quad (16.1.3)$

VZTH: $p_1 S_1 - p_2 S_2 = \rho S_1 w_1^2 - \rho S_2 w_2^2 \quad (16.1.4)$

ze (4) $p_2 = p_1 + \rho \left(\frac{S_1}{S_2} w_1^2 - w_2^2 \right) = p_1 + \rho w_1^2 \left(\frac{S_1}{S_2} - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right) \quad (16.1.5)$

B.R.: $p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} = p_{2t} + \rho \frac{w_2^2}{2} \quad (16.1.6)$

ze (6) $p_{2t} = p_1 + \frac{\rho}{2} (w_1^2 - w_2^2) = p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} \left(1 - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right) \quad (16.1.7)$

Tlak. ztráta: $\Delta p = p_{2t} - p_2 = \rho \frac{w_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 2 \left(\frac{S_1}{S_2} \right) + 2 \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right] \quad (16.1.8)$

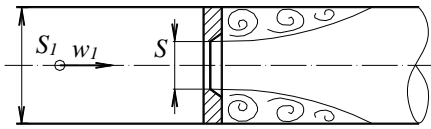
$$= \rho \frac{w_1^2}{2} \left[1 - 2 \left(\frac{S_1}{S_2} \right) + \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right] = \rho \frac{w_1^2}{2} \left[1 - \frac{S_1}{S_2} \right] = \zeta \rho \frac{w_1^2}{2} \quad (16.1.9)$$

Ztrátový součinitel: $\zeta = \left[1 - \frac{S_1}{S_2} \right]^2 \quad (16.1.10)$

b) Tlaková ztráta při průtoku clonou

Protože ve stati 12.6 bylo probráno měření průtočného množství clonou, zajímá nás trvalá tlaková ztráta, která při tom vzniká. Clona má otvor průřezu S a je vložena do válcové trubice průřezu S_1 . Tlaková ztráta je vztažena na dynamický tlak před clonou podle (16.1.11). Ztrátový součinitel ζ závisí na poměru průřezu S_0/S_1 dle tabulky 16.1.2

$$\Delta p = \zeta \rho \frac{w_1^2}{2} \quad (16.1.11)$$



Obr. 16.1.4

S_0/S_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
ζ	225	47,7	17,8	7,8	3,75	1,8	0,8	0,29	0,06	0

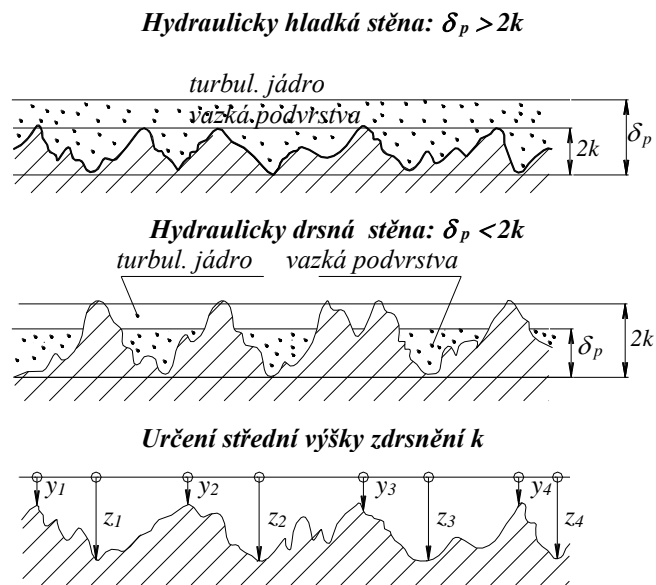
Tab. 16.1.2

16.2 Hydraulicky hladké a drsné potrubí

Je třeba vysvětlit, jaký je zásadní vliv drsnosti vnitřního povrchu potrubí na tlakovou ztrátu. Především nutno konstatovat, že u laminárního proudění nemá drsnost stěny vliv na tlakovou ztrátu. U turbulentního proudění drsnost povrchu někdy vliv má a někdy nemá. Záleží to na vzájemném poměru střední výšky zdrsnění stěny k a tloušťky vazké podvrstvy δ_p , která vždy u turbulentního proudění existuje v těsném sousedství se stěnou.

Pokud se zdrsnění nevyanořuje z vazké podvrstvy do turbulentního proudu, pak drsnost stěny nemá vliv na turbulentní odpor a ztrátu, a stěnu označujeme jako hydraulicky hladkou. Odpovídá tomu nejhořejší obrázek v obr. 16.2.1, kde $\delta_p > 2k$. Jestliže však tloušťka laminární podvrstvy δ_p je menší než dvojnásobek střední výšky zdrsnění $2k$, turbulentní odpor, jak bude dále ukázáno, se oproti předchozímu případu zvětší. Takovouto stěnu charakterizujeme jako hydraulicky drsnou, příslušný obrázek je v obr. 16.2.1 uprostřed, $\delta_p < 2k$.

Výraz R/k , kde R je vnitřní poloměr potrubí, je stupeň zdrsnění. Střední výška zdrsnění k se vyšetří ze silně zvětšeného profilu povrchu stěny, pořízeného projekčním mikroskopem. Střední výška zdrsnění je rozdíl aritmetických průměrů vzdáleností z a y deseti nejvyšších a deseti nejnižších bodů profilu od přímky vedené nad výčnělky, viz nejspodnější ze 3 obrázků 16.2.1 a vzorec (16.2.1).



Obr. 16.2.1

Znalost fyzikální podstaty hydraulické hladkosti a drsnosti nedává žádnou informaci, jak se čistě výpočtovými prostředky kvalita stěny pozná. To je uvedeno v závěru následující statě, v bodě d) o Prandtlově funkci drsnosti.

16.3 Třecí ztráty

a) Laminární proudění v potrubí

Již bylo řečeno, že třecí ztráty na rozdíl od místních se týkají dlouhých přímých potrubních úseků. Pro ně jsme v případě laminárního proudění v trubici odvodili Hagen - Poiseuilleův vztah (15.1.10), který váže průtočné množství \dot{V} se substitucí $i = -dp/dx = konst = -\Delta p/L$. Znaménko (-) u Δp říká, že se jedná o ztrátu, můžeme je vynechat a Δp vypočítat, viz (16.3.1). Pak \dot{V} vyjádříme střední rychlostí w_s , takže pro Δp dostaneme vzorec Darci - Weisbachův (16.3.2). Jestliže z něho vytkneme $(L/D)(\rho w_s^2/2)$, potom zbytek musí být součinitel tření λ laminárního proudění v potrubí.

$$\dot{V} = \frac{\pi i D^4}{128 \eta}, \quad \text{kde} \quad i = -\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{L} \quad (15.1.10)$$

$$\Delta p = \frac{128 \eta \dot{V} L}{\pi D^4}, \quad \text{kde} \quad \dot{V} = \frac{\pi D^2}{4} w_s \quad (16.3.1)$$

$$\Delta p = \frac{128 \eta \pi D^2 w_s L}{4 \pi D^4} = \frac{32 \eta w_s L}{D^2} \quad (16.3.2)$$

$$\Delta p = \frac{32 \nu \rho w_s L}{D^2} = \frac{L}{D} \rho \frac{w_s}{2} \frac{64 \nu}{w_s D} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{L}{D} \rho \frac{w_s^2}{2} = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{w_s^2}{2} \quad (16.3.3)$$

$$\text{kde} \quad \lambda = \frac{64}{Re}, \quad Re = \frac{w_s D}{\nu} \quad (16.3.4)$$

Součinitel tření λ v trubce s laminárně proudící tekutinou a vyvinutým prouděním je funkcí pouze Reynoldsova čísla. V logaritmickém diagramu na obr. 16.3.1 je závislost (16.3.4) zobrazena sestupnou přímkou L .

b) Turbulentní proudění hydraulicky hladkou trubkou

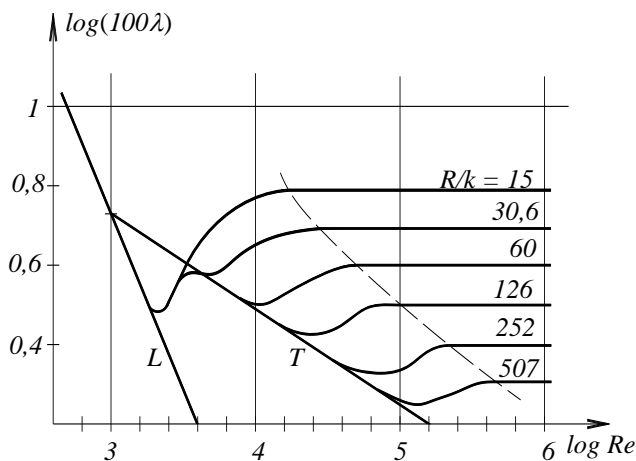
Předpokládáme, že turbulentní proudění v trubce má jednak hydraulicky hladkou stěnu a jednak je tzv. vyvinuté. To znamená, že je potrubí dostatečně dlouhé, takže počáteční úsek s rostoucími mezními vrstvami při stěnách a s odlišným odporem je zanedbatelný. Poměry jsou i tak zde podstatně složitější než při laminárním proudění, analogie jednoduchého výpočtu tlakové ztráty je nemožná, nutno vycházet z měření. Z nich pro hydraulicky hladká potrubí odvodil Blasius vztah:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad (16.3.5)$$

který platí pro $Re = w_s D / \nu = 2300$ až $8 \cdot 10^4$. Vztah je znázorněn v logaritmických souřadnicích přímkou T v diagramu na obr. 16.3.1. Existuje celá řada dalších vzorců i pro vyšší hodnoty Re . V případě potřeby je lze nalézt v Iděličkově příručce [1].

c) Turbulentní proudění hydraulicky drsnou trubkou

S průtokem tekutiny drsnými trubkami prováděl pokusy Nikuradse. Umělé drsnosti dosáhl nalepením třídičkových zrn na vnitřní povrch trubice. Výsledky podává diagram na obr. 16.3.1. Součinitel tření λ drsných potrubí závisí na stupni zdrsnění R/k a na Re čísle. Průběh λ sleduje nejprve přímkou L , což znamená, že u laminárního proudění drsnost nemá vliv na ztráty. Od této přímkou se v přechodové oblasti mezi prouděním laminárním a turbulentním oddělují jednotlivé křivky charakterizované svým stupněm zdrsnění. V turbulentní oblasti se přibližují k Blasiově přímce, udávající průběh λ při hydraulicky hladkém povrchu potrubí. Probíhají v určitém rozmezí Re čísel po této přímce (čím méně drsný povrch, tím déle se s ní ztotožňují) a pak přecházejí plynule v soustavu čar rovnoběžných s vodorovnou osou. V této oblasti tedy λ závisí na R/k a nikoliv na Re čísle. Z tohoto důvodu se oblast vpravo od čárkované čáry nazývá automodelní.



Obr. 16.3.1

d) Prandtlůva funkce drsnosti

Prandtl a Kármán dokázali, že veškerá rozvětvená Nikuradseho měření odporu hladkých i drsných potrubí lze vyjádřit jedinou rovnicí ve tvaru (16.3.6)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log \frac{R}{k} = f(\log Re^*) \quad (16.3.6)$$

kde: $Re^* = \frac{kw^*}{\nu}$ je Reynoldsovo číslo drsnosti

$$w^* = \sqrt{\tau_w / \rho} = w_s \sqrt{\lambda / 8} \quad \text{je třecí rychlost}$$

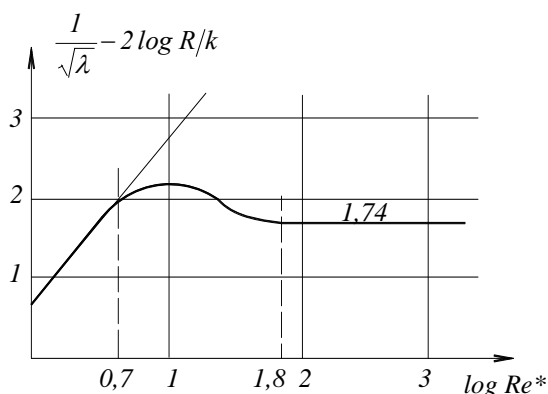
k je střední výška zdrsnění

R/k je stupeň zdrsnění

R je poloměr trubice

τ_w je smykové napětí na stěně

Vynesením Nikuradseho měření do diagramu se souřadnicovými osami $y = 1/\sqrt{\lambda} - 2 \log(R/k)$ a $x = \log Re^*$ dostaneme jedinou křivku, tzv. Prandtlovu funkci drsnosti, viz. obr. 16.3.2. Prandtlova křivka zřetelně rozlišuje hydraulicky hladké a drsné potrubí, protože se rozpadá na dvě přímky a přechodovou křivku. Šikmá přímka odpovídá hydraulicky hladkému potrubí a má rovnici:



Obr. 16.3.2

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log \frac{R}{k} = 0,8 + 2 \log Re^* \quad (16.3.7)$$

která platí do $\log Re^* < 0,7$. Vodorovná přímka přísluší hydraulicky drsným trubkám. Její rovnice je:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log \frac{R}{k} = 1,74 \quad (16.3.8)$$

a přísluší jí pásmo $\log Re^* > 1,8$. V rozmezí $\log Re^* = 0,7$ až $1,8$ je přechodová oblast, v níž výška laminární podvrstvy je přibližně stejně veliká jako výška zdrsnění. Někdy se přechodová křivka rozkládá na tři přímky, ale takovými detaily se zabývat nebudeme.

Příklad

Má se určit tlaková ztráta Δp v potrubí, u něhož známe $\dot{V} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$, $L = 1000 \text{ m}$, $\varnothing D = 0,2 \text{ m}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $k = 10^{-3} \text{ m}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

$$\dot{V} = \frac{\pi}{4} D^2 w_s \rightarrow w_s = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,2^2} = 0,191 \text{ m/s} \quad (16.3.9)$$

$$Re = \frac{w_s D}{\nu} = \frac{0,191 \cdot 0,2}{10^{-6}} = 3,82 \cdot 10^4 > 2300 \quad (16.3.10)$$

Zatím nevíme, zda stěna je hydraulicky hladká či drsná. V první aproximaci budeme předpokládat hydraulickou hladkost a Blasiovův vzorec:

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{1/4}} = \frac{0,3164}{(3,82 \cdot 10^4)^{0,25}} = 0,02263, \quad w^* = w_s \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = 0,191 \sqrt{\frac{0,02263}{8}} = 0,01016 \quad (16.3.11)$$

$$Re^* = \frac{kw^*}{\nu} = \frac{10^{-3} \cdot 0,01016}{10^{-6}} = 10,159, \quad \log Re^* = 1,007, \quad \text{z diagramu:} \quad (16.3.12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log R/k = 2,1 \rightarrow \lambda = \frac{1}{(2 \log R/k + 2,1)^2} = \frac{1}{(2 \log(0,1/10^{-3}) + 2,1)^2} = 0,0269 \quad (16.3.13)$$

V druhé aproximaci vyjdeme z právě vypočteného λ a opravíme výpočty předchozího kroku (16.3.11) až (16.3.13). Pokud se spokojíme s posledním λ , tlaková ztráta bude:

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{L}{D} \rho \frac{w_s^2}{2} = 0,0269 \frac{10^3}{0,2} 10^3 \frac{0,191^2}{2} = 2,453 \cdot 10^3 \text{ Pa} \quad (16.3.14)$$

Literatura

- [1] Idělčik: Spravočník po gidravličeskim soprotivlenijam, Gosud. ener. izd. Moskva, 1996.
 [2] Edited by Johnson R.W.: The Handbook of fluid dynamics, CRC Press London, 1998.
 [3] Noskivič J. a kol.: Mechanika tekutin, SNTL Praha, 1987.
 [4] Dvořák R., Kozel K.: Mechanická modelování v aerodynamice, Vydavatelství ČVUT Praha, 1996.
 [5] White M.F.: Fluid Mechanics, Mc Graw-Hill New York, London, 1996.
 [6] Spurk J.H.: Fluid Mechanics, Springer – Verlag Berlin, New York, 1997.
 [7] Munson B.R., Okiiski T.H.: Fundamentals of fluid mechanics, John Wiley & Sons, New York, 1998.
 [8] Brož V.: Aerodynamika nízkých rychlostí, skriptum ČVUT Praha, 1978.
 [9] Tesař V.: Mechanika tekutin pro 4-leté studijní obory, skriptum ČVUT Praha, 1986.
 [10] Linhart J.: Aeroprůžnost, skriptum ZČU Plzeň, 2001.
 [11] Drábková S., Kozubková M.: Cvičení z mechaniky tekutin, VŠB-TU Ostrava, 2002.
 [12] Janalík J., Šťáva P.: Mechanika tekutin, VŠB-TU Ostrava, 2002.
 [13] Kozubková M., Drábková S.: Numerické modelování proudění, VŠB-TU Ostrava, 2003.
 [14] Pěta M.: Mechanika tekutin - sbírka příkladů, skriptum ČVUT Praha, 2005.
 [15] Evett J.B., Cheng Liu: 2500 solved problems in fluid mechanics and hydraulics, McGraw-Hill, New York, 1988.

Značení veličin

veličina	rozměr	název
C	-	konstanta
$D, D_{x,y,z}$	m^4	deviační moment, d. mom. x-ového průmětu plochy k osám y,z
D	m	průměr
E	$N/m^2 = Pa$	Youngův modul pružnosti
F, F_V, F_H	$N = kg\ m/s^2$	síla, vertikální síla, horizontální síla
G	N	váha (mg)
G	Pa	modul pružnosti ve smyku
H	m	výška, tlaková výška, integrační konstanta
I, I_{xz}	m^4	kvadratický moment setrvačnosti, x-ového průmětu plochy k těžištní ose rovnoběžné s osou z
K	m^2/s^2	turbulentní kinetická energie
K	$kg^{-1/2}m^{3/2}$	konstanta Venturiho průtokoměru
L	m	délka
M	m^4/s	moment zřídlového propadu (dipól)
P	W	výkon
Q	J	teplo
R	m	poloměr menisku, poloměr otvoru, poloměr trubice
R	m/s^2	setrvačné zrychlení
R/k	-	poměrný stupeň zdrsnění
S	m^2	plocha, průřez
T, T_N	K	absolutní teplota, normální teplota
T	N	třecí síla
T	N	tah
$T(t)$	-	časová funkce
U	m^2/s^2	potenciál tlaku
V, V_N, \hat{V}	$m^3, Nm^3, m^3/s$	objem, normální objem, průtočný objem
$X(x)$	-	polohová funkce
a	m/s^2	zrychlení

a	m / s	rychlost zvuku
$a_1, a_2 \dots$	-	viriální součinitel ve stavové rovnici
\vec{a}	-	obecný vektor
a, b, c	-	integrační konstanty
c	m / s	absolutní rychlost
c^*	m / s	střední rychlost pohybu molekul
c_p, c_v	J / kgK	měrné tepelné kapacity při stalém tlaku a objemu
d	m	průměr
f	Hz	frekvence
g	m / s^2	gravitační zrychlení
h	m	výška, svislá vzdálenost, hloubka
i	-	hydraulický převod síly
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	-	jednotkové vektory
k	m	střední výška zdrsnění
k	Pa	modul objemové pružnosti
l	m	délka, vzdálenost
m, \dot{m}	$kg, kg / s$	hmotnost, průtočná hmotnost
\vec{n}	m	jednotkový vektor plochy
p, p_o, p_c, p_d, p_N	$Pa = N / m^2$	tlak statický, atmosferický, celkový, dynamický, normální
r	J / kgK	plynová konstanta
r	m	poloměr
t	s	čas
u	m / s	unášivá rychlost, obvodová rychlost
v	m^3 / kg	měrný objem
v_N	Nm^3 / kg	normální měrný objem
w	m / s	okamžitá rychlost, relativní rychlost
\bar{w}	m / s	v čase ustředněná rychlost turbulentního proudění
w'	m / s	fluktuační rychlosti
\vec{w}	m / s	vektor rychlosti
$w^+ = w / w^*$	-	bezrozměrná rychlost
w^*	m / s	třetí rychlost
x	m	souřadnice
y	m	souřadnice, zdvih pístu
y_{Txz}	m	vzdálenost těžiště (x-ového průmětu plochy od osy z)
y^+	-	bezrozměrná vzdálenost
z	m	souřadnice
Δ	-	diference
Δ	$1 / m^2$	Laplaceův operátor delta
$\vec{\nabla}$	-	Hamiltonův operátor nabla
Γ	m^2 / s	cirkulace
Φ	m^2 / s	potenciál rychlosti
Ψ	m^2 / s	proudová funkce
Ω	Hz	vlastní frekvence
α	rad	úhel
α	-	součinitel kontrakce
β	rad	úhel
β	$1 / K$	izochorický součinitel tlakové rozpínivosti
γ	$1 / K$	izobarický součinitel objemové roztažnosti
γ	rad	úhlová deformace
δ	rad	úhel mezi stěnou a meniskem
δ, δ_p	m	tloušťka mezní vrstvy, tloušťka vazké podvrstvy
g	m / s^2	gravitační zrychlení
ε	m^2 / N	izotermický součinitel objemové stlačitelnosti
ε	$J / kg s$	měrná disipace
ζ, ζ_a, ζ_d	-	ztrátový součinitel, kolmé větve, přímé větve
η, η_H	-	molární vazkost, účinnost, hydraulická účinnost
η, η^T	$kg / m s$	molekulární dynamická vazkost, turbulentní vazkost

$\kappa = c_p/c_v$	-	Poissonova konstanta
λ	m	vlnová délka
λ	-	součinitel tření
μ, μ_{teor}	-	průtokový součinitel, výtok. součinitel, teor. výtok. součinitel
ν	m^2/s	kinematická vazkost
π	-	Ludolfovo číslo
ρ, ρ_N	kg/m^3	hustota (měrná hmotnost), normální hustota
σ, σ_{ij}	N/m^2	napětí, tenzor napětí
σ	N/m	povrchové napětí
τ, τ_w	Pa	smykové napětí, smykové napětí na stěně
φ	rad	úhel
φ	-	obecný skalár
φ	-	rychlostní součinitel
ω	rad	úhlová rychlost

Bezrozměrná čísla:

$Eu = \Delta p/\rho w^2$	-	Eulerovo číslo
$Fr = gl/w^2$	-	Froudeho číslo
$Ga = gl^3/\nu^2$	-	Galileovo číslo
$Gr = \gamma \Delta T. gl^3/\nu^2$	-	Grashoffovo číslo
$Re = wl/\nu$	-	Reynoldsovo číslo
$Sh = fl/w$	-	Strouhalovo číslo
$Ma = w/a$	-	Machovo číslo

Indexy:

i	řádek matice, u napětí plocha na niž působí
j	sloupec matice, u napětí směr v němž působí
k, l	sčítací index, obecná souřadnice
n	normála
s	střední
w	stěna
N	normální stav
0	atmosféra
S	plocha