

# **Turbulence**

Doc. Ing. Václav Uruba, CSc

ČVUT v Praze, Fakulta strojní

2009



# Obsah

1.	Použitá označení.....	6
2.	Úvodem .....	7
3.	Úvod do studia turbulence.....	8
3.1.	Turbulence v kontextu moderní vědy.....	9
3.2.	Proudící tekutina jako dynamický systém.....	10
3.2.1.	Fraktální struktura .....	12
3.2.2.	Deterministický chaos .....	13
3.2.3.	Proces samoorganizace – koherentní struktury .....	17
3.3.	Definice turbulence .....	19
3.4.	Příklady turbulentních proudů.....	21
3.4.1.	Mřížková turbulence .....	21
3.4.2.	Volné smykové vrstvy.....	22
3.4.3.	Mezní vrstvy.....	22
3.4.4.	Úplavy .....	23
3.4.5.	Sdílení tepla.....	23
3.4.6.	Chemická turbulence.....	24
3.4.7.	Hoření.....	25
4.	Základní rovnice dynamiky tekutin.....	26
4.1.	Základní předpoklady.....	26
4.2.	Eulerův a Lagrangeův popis.....	27
4.3.	Zákony zachování .....	29
4.3.1.	Rovnice kontinuity .....	29
4.3.2.	Zachování hybnosti .....	29
4.3.3.	Navierovy-Stokesovy rovnice .....	31
4.3.3.1.	Vlastnosti N-S rovnic .....	32
4.3.3.2.	Symetrie N-S rovnic .....	33
4.3.3.3.	Rovnice pro tlak.....	34
4.3.3.4.	Formulace pro pole vířivosti.....	34
5.	Rovnice turbulentního proudění.....	36
5.1.	Reynoldsovy rovnice.....	36
5.1.1.	Reynoldsova napětí .....	37
5.1.2.	Možnosti řešení Reynoldsových rovnic .....	39
5.2.	Energetická bilance .....	40
5.2.1.	Energie středního proudu .....	41
5.2.2.	Celková energie.....	42
5.2.3.	Energie turbulence.....	43
5.2.4.	Rychlost disipace energie.....	44
5.2.5.	Střední vířivost .....	45
5.3.	Hlavní problém turbulence.....	47
5.4.	Bernoulliho rovnice.....	48
5.5.	Transport pasivního skaláru .....	49
6.	Vznik turbulence .....	50
6.1.	Reynoldsov experiment.....	50
6.2.	Teorie stability.....	51
6.2.1.	Stabilita nevazkého proudění .....	52
6.2.2.	Stabilita vazkého proudění .....	56
6.2.3.	Druhy hydrodynamické nestability .....	57
6.2.3.1.	Kelvinova-Helmholtzova nestabilita .....	57

6.2.3.2.	Rayleighova-Bénárdova nestabilita .....	59
6.2.3.3.	Taylorova-Couettova nestabilita.....	60
6.2.3.4.	Görtlerova nestabilita .....	61
6.2.3.5.	Tollmienova-Schlichtingova nestabilita .....	62
6.2.3.6.	Úplavy za tělesy.....	62
6.2.3.7.	Další nestability .....	63
6.3.	Přechod do turbulence .....	63
6.3.1.	Přirozený přechod do turbulence.....	64
6.3.2.	Zkrácený přechod do turbulence .....	66
7.	Vyvinutá turbulence .....	69
7.1.	Statistický popis turbulence .....	70
7.1.1.	Spektrální charakteristiky.....	70
7.1.1.1.	Spektrum rychlosti.....	70
7.1.1.2.	Jednorozměrné spektrum.....	71
7.1.1.3.	Energetické a disipační spektrum.....	72
7.1.2.	Taylorova hypotéza .....	72
7.1.3.	Strukturní funkce.....	73
7.2.	Měřítka turbulence .....	74
7.2.1.	Kaskáda měřítek .....	74
7.2.2.	Definice měřítek turbulence .....	74
7.2.3.	Fraktální struktura měřítek .....	76
7.3.	Kolmogorovova teorie.....	77
7.3.1.	Spektra izotropní turbulence .....	79
7.3.2.	Energetická kaskáda a inverzní energetická kaskáda.....	82
7.3.3.	Vnitřní intermitence .....	84
7.3.4.	Formulace pro strukturní funkce .....	85
7.3.5.	Turbulentní difúze .....	86
7.4.	Dynamické systémy .....	87
8.	Příklady turbulentních proudů.....	89
8.1.	Mřížková turbulence .....	89
8.2.	Smykové proudy .....	90
9.	Modelování turbulence.....	96
9.1.	Přímá numerická simulace (DNS).....	97
9.2.	Metoda simulace velkých vírů (LES).....	98
9.3.	Metody modelování Reynoldsových rovnic (RANS) .....	98
9.3.1.	Modely založené na turbulentní vazkosti.....	98
9.3.1.1.	Algebraické modely.....	99
9.3.1.2.	Modely obsahující transportní rovnice .....	99
9.3.2.	Modelování Reynoldsových napětí .....	100
10.	Fenomenologie turbulence .....	101
10.1.	Kinematika .....	101
10.2.	Víry.....	103
10.2.1.	Matematické modely vírů .....	103
10.2.2.	Biotův-Savartův zákon .....	106
10.2.3.	Interakce vírů .....	107
10.2.4.	Mechanismus generování vířivosti.....	109
10.2.5.	Další síly působící na vírové struktury .....	112
10.3.	Mechanismy samoudržování turbulentního proudění .....	113
10.3.1.	Koherentní struktury ve stěnových prouděch.....	113
10.3.2.	Vlásečnicové víry .....	113

10.3.3.	Podélné pruhy nízké rychlosti a „bursting phenomenon“ .....	116
10.4.	Dynamika koherentních struktur .....	117
10.4.1.	Vznik koherentních struktur .....	118
10.4.2.	Regenerace koherentních struktur .....	120
11.	Literatura .....	122
11.1.	Literatura doporučená pro další studium.....	122
11.2.	Použitá literatura .....	122
11.3.	Zdroje obrazových materiálů .....	123
12.	Dodatky .....	124
12.1.	Vektorový počet .....	124
12.2.	Veličiny zaváděné v teorii turbulence .....	125
12.3.	Symetrie turbulentního proudění.....	125
12.4.	Statistické nástroje.....	126
12.4.1.	Středování .....	126
12.4.2.	Charakteristiky náhodného procesu.....	127
12.4.3.	Distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti .....	127
12.4.4.	Některé typy náhodných rozdělení .....	128
12.4.5.	Statistické momenty .....	128
12.4.6.	Korelační funkce.....	129
12.4.7.	Spektra .....	130
12.4.8.	Waveletová transformace .....	132
12.4.9.	Vlastní ortogonální dekompozice .....	135
12.5.	Zákony podobnosti .....	137
12.6.	Stručná historie výzkumu turbulence .....	140

# 1. Použitá označení

Uvedeme zde pouze označení používaná ve skriptech systematicky a opakovaně. Další označení budou vysvětlena při jejich použití.

## Latinská abeceda

$D(\kappa)$	disipační spektrum
$e$	jednotkový vektor
$E(\kappa)$	energetické spektrum
$f$	podélná korelační funkce (bezrozměrná); frekvence
$g$	příčná korelační funkce (bezrozměrná)
$i$	imaginární jednotka
$k$	kinetická energie
$l$	délkové měřítko
$L$	integrální měřítko
$p$	tlak
$Re$	Reynoldsovo číslo
$s_{ij}$	tenzor rychlosti deformace
$t$	čas
$u$	vektor rychlosti
$x$	vektor polohy

## Řecká abeceda

$\gamma$	součinitel intermitence
$\delta$	Diracova funkce
$\delta_{ij}$	Kroneckerovo delta
$\varepsilon$	rychlost disipace
$\varepsilon_{ijk}$	Levi-Civitův tenzor permutace
$\eta$	Kolmogorovovo měřítko
$\theta$	Heavisideova funkce
$\kappa, \boldsymbol{\kappa}$	vlnové číslo, vektor v.č.
$\lambda$	Taylorovo mikroměřítko
$\nu$	součinitel kinematické vazkosti
$\rho$	hustota, korelační koeficient, auto-korelační funkce
$\tau$	časové měřítko
$\zeta$	enstrofie
$\omega$	vektor vířivosti

## Indexy

$i, j$	indexy tenzorů
$k, l, m$	sčítací indexy

## Další označení

$a$	skalár „a“
$\mathbf{a}$	tenzor „a“
$\bar{\cdot}$	aritmetický průměr
$\langle \cdot \rangle$	střední hodnota souboru
$'$	fluktuace
$\nabla$	Hamiltonův operátor nabla
$\frac{D}{Dt}$	substanciální derivace podle času
$\mathcal{O}(\cdot)$	řádový odhad
$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$	vektor
$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$	determinant
$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$	matice

## 2. Úvodem

Skriptum poskytuje materiál pro úvod do studia turbulence v proudících tekutinách. Předkládaný text vznikl jako pomůcka pro studenty 5. ročníku VŠ předmětu „Turbulence“ a jako doplňkový materiál při studiu předmětu „Smykové oblasti“. Jsou v něm obsaženy základní informace pro předmět „Turbulence“, který byl zařazen do doktorského studia, předpokládá se ovšem doplnění informací z dalších zdrojů, zejména z literatury, která je zde uvedena jako materiál pro další studium.

Hned v úvodu bych se chtěl vyjádřit k terminologii používané ve skriptu. Turbulence, jakož i jiné obory moderní vědy, našla svou „latinu“ v anglické terminologii. Účelem této práce není v žádném případě zavádění regionální, české terminologie. Tato snaha může ve svém důsledku, podle mého názoru, vést pouze ke zmatení čtenáře. V textu bude v místě prvního výskytu daného termínu uveden kurzívou v závorce „anglický ekvivalent“ (angl.: *English equivalent*). V případě, že neexistuje zavedený a všeobecně uznávaný český ekvivalent, potom se v textu budu držet zavedeného termínu v anglické verzi. Tímto se omlouvám všem zastáncům „čistého“ českého jazyka při publikování.



Katsushika Hokusai, Velká „turbulentní“ vlna, 1829–32

### 3. Úvod do studia turbulence

Proudění vody v řece, mraky na obloze, hořící plamen, hvězdný vesmír – to jsou některé příklady jevů, které můžeme označit jako turbulentní. Turbulence byla vždy fascinující podívanou pro člověka, a to přesto (nebo právě proto), že je těžko uchopitelná pro svou variabilitu a složitost. Již od starověku se pokoušeli myslitelé s existencí turbulence vyrovnat, tato snaha pokračuje dodnes, proces poznávání zákonů turbulence nebyl ukončen. Je doprovázen objevy s nečekanými důsledky pro různé oblasti vědy.



Obr. 3.1 – „Momentka“ vody vtékající do nádrže, Leonardo da Vinci, kolem 1500

Jedny z prvních známých poznatků o struktuře turbulence v moderní době jsou pozorování proudění tekutin Leonardem da Vincim – viz obr. 3.1. Leonardo znázornil proudění vody jako „momentku“, kdy turbulentní proudové pole je složeno z různých struktur různých velikostí. Působí tak velmi uspořádaně se složitou, zjevně zákonitou strukturou. Dalším historickým příkladem pravidelné struktury v turbulentním proudu je známá „rudá skvrna“ na Jupiteru na obr. 3.2. Jedná se vlastně o obrovskou bouři – turbulentní vír (anticyklon), trvá již nejméně 350 let (v roce 1655 byla poprvé pozorována francouzským hvězdářem Cassinim). Je to více-méně stabilní útvar, který poměrně rychle mění však svoji polohu a strukturu v čase. Existence této pravidelné struktury ve vyvinutém turbulentním proudění zaujala nejen hvězdáře, ale i odborníky v oblasti mechaniky tekutin. Inicializovala diskusi na téma struktury turbulentního proudění.



Obr. 3.2 – Rudá skvrna na Jupiteru

Poznávání turbulence nám dává každodenní zkušenost: kouř stoupající z cigarety nebo z ohně vykazuje nepravidelné chování proudícího vzduchu, který jej unáší. Vítr podléhá prudkým místním změnám směru i velikosti rychlosti, což může mít dramatické následky pro námořníky či letce. Během letu dopravním letadlem je obvykle pojem turbulence spojován s aktem připoutání se pomocí bezpečnostních pasů. Pojem „turbulence“ je také používán při popisu volných proudů – paprsků. Při proudění vody v řece má její přítomnost důležitý důsledek pro ukládání sedimentu na dno. Rychlé proudění tekutiny kolem překážky nebo třeba kolem leteckého profilu způsobuje vznik turbulence v mezní vrstvě a vytváří se také turbulentní úplav způsobující zvýšení odporové síly, kterou působí proud tekutiny na překážku (bývá vyjádřen pomocí slavného součinitele  $C_x$ ). Aby bylo dosaženo lepších aerodynamických vlastností automobilů a letadel musí tedy být turbulence potlačena. Chování většiny mořských a atmosférických proudů nemůže být přesně předpovězeno, spadají totiž do kategorie turbulentních proudů a týká se to i proudů planetárních měřítek. Turbulence malých měřítek v zemské atmosféře může představovat vážný problém při astronomických pozorováních prováděných ze zemského povrchu, je potom určující při výběru polohy observatoře. Atmosféry planet jako jsou Jupiter či Saturn, sluneční atmosféra nebo zemská vnější sféra jsou turbulentní. Galaxie mají typický tvar vírů (příklad viz obr. 3.3) podobných těm, které se vyskytují v turbulentních proudech, jako je například proudění ve směšovací vrstvě dvou proudů o různé rychlosti. Jedná se tedy o útvary vzniklé v souvislosti s turbulentními jevy. Mohli bychom jmenovat mnoho dalších podobných příkladů z aerodynamiky, hydrauliky, jaderného a chemického inženýrství, oceánologie, meteorologie, astrofyziky, kosmologie či geofyziky. Na opačném pólu spektra jsou potom kvantové víry vznikající v supratekuté kapalině, které mají rozměry vyjádřitelné v násobcích průměru atomu. Svět turbulence tedy zahrnuje celý námi pozorovaný vesmír a turbulence je typickým způsobem chování tohoto vesmíru na všech jeho stupních.



Obr. 3.3 – Spirální galaxie v souhvězdí Andromedy

### 3.1. Turbulence v kontextu moderní vědy

Moderní věda a moderní fyzika je založena na přístupu, který pro nás objevil v 17. století Isaac Newton. Vědecká metoda může být zjednodušena na aplikaci tří po sobě následujících kroků. Prvním krokem je analýza problému, která je prováděna pomocí experimentů a to buďto skutečných, fyzikálních nebo myšlenkových. Druhým krokem je syntéza, kdy se přechází od konkrétního k obecnému. Prakticky to znamená, že je vytvořen matematický model zkoumaného jevu. Třetím krokem je potom predikce, která představuje ověření matematického modelu a jeho aplikaci na konkrétní případy, které nejsou totožné s případy uvažovanými v prvním kroku (pro tyto případy musí model samozřejmě platit také).

Problematika turbulence jaksi nezapadala do konceptu vědy definovaného Newtonem, nedařilo se spolehlivě předpovídat chování objektů ve stavu turbulence. V minulosti bylo turbulentní chování často spojováno s magií a dodnes je tento problém obestřen rouškou tajemství. Tímto problémem se systematicky zabývala celá řada vynikajících vědců (stručný přehled viz dodatek) avšak prakticky všechny význačné osobnosti fyziky se tohoto nepřehlédnutelného problému alespoň letmo dotkly. O otci kvantové teorie Maxovi Planckovi se traduje, že na smrtelné posteli prohlásil, že až předstoupí před boha, bude na něj mít dvě otázky: „Proč kvanta a proč turbulence. Věřím, že na první otázku dostanu uspokojivou odpověď.“ Problém turbulence bývá nazýván posledním nevyřešeným problémem klasické fyziky.

Typickým přístupem k vytváření matematických modelů přírodních jevů je redukce počtu stupňů volnosti a linearizace. Tento přístup vede v mnoha případech k poměrně jednoduchému matematickému modelu, který je možno úspěšně analyzovat a aplikovat na konkrétní případy, často i analytickou metodou. Pronikání do hloubi fyzikálního problému se děje pomocí tzv. redukcionalizmu, kdy se objekt zkoumání, v našem případě hmota, analyzuje do nejmenších možných detailů. Pokud se toto zdaří, problém se prohlásí za vyřešený – alespoň z teoretického pohledu. Svatým grálem fyziky vyznávajícím tento redukcionalistický přístup je tzv. „teorie všeho“, kterou se myslí objevení opravdu základních elementů hmoty a prozkoumání jejich vlastností. Adepty na tuto teorii byly postupně teorie atomů, elementárních částic, kvarková teorie a v poslední době teorie strun či superstrun.

Ukazuje se však, že redukcionalizmus neřeší některé jevy, mezi které můžeme zařadit turbulenci v tekutinách. Problém je v tom, že samotná podstata turbulence je spojena se systémy s obrovským počtem stupňů volnosti, mezi kterými jsou nelineární vazby. Při zkoumání tohoto jevu musíme k tekutině přistupovat jako k systému jednoduchých prvků, jejichž vlastnosti jsou sice pro chování celku důležité, určující roli zde však hrají zákonitosti, které není možno z chování jediného prvku odvodit. Je zde však ještě hlubší příčina neúspěchu redukcionalistického přístupu, který tkví v neplatnosti tzv. „principu oddělitelnosti“ (angl.: *separability principle*), který říká, že systém lze prozkoumat tak, že prozkoumáme odděleně jeho části. Ve 30. letech minulého století byl tento princip předmětem vášnivé filosofické diskuse, zastáncem principu oddělitelnosti byl A. Einstein, oponentem byl N. Bohr. Výsledek této diskuse vyzněl ve prospěch Bohra, který tvrdil, že tento princip obecně neplatí, chování celku nelze vyjádřit jako prostý součet chování jeho součástí<sup>1</sup>.

Nezbývá než rezignovat na redukcionalistický přístup a snažit se vytvořit nový „holistický“ (z řeckého *holos* – celek) přístup, zkoumání systému jako celku. Bohužel, matematické nástroje založené na diferenciálním a integrálním počtu, které máme v současné době k dispozici, byly vytvořeny pro redukcionalistické analýzy a jejich použití při holistickém způsobu zkoumání je velmi omezené. Nehodí se pro popis takových jevů, jako je komplexita, fraktální geometrie, deterministický chaos či samoorganizace. Nové obory, které se zabývají těmito jevy (např. teorie dynamických systémů, teorie katastrof, umělá inteligence a v neposlední řadě teorie turbulence), jsou nuceny hledat jiné, vhodnější způsoby popisu stavu věcí.

### 3.2. Proudící tekutina jako dynamický systém

Z teorie dynamických systémů je známo, že mnoho skutečných spojitých systémů může být modelováno soustavou parciálních diferenciálních rovnic, které potom musí být zpravidla řešeny numericky. Takovéto dynamické systémy mají teoreticky nekonečný počet stupňů volnosti a k jejich řešení jsou vyžadovány počáteční podmínky charakterizované nekonečným počtem stavů rozmístěných v prostoru. Dynamické chování prostorově spojitých systémů může být proměnné jak v prostoru, tak v čase, mohou vznikat jak pravidelné tak chaotické struktury.

Proudění tekutin lze kvalitativně charakterizovat jako laminární nebo turbulentní. Laminární proudění je typické buďto velmi pomalým pohybem nebo vysokou hodnotou vazkosti,

<sup>1</sup> Tento závěr má některé fatální důsledky, například neplatnost determinismu v jeho klasické podobě.

částice tekutiny se pohybují uspořádaně, vzájemně po sobě kloužou ve vrstvách (*lamina* je latinsky vrstva, plátek), odtud tedy laminární. Naproti tomu turbulentní proudění (*turbulentus* je latinsky neuspořádaný) je charakterizováno rychlým pohybem nebo malým vlivem viskozity, kdy i malé poruchy v proudu nekontrolovatelně rostou a způsobují tak nepředvídatelné lokální chování tekutiny, intenzivní vířivé promíchávání v celé oblasti (exaktnější definice turbulence bude podána později).

Je určitým paradoxem, že proudění zcela nevazké tekutiny je vždy laminární, turbulence nemůže vzniknout v nevazké tekutině. Je to dáno tím, že částice tekutiny na sebe vzájemně působí pouze tlakovými silami, tečné síly jsou nulové. V takové tekutině nemůže vzniknout vířivost, která je charakteristická pro turbulentní proudění. Tato skutečnost je obsahem Thomsonovy věty o vírech, která je pro ideální nevazkou tekutinu ekvivalentní tvrzení: „byli pohyb v určitém okamžiku nevířivý, zůstane jím nadále“. Na druhou stranu, každá reálná tekutina je charakterizována nenulovou viskozitou, nevazká tekutina je pouze idealizovaným limitním případem.

Při laminárním proudění se obraz proudění v čase nemění, pokud jsou okrajové podmínky také neměnné a odhlédneme-li od mikroskopických jevů typu Brownova pohybu. Můžeme tedy tvrdit, že v tomto případě není žádný dynamický stupeň volnosti tekutinového systému aktivní. V Lagrangeovském smyslu<sup>2</sup> se každá částice tekutiny, jakkoli velká, chová dynamicky – mění svou polohu v čase a v prostoru. Díváme-li se však na systém jako na celek Eulerovským pohledem<sup>3</sup>, potom můžeme stav systému považovat za statický.

Při změně podmínek proudění, zpravidla zvýšení rychlosti, může dojít k přechodu systému do nestabilního stavu. Okrajovými podmínkami je určen nový dočasně stabilní stav systému, ke kterému jeho vývoj směřuje – atraktor. Těsně po ztrátě stability je chování systému poměrně jednoduché, existuje pouze velmi malý počet aktivních stupňů volnosti, výchylky od nestabilního rovnovážného stavu jsou malé a chování systému lze popsat s dostatečnou přesností linearizovaným modelem. Později při zvětšování výchylek dochází k uplatnění nelinearity, struktura je stále složitější a méně uspořádaná až dochází ke vzniku stavu deterministického chaosu – turbulence. V tomto stavu je počet aktivních stupňů volnosti dán charakterem poruch, které se v proudu vyskytují. Jedná se potom o „rozlehlý systém“ (angl.: *extended system*), kdy vzájemná korelace změn stavu ve dvou bodech s odlehlostí rychle klesá k nule.

Tekutinový systém ve stavu turbulence neustále v čase mění svou strukturu. Přesto pro popis turbulentního proudění existují statické modely, které využívají statistického popisu pomocí statistických momentů. Jedná se o modely založené na Reynoldsových rovnicích, v literatuře jsou označovány jako RANS<sup>4</sup> modely.

Obecně, studium dynamických systémů se zpravidla provádí ve fázovém prostoru, jeho dimenze je dána počtem stupňů volnosti, respektive počtem nezávisle proměnných veličin, které dokonale popisují stav systému. Každý bod ve fázovém prostoru potom představuje určitý dynamický stav systému.

Základní charakteristikou dynamického systému je atraktor. Jedná se o fázový portrét stavu, ke kterému je systém „přitahován“ (odtud název) při počátečních podmínkách ležících v jisté oblasti fázového prostoru. Vývoj systému v čase směřuje k tomuto stavu a po dostatečně dlouhé době se k němu neomezeně přiblíží. Z klasické teorie dynamických systémů jsme zvyklí na dva typy atraktorů. Může se jednat jednak o jediný bod ve fázovém prostoru, potom systém směřuje k určitému statickému, v čase neměnnému rovnovážnému stavu. Druhou možností je tzv. mezní cyklus. Jedná se o uzavřenou křivku ve fázovém prostoru, která charakterizuje periodickou změnu stavu systému. Existuje však ještě třetí možnost, totiž vznik tzv. „podivného atraktoru“ (angl.: *strange attractor*), který je typický pro stav systému nazývaný „deterministický chaos“ (angl.: *deterministic chaos*). Tento stav je typický pro turbu-

---

<sup>2</sup> Lagrangeův přístup sleduje chování modelových částic tekutiny. (viz kap. 4.2)

<sup>3</sup> Eulerův přístup je reprezentován popisem systému v pevně daném bodě v prostoru. (viz kap. 4.2)

<sup>4</sup> Reynolds Averaged Navier-Stokes (equations) – viz oddíl 9

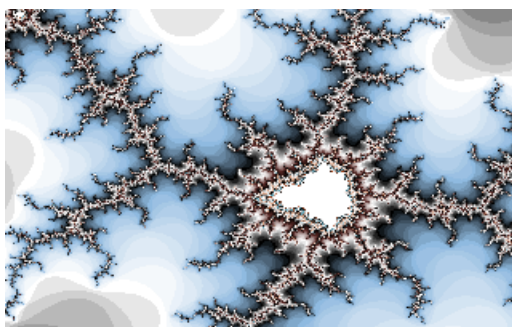
lentní chování tekutiny a má klíčový význam pro studium tekutinových systémů. Pojem deterministický chaos podrobně vysvětlíme v dalších kapitolách.

„Bifurkační bod“ (angl.: *bifurcation point*) charakterizuje stav systému na mezi stability jisté struktury. Další vývoj systému může pokračovat podle více scénářů, mohou být dva nebo více, může jich být i nekonečně mnoho. Výběr konkrétního scénáře závisí na nepatrných událostech typu Brownova pohybu, z hlediska antropomorfních měřítek<sup>5</sup> nezbyvá, než tento proces považovat za náhodný, kdy pravděpodobnost realizace jednotlivých scénářů je nenulová, je však menší než 1. Na konci každého scénáře je nový stabilní stav systému nebo další bifurkační bod.

### 3.2.1. Fraktální struktura

Dimenze geometrického objektu je obvykle definována jako počet nezávislých směrů pohybu bodu v jeho rámci. V tomto případě se nazývá topologickou dimenzí  $d_T$  a je to vždy přirozené (tj. kladné, celé) číslo. Může být rovna nebo menší než je dimenze prostoru  $d$ , ve kterém se objekt nachází. Ačkoli hladká čára i náhodná trajektorie mají stejnou topologickou dimenzi  $d_T = 1$ , mají velmi odlišné vlastnosti, protože náhodná trajektorie může zcela nebo částečně zaplnit určitý dvourozměrný či třírozměrný podprostor. Proto se zavádí fraktální dimenze geometrického objektu  $d_F$ .

Benoit Mandelbrot roku 1975 definoval „fraktál“ (angl.: *fractal*, pochází z latinského *fractus* – rozbitý) jako množinu, jejíž fraktální dimenze je větší než dimenze topologická a je vyjádřitelná necelým číslem. Lze jej také definovat poněkud jednodušeji a méně obecně jako geometrický objekt, který má následující vlastnosti: je soběpodobný – znamená to, že pokud daný útvar pozorujeme v jakémkoliv měřítku či rozlišení, pozorujeme stále opakující se určitý charakteristický tvar; a dále má na první pohled velmi složitou strukturu, může být však vygenerován opakovaným použitím jednoduchých pravidel (rekurence). Fraktály jsou nejsložitější geometrické objekty, které současná matematika zkoumá, mají však často překvapivě jednoduchou matematickou strukturu. Příklad „umělého“ fraktálu je na obr. 3.4.



Obr. 3.4 – Příklad Mandelbrotovy množiny (fraktálu)

Fraktální struktura je typická pro veškeré přírodní objekty, u nichž se uplatňuje nelineární chování v kombinaci s velkým počtem stupňů volnosti. Přírodní fraktály v sobě obsahují prvek náhodnosti, který se týká výskytu opakujících se struktur na jednotlivých úrovních, tím se významně zvyšuje počet stupňů volnosti takového objektu. Typickým příkladem může být proudící tekutina. Příklad přírodní fraktální struktury je na obr. 3.5.

<sup>5</sup> Pojem „antropomorfní“ představuje pohled očima člověka, který je svými smysly schopen vnímat pouze jevy, jejichž prostorové a časové měřítko se příliš neliší od měřítek lidského těla a pochodů v něm probíhajících. Je-li tedy velikost člověka řádově metr, potom antropomorfní měřítka mohou být charakterizována rozdílem např. o 5 řádů, tedy  $10^{-5}$  m až  $10^5$  m, v časové oblasti možná od  $10^{-1}$  s po  $10^9$  s.



Obr. 3.5 – Mraky

Platónský svět jednoduchých geometrických útvarů (typu koule, kvádr, mnohostěn,...) popisovaný v klasických učebnicích mechaniky vznikl díky linearizovaným matematickým modelům, tak i poměrně složité systémy mohou vykazovat jen velmi nízký počet aktivních stupňů volnosti. My však žijeme v nelineárním světě fraktální geometrie.

Pro zkoumání a analýzu fraktálních objektů zpravidla nelze použít metody vyvinuté pro jednoduché objekty. Takové charakteristiky jako délka čáry či obsah plochy nemají u fraktálů praktický význam, významnou informací je však fraktální dimenze. Dále je zřejmé, že na fraktály, které vykazují fraktální strukturu pro libovolně malé detaily, nelze uplatnit metody využívající diferenciální počet, protože u nich není definována derivace.

### 3.2.2. Deterministický chaos

Pod pojmem „chaos“ se všeobecně rozumí takové chování, které je projevem absolutní a čisté náhody, není v něm místo pro působení zákonitostí. Takovéto chování by bylo možno nazvat absolutně nekoherentní, kdy neexistují zákonité vazby mezi sousedními stavy (jak v prostoru, tak v čase). Chaotické chování skutečných systémů v přírodě však spíše charakterizuje termín „deterministický chaos“. Jedná se o proces samoorganizace složitých systémů, kdy vznikají soustavy koherentních struktur chovajících se v souladu s přírodními zákony. Z hlediska jedné určité struktury má vývoj systému prvky náhodnosti, systém jako celek se však vyvíjí zcela zákonitě a tedy deterministicky. Tento jev lze nalézt v přírodních systémech všech možných forem – od fyzikálních, chemických (např. chemické reakce), tak i v biologických systémech (např. chování kolonie mravenců).

Typickým příkladem relativně dobře prozkoumaného systému chovajícího se podle zákonů deterministického chaosu je turbulentní proudění. Struktura vyvinutého turbulentního proudění je charakterizována vírovými koherentními strukturami, jejichž velikost je dána jistými zákonitostmi, okamžitá poloha a orientace konkrétního víru v prostoru je však náhodná. Matematický model proudící tekutiny je znám, jedná se o Navierovy-Stokesovy rovnice. V každém případě se jedná o deterministický matematický model. Ukazuje se však, že za určitých podmínek může dojít k extrémnímu zesilování poruch určitého charakteru v proudovém poli. Systém tedy funguje jako filtr, který některé poruchy potlačuje, jiné zesiluje. Tento proces, který je zpočátku lineární, vede po určitém čase, kdy dojde k zesílení poruch nad jistou mez, k masivnímu uplatnění nelinearity a k přechodu systému do chaotického stavu.

Toto je obecná vlastnost dynamických systémů popsaných nelineárním matematickým modelem. Zatímco u lineárních systémů je odezva úměrná podnětu, aspoň co se amplitudy týče, u nelineárních systémů citlivost kolísá v závislosti na podmínkách a na charakteru poruch. Při extrémním zvýšení citlivosti k poruchám jistého typu se jedná o problém stability systému, kdy se mění kvalita jeho chování a ten přechází do chaotického stavu. Chaotické chování je charakterizováno situací, kdy velmi malé, prakticky neměřitelné podněty vyvolávají velké změny v chování systému. Pokud tyto podněty nejsme schopni indikovat, pak se jeví chování bez zjevné příčiny – chaotické. Při chaotickém chování systému roste řádově jeho komplexita (počet aktivních stupňů volnosti).

Ukazuje se, že lineární systémy jsou pouhou idealizací a ve skutečnosti žádný reálný systém nelze dokonale popsat lineárním matematickým modelem. Lineární model může pro skutečný systém platit s dostatečnou přesností pouze pro malé výchylky od výchozího stavu, vždy však existuje jistá mez, nad kterou je chování systému nelineární. Většina systémů je však silně nelineárních, linearizovaný model pro takové systémy platí pouze pro infinitesimálně malé výchylky. Všechny dynamické systémy vyskytující se v přírodě jsou ve své podstatě nelineární a za určitých podmínek může být jejich chování charakterizováno jako deterministický chaos. Proto je chaotické chování v přírodě tak časté.

Důvodem, proč chaotické chování dynamických systémů bylo tak dlouho mimo zorné pole vědců je fakt, že je nelze modelovat pomocí jednoduchého lineárního matematického modelu, který byl v minulosti z důvodu jednoduchosti prakticky výhradně používán pro studium dynamických systémů.

Proudící tekutina je poměrně složitý spojitý dynamický systém, s velkou variabilitou okrajových podmínek, lze jej charakterizovat velmi vysokým počtem stupňů volnosti. Studium vlastností takového systému je obecně technicky velmi obtížné, ani dnešními prostředky výpočetní techniky nelze zvládnout simulaci byť velmi jednoduchých případů turbulentního proudění z technické praxe<sup>6</sup>. Proto budeme demonstrovat chaotické chování dynamických systémů na případě daleko jednodušším s malým počtem stupňů volnosti. Základní mechanismus vzniku chaosu je společný všem dynamickým systémům bez ohledu na jejich složitost. Vybereme příklad, který vlastně odstartoval éru systematického studia chaosu. Jedná se o tzv. Lorenzův systém.

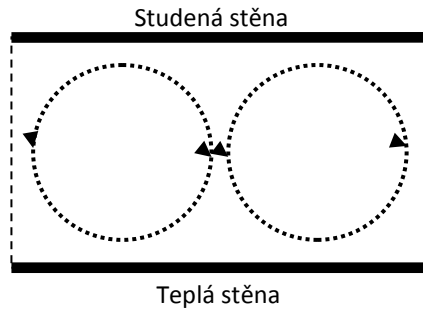
Edward Lorenz působil začátkem 60. let minulého století na Massachusetts Institute of Technology, kde vytvořil jednoduchý matematický model zemské atmosféry, na kterém se pokoušel studovat počasí, konkrétně vynucenou konvekci v atmosféře. K simulacím použil z dnešního pohledu primitivní, ve své době však špičkový číslicový počítač. Jednalo se o počítač Royal-McBee LGP-30 s 16kB paměti, který vypočetl 60 násobení za sekundu. Jeho výpočty byly s přesností na 6 platných číslic. Lorenc provedl zaokrouhlení počáteční podmínky na 3 platné číslice a očekával, že toto zaokrouhlení nebude mít podstatný vliv na výsledky, přitom narazil na nestabilní chování matematického modelu. Postupně zjednodušil svůj matematický model, který měl původně 12 dimenzí, až na známý třírozměrný Lorenzův systém z roku 1963:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \text{Ra}(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + \text{Pr}x - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Tento matematický model zachycuje základní vlastnosti konvektivního proudění v atmosféře, která je zahřívána povrchem ze spodu a ochlazována svrchu. Vzniká tak rotační pohyb částic vzduchu, kdy ohřátá částice stoupá, tím se ochlazuje a začne klesat, aby se opět zahřála a stoupala. Tento jev je známý jako Rayleighova-Bénárdova nestabilita (více o ní bude v kapitole o nestabilitách). Okrajové podmínky jsou poněkud idealizovány: proudění v horní oblasti je uvažováno bez smykového napětí místo realističtější podmínky stejných rychlostí, v příčném směru je uvažována periodická okrajová podmínka místo omezení stěnami a celý případ je modelován jako rovinný místo prostorového. Schéma tohoto modelu je na obr. 3.6, jedná se o tzv. Rayleighovu-Bénárdovu buňku, která se periodicky opakuje v příčném směru.

---

<sup>6</sup> Máme zde na mysli metodu „přímé numerické simulace“, turbulentní proudění se v technické praxi obvykle řeší pomocí modelů turbulence. Detaily viz oddíl 9.



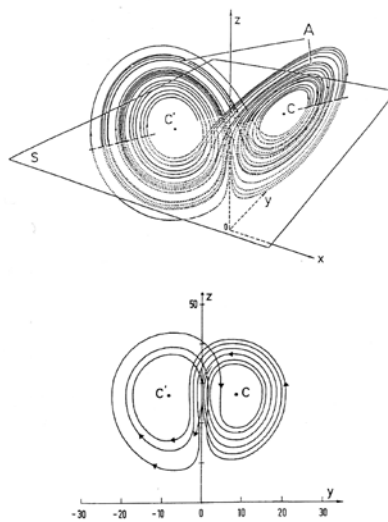
Obr. 3.6 – Schéma Lorenzova systému – Rayleighova-Bénárdova buňka

Proměnné  $x$ ,  $y$  a  $z$  v rovnici (3.1) nejsou souřadnicemi v prostoru, jejich fyzikální význam je poněkud abstraktní. Proměnná  $x$  představuje rychlost rotace pohybu částice, kladná hodnota je ve směru hodinových ručiček. Proměnná  $y$  je potom rozdíl teplot stoupající a klesající tekutiny. Proměnná  $z$  charakterizuje odchylku svislého profilu teploty od lineárního průběhu. Parametr  $Ra$  je Rayleighovo číslo a  $Pr$  potom číslo Prandtlovo, konečně parametr  $b$  představuje štíhlost válce tekutiny při konvekci, tedy poměr jeho délky a průměru.

Z matematického hlediska má systém rovnic (3.1) následující vlastnosti:

- Rovnice jsou autonomní, to znamená, že jejich pravá strana explicitně neobsahuje čas, koeficienty jsou konstantní;
- Obsahují pouze první časové derivace. Důsledkem tohoto, spolu s uvážením autonomie systému, je fakt, že jeho vývoj závisí pouze na okamžitých hodnotách proměnných  $(x, y, z)$  a nikoli na jejich historii;
- Rovnice jsou nelineární, viz členy  $xz$  a  $xy$  ve druhé a třetí rovnici;
- Systém je disipativní. Tento závěr plyne z přítomnosti diagonálních částí soustavy rovnic, které odpovídají ustalujícímu se řešení;
- Řešení soustavy rovnic je omezené v prostoru proměnných.

Lorenz prováděl matematickou simulaci systému, jednalo se vlastně o numerickou integraci rovnic v čase pro různé hodnoty parametrů a pro různé počáteční hodnoty proměnných. Pro hodnoty parametru  $Pr \leq 1$  řešení spěje k ustálené hodnotě  $x = y = z = 0$ , kdy veškerá konvekce zaniká.

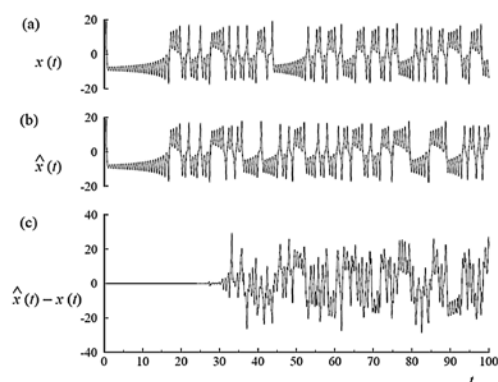


Obr. 3.7 – Lorenzův podivný atraktor

Obvyklé parametry pro atmosférické podmínky  $Ra = 10$ ,  $Pr = 28$  a  $b = 8/3$  způsobují chaotické chování systému, kdy se směr rotace náhodně mění. Dynamické systémy jsou charakterizovány limitním stavem – atraktorem, který nastává po určitém přechodovém čase, který závisí na počátečních podmínkách. Tento limitní, konečný stav může být zobrazen ve fázovém prostoru buďto jako bod – konečný stav klidu, ke kterému systém spěje nebo jako limitní cyklus – uzavřená křivka, který odpovídá periodickému pohybu. Atraktor příslušející Lorenzovu systému za určitých podmínek vybočuje z tohoto konceptu, nedojde k jeho ustálení ani po velmi dlouhém čase, vzniká nekonvergující křivka. Tento atraktor je pro omezený časový interval znázorněn na obr. 3.7. Je prvním z tzv. „podivných atraktorů“ (angl.: *strange attractors*) charakterizujících chaotické chování dynamického systému, který byl podroben zevrubnému systematickému zkoumání. Má některé vsutku podivné vlastnosti:

- Je tvořen spojitou křivkou v prostoru, která obecně začíná v jistém počátečním bodě, může však mít nekonečně velkou délku. Přitom vyplňuje jistý přesně vymezený podprostor ve fázovém prostoru, ze kterého nikdy nevybíhá;
- Nikdy neprotíná sám sebe, nekříží se, ani se neopakuje<sup>7</sup>;
- Má vlastnost fraktálů, tj. jeho struktura je podobná na různých měřítkách;
- Jeho průběh v prostoru je náhodný, chaotický, nepředpověditelný.
- Ukazuje se, že kritická hodnota parametru  $Ra$  při výše uvedených hodnotách parametrů  $Pr$  a  $b$  je rovna asi 24,74, pro hodnoty nižší směřuje vývoj systému do jediného bodu ve fázovém prostoru, pro hodnoty vyšší dostáváme nekonečný pohyb s prvky chaosu.

Motýlí atraktor se skládá ze dvou větví, jedna je charakterizována kladnou hodnotou  $x$ , druhá potom zápornou a představuje rotaci válců v jednom či druhém smyslu. Mezi oběma větvemi dochází k nepravidelným přeskokům. Tento atraktor se stal symbolem prvních průkopníků při zkoumání chaosu a jeho podobnost s motýlími křídly inspirovala Lorenze při jedné přednášce v roce 1972, kdy hovořil na téma předpověditelnosti počasí. Tehdy s nadsázkou prohlásil: „Pohyb křídel motýla kdesi v Brazílském pralese může způsobit vznik tornáda v Texasu.“



Obr. 3.8 – Časový průběh proměnné  $x$  při simulaci Lorenzova systému

Na obr. 3.8 je ukázán výsledek simulace pro různé okrajové podmínky. Obr. 3.8 (a) představuje simulaci průběhu proměnné  $x$  v čase  $t$  provedenou pro počáteční podmínky  $[x(0), y(0), z(0)] = [0, 1; 0, 1; 0, 1]$ . Na obr. 3.8 (b) je potom simulace pro nepatrně změněné počáteční podmínky, proměnné označeny stříškou  $[\hat{x}(0), \hat{y}(0), \hat{z}(0)]$  a jejich hodnoty jsou

<sup>7</sup> H. Poincaré teoreticky odvodil teorém, který říká, že stav nelineárního systému se musí po určité době opakovat. Později se ukázalo, že perioda opakování daného stavu je u běžných nelineárních systémů extrémně velká blížíci se nekonečnu.

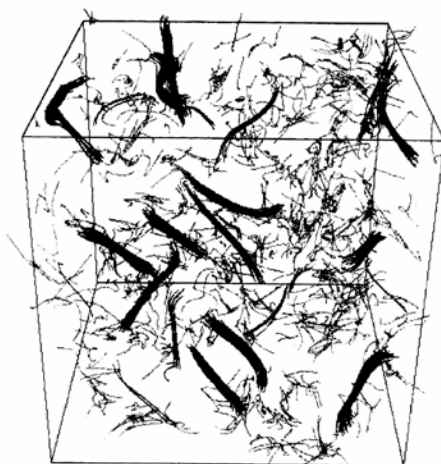
$[0,100001;0,1;0,1]$ . Počáteční hodnota  $\hat{x}(0)$  byla tedy změněna o jednu tisícinu procenta, což je hodnota, kterou nejsme schopni rozlišit při žádném reálném makroskopickém experimentu. Z grafu je zřejmé, že časový průběh souřadnice  $x$  je pro oba případy prakticky stejný až do času asi 30, dále se potom oba případy vyvíjejí zcela odlišným způsobem. Toto je zvláště zřetelně vidět na grafu obr. 3.8 (c), kde je znázorněn rozdíl proměnných  $\hat{x}(t) - x(t)$  pro oba případy počátečních podmínek. Vidíme, že hodnota  $x$  přeskakuje z kladných hodnot do záporných a naopak, tomu odpovídá pohyb po dvou větvích motýlího atraktoru. Přeskok z jedné větve na druhou je právě tím kritickým jevem, který určuje další vývoj systému. Ukazuje se, že přeskok je výsledkem nestabilního chování systému vznikající v souvislosti s jeho nelineární podstatou a jeho výskyt v jisté konfiguraci systému je výsledkem vlivu nesmírně malých poruch. Tyto poruchy mohou mít svůj původ v nepřesně definovaných parametrech úlohy, jejich počátečních či okrajových podmínkách nebo v případě matematické simulace v jakkoli malých zaokrouhlovacích chybách výpočetního systému.

Kvalitativně podobným způsobem se chovají i jiné nelineární systémy, např. turbulentní proudění vazké tekutiny. Stav proudící tekutiny lze z hlediska stability řešení charakterizovat bezrozměrnou střední rychlostí proudění tzv. Reynoldsovým číslem. Pro Reynoldsova čísla vyšší než je kritická hodnota nastává chaotické chování proudící tekutiny, říkáme, že nastává přechod z laminárního stavu proudění do turbulentního. Výsledné chaotické chování a vývoj takového složitěho systému je však podstatně komplexnější a složitější než u jednoduchého Lorenzova systému. Dochází totiž ke vzniku chaosu v různých místech v různých časových okamžicích. Výsledné koherentní struktury se potom bouřlivě vyvíjejí a interagují navzájem.

### 3.2.3. Proces samoorganizace – koherentní struktury

Proces samoorganizace rozlehlého dynamického systému může probíhat za předpokladu, že se tento nachází dostatečně daleko od rovnovážného stavu. Ilya Prigogin ukázal proces, který vede ke vzniku koherentních (podle Prigogina „disipativních“) struktur. Tento proces úzce souvisí s takovými pojmy, jako je stabilita, nevratnost a šipka času. Za tuto myšlenku o spontánní přeměně „nepořádku“ v „pořádek“ mu byla roku 1977 udělena Nobelova cena.

Spontánní vznik koherentních struktur při proudění tekutin byl prokázán jak experimentálně, tak teoreticky a byl potvrzen také pomocí matematické simulace. Na obr. 3.9 je ukázán výsledek přímé numerické simulace proudění tekutiny, kdy byly zadány počáteční podmínky stavu proudového pole s náhodnými fluktuacemi. Po určité době došlo ke spontánnímu vzniku vírových struktur (na obrázku jsou znázorněny vírovými čarami). Tento obrázek byl nazván „bedna červů“ (angl.: *box of worms*).



Obr. 3.9 – Spontánně vzniklé víry v proudící tekutině („bedna červů“)

Existence vysoce organizovaných a uspořádaných struktur v turbulentním proudu je dnes již všeobecně akceptovaným faktem. Tyto struktury jsou součástí turbulence samé a co víc, jsou jejími základními stavebními kameny. Chování a parametry těchto struktur jsou obecně nepředpověditelné ve smyslu deterministického chaosu, každá jednotlivě však vykazuje významnou prostorovou koherenci – uspořádanost. Je omylem spojovat nepředpověditelnost s prostorovou neuspořádaností, při té totiž nelze očekávat existenci dobře definovaných prostorových struktur. Pokud se podíváme na nějaký okamžitý stav turbulentního pole, vidíme soustavu turbulentních vírových struktur, které jsou nepředpověditelné, co se týče jejich fáze (tedy polohy a orientace v prostoru), udržují si však svůj geometrický tvar během doby značně delší, než je typická doba ztráty předpověditelného chování. Za těchto podmínek lze k analýze takového proudového pole s úspěchem aplikovat klasický pravděpodobnostní přístup.

Nyní již není obtížná představa turbulence jako synonyma pro pořádek, pokud pořádek chápeme jako existenci v prostoru organizovaných, tedy koherentních struktur. Tradičně byl pojem turbulence často ztotožňován s nepořádkem a chaosem, laminární proudění bylo synonymem uspořádaného pohybu. Podíváme-li se na tento problém z makroskopického hlediska – antropomorfních měřítek, potom se skutečně turbulentní pohyb může jevit jako náhodný, zvláště pokud vezmeme v úvahu velmi rychlý, dynamický vývoj proudového pole. V mikroskopickém měřítku je tomu však právě naopak – chaotickým se jeví pohyb laminární a turbulence je vysoce organizovaná. Vírové struktury obsažené v turbulenci odpovídají řízenému synchronizovanému pohybu obrovského množství molekul. Při tomto pohledu je přechod laminárního proudění k turbulentnímu procesem samouspořádávání proudící tekutiny.

Koherentní struktury hrají klíčovou roli v procesu míšení, stability, generování hluku atd. Při přechodu z laminárního stavu proudění do turbulence je nestabilita charakterizována určitou frekvencí, kterou lze předpovědět nebo při umělém periodickém buzení koherentní struktury poměrně snadno sledovat a analyzovat. Naproti tomu ve vyvinutých turbulentních proudech, kde jsou tyto struktury ukryty v chaotickém procesu, je jejich detekce velmi komplikovaným problémem. Analogovými metodami zpracování signálu je tato úloha prakticky neřešitelná, proto je systematický výzkum koherentních struktur úzce spojen s rozvojem digitální techniky sběru dat a zpracování signálů.

Identifikace koherentních struktur v chaotickém turbulentním proudovém poli je obecně velmi komplikovaná úloha, která vyžaduje jednak potřebný soubor experimentálních dat, dále potom aplikaci speciálních metod pro zpracování signálů. Metod identifikace koherentních struktur existuje velké množství, některé jsou velmi univerzální, jiné jsou specializované na určitý typ koherentních struktur. Obtížnost identifikace koherentních struktur souvisí se skutečností, že sama definice koherentních struktur není jednoznačná a dostatečně univerzální, taková, aby pokryla všechny variace.

Obecně se „koherentní strukturou“ (angl.: *coherent structure*) myslí oblast v proudící tekutině, která vykazuje nezanedbatelnou koherenci, tedy vzájemnou souvislost pohybů částic tekutiny v ní obsažených. Tato definice je však příliš obecná a není možno ji přímo použít pro účely identifikace koherentních struktur. Exaktní definice koherentních struktur v turbulentním proudění není ustálena ani ve stále se rozrůstající komunitě lidí, kteří se problémem výzkumu těchto struktur v posledním období intenzivně zabývají. Některé definice se zaměřují pouze na vírové struktury, uvažují tedy jen „koherentní víry“ (angl.: *coherent vortex*). Víry jsou totiž obecně jedněmi z nejstabilnějších struktur v proudící tekutině, jsou tedy typickými koherentními strukturami. V každém případě se předpokládá jistá míra organizovanosti, která přetrvává po určitou dobu bez kvalitativních změn. Některé definice jsou založeny na energetickém principu, jiné se drží geometrického popisu.

Pokud se pokusíme shrnout některé společné znaky definic koherentního víru, které jsou uváděny v literatuře, potom můžeme říci, že koherentní vír je zřejmě oblast v proudící tekutině, která:

- Obsahuje dostatečně koncentrovanou vířivost takovou, že dráhy částic tekutiny vytvářejí v její blízkosti uzavřené křivky;
- Představuje oblast s významným obsahem kinetické energie;
- Během „doby života“, která je delší než jedna otáčka víru, si udržuje charakteristický tvar;
- Je charakterizována nepředpověditelným proudovým polem.

Koherentní víry mohou mít i relativně pravidelný, téměř periodický charakter. Může se jednat např. o vírové struktury vznikající v souvislosti s hydrodynamickou nestabilitou ve smykové vrstvě. Říkáme, že tyto víry jsou pseudoperiodické.

Naproti tomu koherentní struktura je představována oblastí v proudící tekutině, která v daném čase vykazuje určitý stupeň organizovanosti vzhledem k nějaké veličině charakterizující proudění (rychlost, vířivost, tlak, hustota, teplota, apod.). Tato definice je mnohem širší než u koherentního víru, je zřejmé, že každý koherentní vír je zároveň koherentní strukturou, opačné tvrzení ovšem neplatí.

Typickými příklady koherentních vírů jsou víry vznikající při Kelvinově-Helmholtzově nestabilitě, Kármánovy víry v úplavu špatně obtékaného tělesa nebo vlásečnicové víry vznikající v laminární mezní vrstvě při ztrátě lineární stability nebo při procesu regenerace. Naopak koherentními víry nejsou například „pruhy“ (angl.: *streaks*) vznikající v turbulentní a přechodové mezní vrstvě, ty souvisí s výskytem oblastí zpomalené a zrychlené tekutiny a nikoli s koncentrací vířivosti. Koherentními víry ve smyslu definovaném výše také nejsou různé stacionární vírové struktury, jako „startovací“ víry vznikající za konci křidel, neboť jejich chování je předpověditelné. Dalším příkladem nevírové koherentní struktury může být tzv. „bursting phenomenon“ (neexistuje ustálený český ekvivalent), což je základní mechanismus generování Reynoldsových napětí v turbulentní mezní vrstvě. Jedná se v podstatě o synchronizovanou dvojici událostí, nejprve dojde k „proniknutí“ (angl.: *sweep*) tekutiny z vnější oblasti směrem ke stěně, následně v důsledku zachování hmoty dojde k fázi „vypuzení“ (angl.: *ejection*) pomalé tekutiny směrem od stěny. Podrobněji bude tento jev popsán v kapitole 10.

### 3.3. Definice turbulence

Přes všechno, co bylo řečeno o turbulenci výše (anebo právě proto) je její definice obtížná. Můžeme například říci, že turbulentní proudění je takové proudění, které je „neuspořádané“ v čase a prostoru. Toto ovšem samozřejmě není přesná matematická definice. Proudění, které nazýváme „turbulentní“, mohou mít dosti odlišné vlastnosti, mohou být prostorové či téměř rovinné, mohou obsahovat výrazně organizované, téměř pravidelné struktury. Společnou nutnou vlastností je, že tyto proudění jsou schopny míšení a přenosu hmoty podstatně rychleji než v případě, kdy se uplatní pouze molekulární transportní mechanismy. Tato vlastnost je považována za nejdůležitější pro její praktické aplikace, např. v inženýrských aplikacích je sledován koeficient turbulentního přenosu tepla nebo turbulentní odporová síla, která souvisí s turbulentním přenosem hybnosti.

To, co považujeme za turbulenci, je proto lépe vyjádřit jako seznam vlastností, atributů, pomocí kterých můžeme identifikovat turbulentní proudění:

1. **Náhodnost:** Turbulentní proudění je nepředvídatelné v tom smyslu, že malé náhodné poruchy v daném počátečním čase jsou zesilovány do té míry, až se po určité době stává deterministická předpověď dalšího vývoje nemožná. Tento fakt se může zdát v rozporu s faktem, že turbulentní proudění je s velkou přesností popsáno Navierovými-Stokesovými rovnicemi, které jsou zřejmě deterministické povahy. Vlivem jejich nelineárnosti může za jistých okolností nastat situace, kdy jsou poruchy určitého typu velmi silně zesilovány v čase. Tyto poruchy mohou souviset s nepřesností zadání počátečních podmínek anebo s Brownovým pohybem částic tekutiny, který není rovnicemi modelován, protože tekutina je zde považována za kontinuum. Důsledkem těchto faktů je nepředpověditelné chování konkrétního turbulentního proudění. Ovšem ve statistickém smyslu lze vývoj turbulence považovat za předpověditelný, jedná se tedy o tzv. deterministický chaos.

2. **Difuzivita:** Dochází k promíchávání transportovaných skalárních veličin podstatně rychleji než při molekulární difúzi. Tato vlastnost má zřejmě důležité praktické důsledky – turbulence je charakterizována zvýšeným míšením tekutiny. Intenzita tohoto míšení může být o několik řádů vyšší než míšení vzniklé vlivem molekulární difúze. Můžeme odhadnout, že součinitel molekulární difúze tekutin je v technických aplikacích minimálně o dva řády menší než typická hodnota součinitele turbulentní difúze, v případě planetárních proudů (atmosférické jevy či proudění v oceánech) může být tento rozdíl ještě podstatně větší – typicky 7 řádů!

3. **Vířivost:** Turbulentní proudění je charakterizováno vysokými lokálními hodnotami vířivosti související s přítomností vírových struktur. Pole vířivosti je obecně nehomogenní a mění se dynamicky v čase. Vírové struktury bývají nazývány koherentními víry či obecněji koherentními strukturami.

4. **Spektrum měřítek:** Vírové struktury, které vznikají spontánně v turbulentním proudovém poli, jsou charakterizovány širokou škálou délkových měřítek. Jejich velikost je shora omezena rozměry smykových oblastí, ve kterých vznikly a zdola potom velikostí vírů podléhajících disipaci v přímé souvislosti s vazkostí tekutiny. Spektrum měřítek koherentních struktur v turbulentním proudu je tedy spojitě, což je typické pro fraktály. S tím souvisí skutečnost, že turbulentní proudové pole může být charakterizováno jako dynamický systém s „velmi vysokým“ počtem stupňů volnosti.

5. **Prostorovost:** Vírové struktury se vyskytují v prostoru turbulentního proudového pole v náhodných místech a s náhodnou orientací. Z této skutečnosti vyplývá prostorovost vektorového pole fluktuací rychlosti. Při určitých okrajových podmínkách mohou být struktury větší než je jistá mezní velikost prostorově uspořádány, např. mohou mít rovinný charakter. To se týká například proudění v tenkých vrstvách, kdy rozměry oblasti umožňují vznik vírů větších měřítek než je tloušťka vrstvy pouze s orientací vířivosti napříč vrstvou a nikoli podélní. Pro menší měřítko je ovšem proudové pole i v těchto případech prostorové.

6. **Disipativnost:** Turbulence je disipativním procesem, tj. kinetická energie pohybu tekutiny je disipována na úrovni malých vírů a mění se v teplo. Pro to, aby bylo turbulentní proudění dlouhodobě zachováno, je třeba přivádět energii do systému zvnějšku. To se děje v oblasti velkých měřítek, energie je odebírána z hlavního proudu. Energie je potom dále pomocí kaskádového přenosu předávána směrem k menším měřítkům.

7. **Nelinearita:** Turbulentní proudění je nelineární svou podstatou, již jeho vznik je podmíněn uplatněním nelinearit, kdy dochází k růstu malých poruch. Vývoj i interakce jednotlivých struktur v turbulentním proudovém poli lze popsat pouze nelineárním matematickým modelem.

Tato „definice“ se omezuje pouze na vyjmenování atributů, tedy nutných vlastností turbulentního proudění. Z výše jmenovaných vlastností vyplývají některé další, které jsou v nich implicitně obsaženy a určité závěry týkající se velikosti některých bezrozměrných charakteristik.

Vlastností turbulence s velkou praktickou důležitostí je schopnost míšení (souvisí s difuzivitou). Nechť  $l$  je charakteristická délka energetických, tedy největších vírů obsažených v turbulentním proudění a  $u$  je charakteristická v čase proměnná rychlost. Potom velmi hrubá analogie mezi procesem míšení spojeným s turbulencí a nekoherentními náhodnými pohyby nám umožňuje definovat součinitel turbulentní difúze, který je úměrný  $l \cdot u$ . Nechť jsou dále definovány součinitelé molekulární difúze hybnosti  $\nu$  (nazývaný častěji molekulární kinematická viskozita či vazkost) a tepla  $\vartheta$  (tepelná difuzivita). Potom je schopnost zvýšeného přenosu těchto dvou fyzikálních veličin (hybnosti a tepla) v turbulentním proudu charakterizována hodnotou bezrozměrných součinitelů  $l \cdot u / \nu$  a  $l \cdot u / \vartheta$  značně větší než jednička, zatímco při laminárním proudění se blíží jedničce. První z těchto parametrů je nazýván Reynoldsovo číslo, druhý je potom číslo Pecletovo.

Turbulentní proudění je ze své přirozenosti nestabilní, kdy se jakkoli malá porucha vlivem nelinearit pohybových rovnic v čase rychle zesiluje. Naproti tomu laminární proudění se

chová přesně opačně. Proudové čáry, které jsou narušeny překážkou, se opět vracejí do původní konfigurace. Vazké síly v laminárním proudě převažují a tlumí poruchy a zabraňují tak vzniku turbulentního proudění.

Existuje mnoho důkazů z experimentů i numerických simulací, které jasně ukazují, že turbulentní proudění je vířivé, to znamená, že vířivost nabývá nenulových hodnot aspoň v některých oblastech turbulentního proudě. Je zajímavé zkoumat, jak turbulentní proudění může vzniknout z původně nevířivého proudění. Tento proces zřejmě souvisí s působením vazkosti, protože v důsledku Kelvinova teorému je zachováno nevířivé proudění v ideální tekutině, přítomnost stěn a překážek v souvislosti s podmínkou nulové rychlosti na površích způsobuje produkci vířivosti. Produkce vířivosti může být dále urychlena různými mechanismy, jako je například protahování vířivých vláken, jak bude popsáno dále.

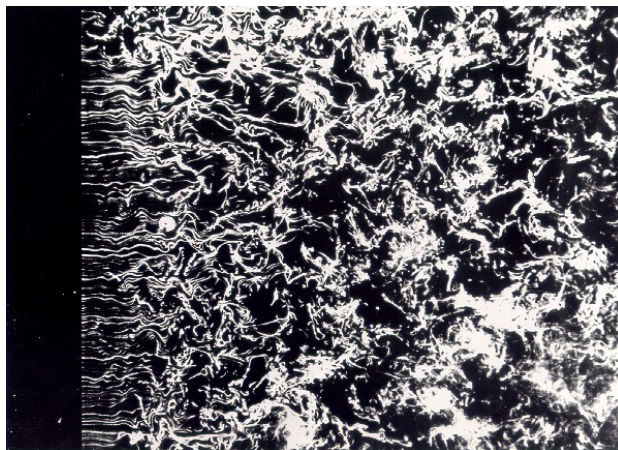
### 3.4. Příklady turbulentních proudů

Turbulentní pohyb je nejčastějším pohybem v přírodě. Laminární proudění je spíše výjimkou, je omezeno na proudění, které může být charakterizováno velmi nízkými hodnotami Reynoldsova čísla ( $Re$ ). S ohledem na definici  $Re$  to znamená, že buďto jsou rychlosti proudění velmi nízké (např. tečení ledovců) nebo je typický rozměr oblasti velmi malý (např. pohyb mikroorganismů v tekutině) nebo tekutina vykazuje extrémně vysokou vazkost (např. pohyb maziva v ložiscích). Samozřejmě, přichází v úvahu i kombinace těchto případů.

V této kapitole ukážeme typické případy turbulentního chování tekutin. Probrány budou i některé případy, které nelze jednoznačně zařadit do oblasti dynamiky tekutin, ale které mají velký praktický nebo teoretický význam.

#### 3.4.1. Mřížková turbulence

Klasickým příkladem turbulentního proudění je proudění za mřížkou vyrobenou z prutů, která má pravidelná, čtvercová oka. Za jednotlivými pruty vznikají úplavy, které spolu navzájem interagují a velice rychle vzniká proudění homogenní struktury (asi ve vzdálenosti 20 roztečí ok mřížky). Výsledné proudění, které bývá označováno jako „mřížková turbulence“ (angl.: *grid turbulence*), má některé příznivé vlastnosti. Předně je do značné míry homogenní ve statistickém smyslu v rovině rovnoběžné s mřížkovým generátorem turbulence. Dále fluktuace vykazují vysoký stupeň isotropie, odchylky jsou v řádu procent. Použijeme-li některou z bodových metod měření rychlosti (typicky anemometr se žhaveným drátkem), potom změněné průběhy rychlostí v čase jsou náhodně proměnné s rozdělením hustoty pravděpodobnosti, které se blíží Gaussovskému. Na druhé straně dochází ke změnám struktury proudění ve směru hlavního proudě (kolmo k rovině generátoru), s rostoucí vzdáleností od generátoru turbulence klesá intenzita fluktuací všech složek rychlosti a naopak roste velikost největších energetických vířů. Příklad proudění za mříží vizualizovaného kouřem je na obr. 3.10, proudění je zleva doprava.

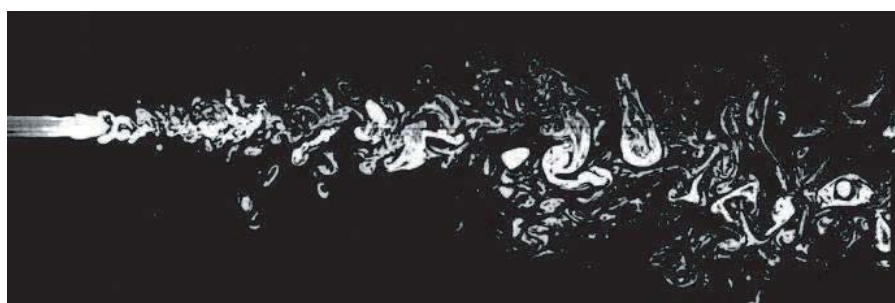


Pro své příznivé vlastnosti a také pro poměrně snadnou realizovatelnost v laboratorních podmínkách bývá mřížková turbulence považována za jakýsi etalon turbulentního proudění.

Mřížková turbulence může být generována při průchodu proudící tekutiny skrz stojící mříž, nebo naopak průchodem pohyblivé mřížky původně klidnou tekutinou. Tyto dva případy jsou v důsledku invariance (symetrie) pohybových rovnic vzhledem ke Galileiho transformaci ekvivalentní.

### 3.4.2. Volné smykové vrstvy

Výskyt volných smykových vrstev je neobyčejně častý např. při obtékání těles nebo při proudění zakřivenými či neprizmatickými (rozšíření) kanály nebo na hranici oblasti proudící tekutiny v neomezeném prostoru (paprsek). Volná smyková vrstva je téměř vždy nestabilní, to má za následek vznik vírových struktur. V praxi se s volnými smykovými vrstvami setkáváme všude tam, kde vzniká paprsek tekutiny vyfukovaný do klidného prostředí nebo v souvislosti s odtržením mezní vrstvy.

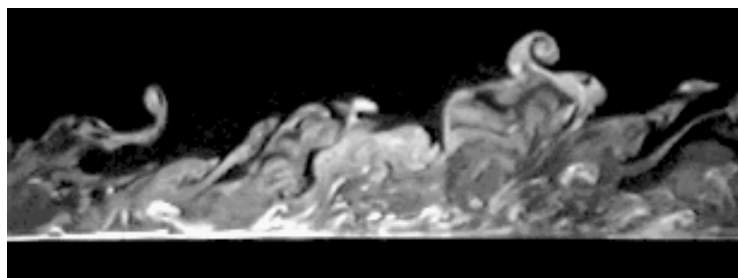


Obr. 3.11 – Paprsek

Jako ilustraci uvádíme na obr. 3.11 proudění v oblasti paprsku vytékajícího ze stěny zleva. Volná smyková vrstva vzniká na horní a spodní hranici oblasti proudění. Je zřetelná fraktální struktura v oblasti míšení.

### 3.4.3. Mezní vrstvy

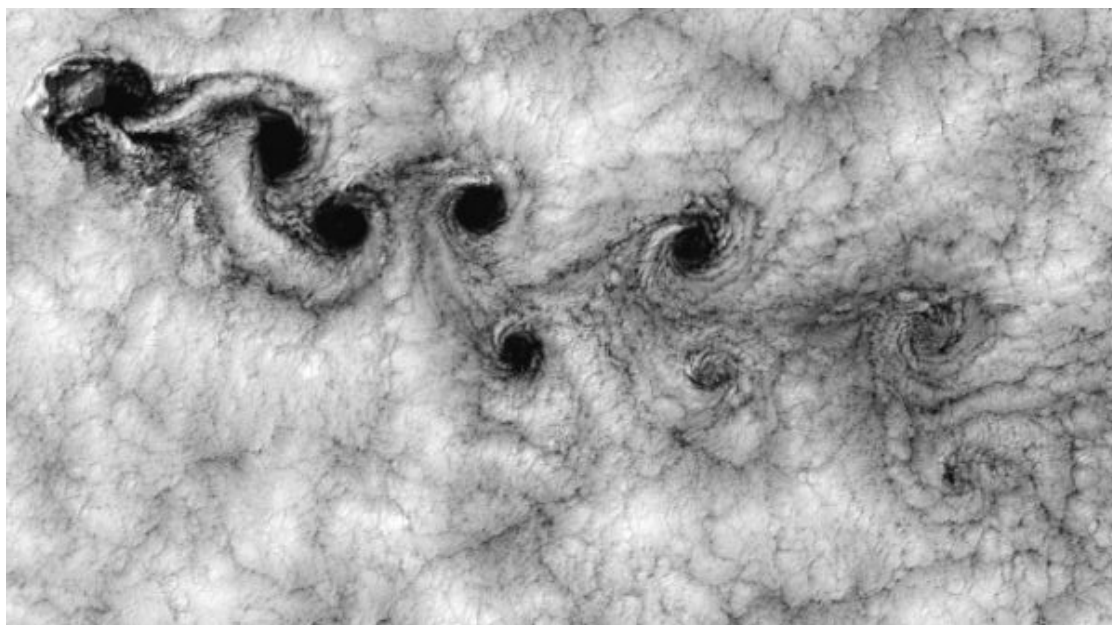
Při proudění v mezní vrstvě na podélně obtékaném povrchu je rozhodujícím parametrem Reynoldsovo číslo, kde délkovým parametrem je vzdálenost daného místa od počátku mezní vrstvy, tedy např. od náběžné hrany. Při určité hodnotě tohoto parametru dojde k přechodu mezní vrstvy do turbulence. Dále má mezní vrstva turbulentní strukturu. Na obr. 3.12 vidíme typickou strukturu turbulentní mezní vrstvy při relativně nízké hodnotě Reynoldsova čísla. Stěna je dole, tekutina proudí zleva doprava. Na obrázku jsou zřetelné vírové struktury uvnitř mezní vrstvy a její nepravidelná hranice. Jedná se o okamžitý obraz, který se stále mění, charakter však zůstává.



Obr. 3.12 – Turbulentní mezní vrstva

### 3.4.4. Úplavy

Úplavy za „špatně obtékanými tělesy“ (angl.: *bluff body*) mají turbulentní charakter s dominantním kvaziperiodickým nízkofrekvenčním prvkem. U špatně obtékaných těles je rozhodující Reynoldsovo číslo, kde délkovým parametrem je příčný rozměr obtékaného tělesa. Typickým případem je příčné obtékání válce, kdy vzniká kvaziperiodická von Kármánova-Bénardova vírová řada (angl.: *von Kármán-Bénard vortex street*) v úplavu. Na obr. 3.13 je vizualizace proudění mraků za ostrovem Juana Fernandez v Pacifiku, kde vidíme jak pravidelnou vírové útvary v úplavu, tak fraktální strukturu. Ostrov je v levém horním rohu, směr větru je úhlopříčný. Jsou patrné středy vírů (tmavé oblasti), víry postupně odplouvají ve směru větru.

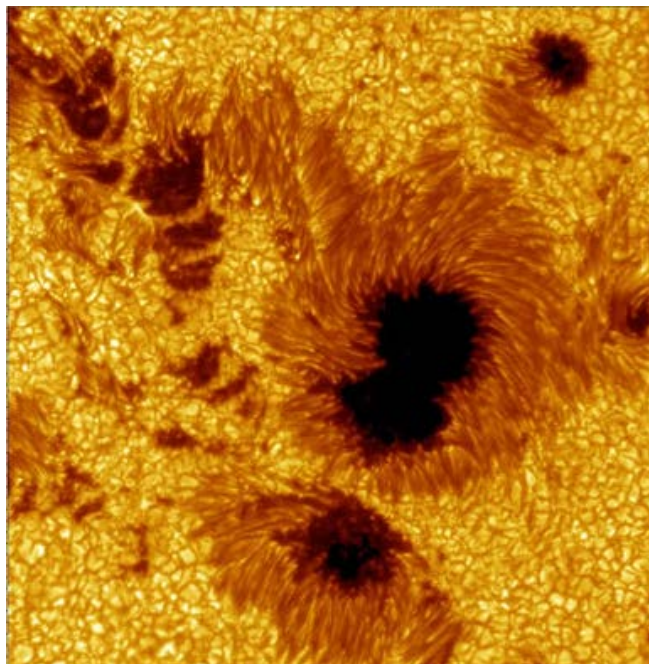


Obr. 3.13 – von Kármánova-Bénardova vírová řada za ostrovem

### 3.4.5. Sdílení tepla

Také při proudění spojeném se sdílením tepla můžeme často pozorovat chování tekutiny, které lze označit za turbulentní. Pokud proudění tekutiny nastává v důsledku sdílení tepla, jedná se o tzv. volnou konvekci. Tepelná energie potom způsobuje proudění tekutiny, které může být za určitých podmínek turbulentní. Typickým příkladem může být Rayleighova-Bénardova konvekce, která již byla probírána v kapitole o deterministickém chaosu.

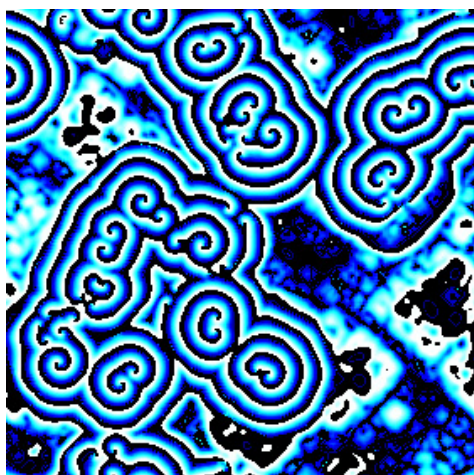
Na tomto místě uvedeme podobný příklad proudění. Na obr. 3.14 je uvedena fotografie povrchu Slunce, na které je dobře patrné turbulentní konvektivní proudění ve sluneční atmosféře. To je způsobeno jednak rozdíly teplot mezi povrchem Slunce a vyššími vrstvami jeho atmosféry, jednak nižší teplotou povrchu v oblasti „slunečních skvrn“. Na fotografii jsou zřetelné turbulentní útvary i buněčná struktura na pozadí, která souvisí s Rayleighovou-Bénardovou konvekcí.



Obr. 3.14 – Konvektivní proudy ve sluneční atmosféře

### 3.4.6. Chemická turbulence

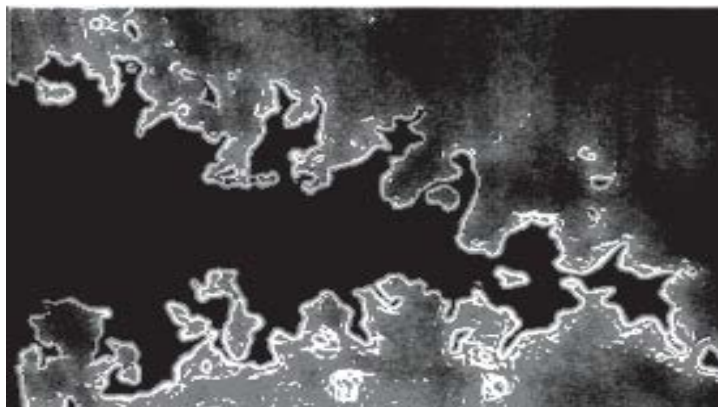
Chemické reakce jsou procesy s různými nelineárními dynamickými charakteristikami. Nelinearity mají svůj původ v interakci různých složek mezi sebou nebo v chování jednotlivých složek o sobě. Příkladem může být Belousovova-Zhabotinského reakce, při níž dochází k oscilující reakci bez jakýchkoli proměnných vnějších vlivů. Ukazuje se, že pro docílení homogenní struktury směsi (reaktanty jsou kyselina citronová, bromid draselný, kyselina sírová a ionty ceru) je nutné velmi intenzivní míchání, jinak vznikají nehomogenity jak stacionárního charakteru (tzv. Turingovy struktury), tak nestacionárního turbulentního charakteru. Intenzivním mícháním lze strukturu udržet více-méně homogenní. Pokud ovšem neaplikujeme míchání, vznikají v proudění určité nestabilní frekvence, které mohou vyústit v kvazistacionární struktury, které se odlišují chemickým složením. Na obr. 3.15 vidíme okamžitý stav při Belousovově-Zhabotinského reakci, kdy vznikají pravidelné spirální struktury vlivem periodických oscilací, které souvisí s tzv. globální Hopfovou bifurkací. Chemické složky účastníci se reakce se odlišují barvou. Jedná se o velmi stabilní proces nazývaný též „chemické hodiny“. Pokud porušíme rovnováhu složek vstupujících do reakce, potom se reakce buďto zastaví, nebo přejde do bouřlivého turbulentního režimu.



Zajímavé je, že velmi podobné struktury lze pozorovat i u svou podstatou zcela odlišných procesů, jako je vlnění povrchu kapaliny nebo při růstu kolony jednobuněčných organismů.

### 3.4.7. Hoření

Hoření je další oblastí s výskytem celé řady turbulentních stavů. Jedná se vlastně o spojení dvou předchozích případů, jde o chemickou reakci, která je silně exotermní a za normálních okolností nevratná.



Obr. 3.16 – Fraktální struktura plamene

Na obr. 3.16 je fotografie hoření směsi zemního plynu se vzduchem, je vyfukována zleva, tmavé oblasti představují nespálenou směs, světlá linka představuje oblast plamene. Vidíme typický tvar hranice plamene ve tvaru písmene V, struktura vlastní plochy hoření je fraktální. Na obrázku vidíme rovinný řez, plocha je ve skutečnosti prostorová.

## 4. Základní rovnice dynamiky tekutin

V této kapitole formulujeme základní myšlenky a postupy při matematickém popisu proudící tekutiny.

### 4.1. Základní předpoklady

Tekutina, tak jako každá reálná látka, sestává z molekul. Při úvahách o chování reálných tekutin se uplatňuje antropomorfní přístup, kdy se o libovolném objektu uvažuje z hlediska člověka jakožto základního měřítka všech objektů. Z tohoto hlediska nemá smysl zkoumat jevy, jejichž měřítko nejsou schopny zachytit lidské smysly za předpokladu, že je mikrostruktura látky adekvátně zachycena použitým fyzikálním modelem. Chováním mikrostruktury tekutin v molekulárních měřítkách se zabývá statistická mechanika tekutin. Pro řešení úloh mechaniky tekutin z reálného světa se však používá odlišný přístup, kdy je tekutina považována za kontinuum a je zanedbávána její molekulární struktura. Oprávněnost přijetí tohoto fyzikálního modelu je třeba pečlivě prověřit – závisí na fyzikálních vlastnostech konkrétní tekutiny.

Uvažujme jakožto pracovní tekutinu vzduch za „normálních“ podmínek, tedy tlak rovnající se průměrnému atmosférickému tlaku ( $10^5$  Pa) a „pokojeovou“ teplotu (293 K). Potom je průměrná vzdálenost molekul plynů, ze kterých sestává vzduch asi  $3 \cdot 10^{-9}$  m, střední volná dráha molekul  $\lambda$  je asi  $6 \cdot 10^{-8}$  m a průměrná doba mezi dvěma srážkami molekul je asi  $10^{-10}$  s. Pro srovnání nejmenší délkové měřítko  $l$  v „antropomorfních“ prouděch tekutin, tedy v tekutinách proudících ve strojích nebo v prostředí obývaném lidmi, je zpravidla větší než  $10^{-4}$  m, při střední rychlosti proudění 100 m/s jsou potom časová měřítka větší než  $10^{-6}$  s. Tedy i v tomto poněkud extrémním případě převyšují měřítka proudění molekulární měřítka o více než tři řády. Znamená to tedy, že počet částic v nejmenší struktuře vyskytující se v prostoru v proudící tekutině je  $(10^3)^3 = 10^9$ .

Přijatelnost hypotézy „spojitosti média“ (angl.: *continuum hypothesis*) obvykle ověřujeme pomocí Knudsenova čísla, které vyjadřuje poměr mezi střední volnou dráhou molekul a nejmenším měřítkem:

$$\text{Kn} = \frac{\lambda}{l} \quad (4.1)$$

Prostředí je považováno za kontinuum, je-li splněna podmínka:  $\text{Kn} \ll 1$ , ve výše uvedeném případě kdy  $\text{Kn} \leq 10^{-3}$  je tato podmínka zřejmě splněna.

Při dostatečně malém Knudsenově čísle dochází k oddělení měřítek molekulárních pohybů a makroskopických pohybů tekutiny. Potom lze uvažovat jakýsi „elementární“ objem, který představuje hmotný bod z hlediska pohybu tekutiny jakožto kontinua, zároveň však obsahuje dostatečné množství molekul, aby bylo možno vyjádřit jednotlivé fyzikální veličiny jako je hustota a rychlost tekutiny jako průměrnou vlastnost molekul v elementárním objemu obsažených. Znamená to tedy, že napříště můžeme uvažovat o spojených polích fyzikálních veličin jako je hustota  $\rho$  a rychlost  $\mathbf{u}$ , které potom považujeme za spojitou funkci času  $t$  a polohy  $\mathbf{x}$  v prostoru  $\rho(\mathbf{x}, t)$  a  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Naopak úvahy o chování jednotlivých molekul pozbývají svého významu. Můžeme potom hovořit o hodnotách fyzikálních veličin v infinitesimálním bodě a je možno také definovat derivace a gradienty těchto veličin v prostoru. Uvažujeme-li o tekutině jakožto o médiu s fraktální strukturou, potom je tato struktura omezena velikostí elementárních objemů, které byly definovány výše. Tento předpoklad je nutný, protože jinak nelze na těchto strukturách definovat derivaci.

V této práci budeme uvažovat pouze tekutiny, jejichž fyzikální vlastnosti lze považovat za spojitě. Částicí tekutiny budeme rozumět oblast v tekutině o typickém rozměru  $10^{-4}$  m, která má vlastnosti kontinua v duchu definice uvedené výše.

## 4.2. Eulerův a Lagrangeův popis

Pohyb tekutiny, tedy její kinematiku, lze studovat dvojím způsobem. Při prvním způsobu si zvolíme z objemu tekutiny libovolnou elementární částici ve smyslu hypotézy o spojitě tekutině a sledujeme její pohyb. Při druhém způsobu sledujeme změny kinematických veličin v jednotlivých bodech oblasti proudění. Prvním způsobem, který se nazývá Lagrangeova metoda, tedy vyšetřujeme pohyb tekutiny z hlediska individuálních částic, zatímco druhým způsobem, Eulerovou metodou, zkoumáme přímo pole kinematických veličin. Podívejme se nyní podrobněji na obě metody.

Při použití Lagrangeovy metody si zvolíme v počátečním čase  $t_0$  částici určenou polohovým vektorem  $\mathbf{x}_0$ . Polohu částice v následujících okamžicích můžeme popsat rovnicí:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t). \quad (4.2)$$

Nezávisle proměnné veličiny v této rovnici nazýváme Lagrangeovými proměnnými. Jelikož se jedná o spojitě prostředí, musí být tato funkce spojitou funkcí času, spojitost vzhledem k poloze v prostoru není nutná. Rychlost  $\mathbf{u}$  a zrychlení  $\mathbf{a}$  částice lze vyjádřit jednoduše derivací podle času:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}, \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}. \quad (4.3)$$

Při aplikaci Eulerovy metody zkoumáme stav proudící tekutiny v daném bodě oblasti  $\mathbf{x}$ . Eulerovými proměnnými nazýváme vektor polohy zkoumaného bodu a čas. Kinematický stav tekutiny ve zkoumaném pevném bodě charakterizujeme vektorem rychlosti  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Vyjádřeme nyní zrychlení částice, která v daném časovém okamžiku zaujímá zkoumaný bod prostoru. Za časový interval  $dt$  se změní její souřadnice  $\mathbf{x}$  o  $d\mathbf{x}$ . Potom pro  $i$ -tou složku vektoru rychlosti  $u_i + du_i$  v čase  $t + dt$  můžeme psát následující Taylorův rozvoj, v němž jsme zanedbali členy vyšších řádů:

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3, t) + du_i &= u_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t + dt) \\ &\doteq u_i(x_1, x_2, x_3, t) + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial u_i}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Při použití Hamiltonova operátoru nabla můžeme psát vektorovou rovnici:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + d\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t + dt) \doteq \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (d\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt. \quad (4.5)$$

Pro zrychlení  $\mathbf{a}$  potom dostáváme následující vztah, kde operátor  $D/Dt$  označuje derivaci podle času v Lagrangeově smyslu:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (4.6)$$

Tento postup můžeme zobecnit a aplikovat na libovolnou vektorovou funkci Eulerových proměnných  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , kterou chceme derivovat podle času sledující pohyb částice:

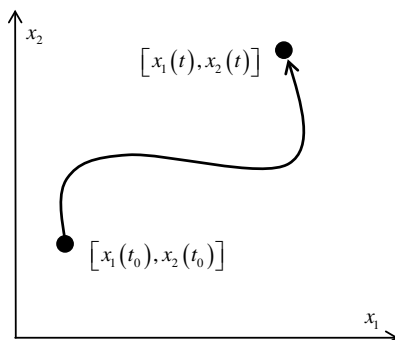
$$\frac{D\mathbf{f}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{f}. \quad (4.7)$$

Totální, Lagrangeovu derivaci  $\frac{D\mathbf{f}}{Dt}$  nazýváme „substanciální“ nebo také „individuální“ derivací funkce  $\mathbf{f}$  podle času. První člen na pravé straně  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$  je „lokální“ derivace, druhý člen  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{f}$  je „konvektivní“ neboli „proudová“ derivace funkce  $\mathbf{f}$  podle času. Tento člen bývá také nazýván „unášivý“, cizím slovem potom „konvektivní“ či „advektivní“.

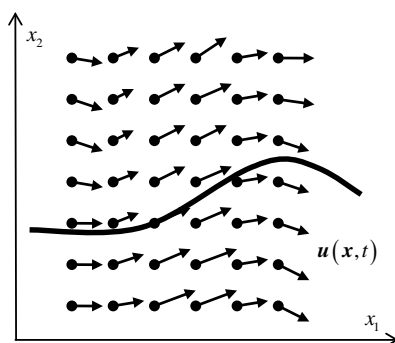
Stejnou metodu lze aplikovat také na skalární funkci souřadnic a času.

V praxi obvykle pracujeme převážně pomocí Eulerovy metody, kdy řešíme přímo pole sledovaných veličin ve zkoumané oblasti. Lagrangeova metoda se používá v různých speciálních úlohách, jako je zkoumání rozptylu skalární veličiny vázané na částice tekutiny.

S Lagrangeovým způsobem popisu chování kontinua je přímo spojen pojem „trajektorie částice“ (angl.: *trajectory*). Trajektorie jsou přímo popsány parametrickou vektorovou rovnicí (4.2), respektive (4.3) a určují trajektorii neboli dráhu částice oblastí v čase. V experimentu pomocí vizualizačních metod vidíme právě trajektorie. Situace je naznačena na obr. 4.1.



Obr. 4.1 – Lagrangeův popis



Obr. 4.1 – Lagrangeův popis

Naopak s Eulerovým způsobem popisu úzce souvisí pojem „proudnice“ nebo „proudová čára“ (angl.: *streamline*). Proudnice je definována jako množina bodů, v nichž jsou vektory rychlosti tekutiny v daném časovém okamžiku tečné. Parametrické rovnice proudnice můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\frac{dx_1}{u_1(\mathbf{x}, t)} = \frac{dx_2}{u_2(\mathbf{x}, t)} = \frac{dx_3}{u_3(\mathbf{x}, t)}, \quad (4.8)$$

kde  $x_i$  a  $u_i$  jsou složky vektoru polohy, resp. rychlosti v daném bodě a čas  $t$  je zde konstantním parametrem. Lze ukázat, že pokud funkce nenabývají současně nulových hodnot a jsou-li jednoznačné a spojité včetně prvních derivací podle souřadnic, pak každým bodem vektorového pole prochází pouze jediná proudnice. Eulerův způsob popisu proudového pole je naznačen na obr. 4.2.

Úplný systém trajektorií všech částic tekutiny je dokonalým popisem kinematického chování tekutiny v daném časovém intervalu. Ekvivalentní úplný popis poskytuje systém proudnic pro všechny body oblasti.

Proudnice představují obraz proudění v určitém časovém okamžiku, zatímco trajektorie charakterizují pohyb zkoumané částice v časovém intervalu. Obecně je pole rychlostí funkcí času, obraz proudění se tedy mění. Potom jsou zřejmě proudnice a trajektorie představovány vzájemně odlišnými soustavami křivek. Pověsim si, že v případě stacionárního neboli

ustáleného proudění, které se nemění v čase a lokální zrychlení pole rychlostí je nulové, obě soustavy čar, tedy trajektorie a proudnice, splývají. Složky rychlosti pak totiž nejsou explicitními funkcemi času, proudnice se potom nemění a tekutinová částice postupně prochází všemi body jedné a téže proudnice.

Bohužel, základním atributem turbulentního proudění je jeho nestacionárnost, to znamená, že trajektorie a proudnice se v turbulentním proudovém poli vždy odlišují.

Oba představené pohledy na proudící tekutinu, tedy Lagrangeův a Eulerův, popisují celou oblast proudící tekutiny a existuje mezi nimi jasná vazba. Lagrangeovy tekutinové souřadnice lze ztotožnit s integračními konstantami Eulerova popisu trajektorií.

### 4.3. Zákony zachování

Z faktu existence symetrií vyplývají pro dynamické systémy zákony zachování různých veličin (podrobněji o symetriích viz dále v tomto oddíle). V dynamice tekutin hrají klíčovou roli zákony zachování hmotnosti a hybnosti, v termodynamice potom ještě přistupuje zachování energie.

#### 4.3.1. Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity představuje aplikaci zákona zachování hmoty na oblast mechaniky tekutin.

Uvažujme dále elementární částici tekutiny o objemu  $\delta V$  a hmotnosti  $\delta m = \rho \delta V$ . Molekulární difúze hmoty napříč hranicí elementární částice je v rámci makroskopických časových měřítek nulová, proto lze hmotnost částice považovat za konstantní. To znamená, že její totální Lagrangeova derivace podle času je nulová:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} = 0. \quad (4.9)$$

Lze snadno ukázat, že divergenci rychlosti lze vyjádřit následujícím způsobem:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt}, \quad (4.10)$$

potom rovnici (4.9), která představuje podmínku kontinuity, můžeme zapsat ve tvaru:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.11)$$

V případě proudění nestlačitelné tekutiny se obecně platná rovnice (4.11) redukuje na dvě samostatné rovnice:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (4.12)$$

První rovnice vyjadřuje vlastnost vektorového pole rychlostí, které musí vykazovat nulovou divergenci. Říkáme, že vektorové pole rychlostí je solenoidální.

Všechny úvahy v těchto skriptech se týkají nestlačitelných tekutin.

Povšimněme si, že podmínka nestlačitelnosti neznamená a priori, že hustota je v celé oblasti konstantní. Závěry lze proto aplikovat i na nehomogenní stratifikovanou tekutinu, jakou může být např. mořská voda s proměnným obsahem soli nebo teplotně nehomogenní zemská atmosféra.

#### 4.3.2. Zachování hybnosti

Zkoumejme chování elementární částice tekutiny z hlediska druhého Newtonova pohybového zákona – zákona síly.

Stav částice tekutiny je charakterizován zrychlením částice, povrchovými silami a objemovými silami působícími na částici. Zrychlení částice je nutné uvažovat v Lagrangeovském smyslu  $D\mathbf{u}/Dt$ . Povrchové síly mají svůj původ v molekulárních pohybech a lze je popsat pomocí „tenzoru smykových napětí“ (angl.: *shear stress tensor*)  $\tau_{ij}(\mathbf{x}, t)$ , který je symetrický,

to znamená, že platí:  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . Objemovou silou je typicky gravitační síla, ve speciálních případech mohou působit i jiné objemové síly jako je např. odstředivá síla. Gravitační sílu můžeme charakterizovat gravitačním potenciálem  $\Psi$ , potom gravitační síla působící na jednotku hmoty je

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3 = -\nabla\Psi. \quad (4.13)$$

Pro konstantní gravitační pole platí, že  $\Psi = gx_3$ , kde  $g$  je gravitační zrychlení,  $x_3$  je souřadnice ve svislém směru a  $\mathbf{e}_3$  je jednotkový vektor v tomto směru.

Rovnováhu částice ve směru souřadnice  $x_i$  můžeme nyní vyjádřit rovnicí

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}. \quad (4.14)$$

Uvažujme nyní speciální případ, kdy pro smykové napětí v tekutině platí Newtonův zákon, tedy tekutina je „newtonská“. Máme-li zatížení elementu charakterizováno tenzorem napětí  $\tau_{ik}$ , potom napětí  $\tau_{Si}$  na obecné elementární ploše, která je charakterizována normálovým vektorem  $n_k$  lze vyjádřit ve tvaru

$$\tau_{Si} = \tau_{ik} n_k. \quad (4.15)$$

Celkovou sílu působící na danou plochu  $S$  z objemu  $V$  můžeme potom vyjádřit pomocí Greenovy věty

$$\int_S \tau_{Si} dS = \int_S \tau_{ik} n_k dS = \int_V \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} dV. \quad (4.16)$$

Tenzor smykových napětí pro nestlačitelnou newtonskou tekutinu potom bude

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.17)$$

kde  $P$  je tlak a  $\mu$  je součinitel dynamické vazkosti. Za předpokladu platnosti rovnice kontinuity je pro nestlačitelnou tekutinu pole rychlostí solenoidální, výraz (4.17) potom představuje tenzor napětí rozdělený na izotropní část ( $-P\delta_{ij}$ ) a deviátor.

Dosadíme-li výraz pro tenzor smykových napětí do rovnice (4.14), dostáváme Navier-Stokesovy rovnice (v dalším N-S rovnice) pro složku ve směru  $x_i$  v základním tvaru

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}. \quad (4.18)$$

K N-S rovnicím pro všechny tři složky musíme připojit rovnici kontinuity, předpokládáme dále, že  $\rho$  a  $\mu$  jsou konstantní.

N-S rovnice můžeme dále upravovat. Zavádí se modifikovaný tlak  $p$

$$p = P + \rho\Psi. \quad (4.19)$$

Při použití vektorového zápisu potom dostáváme

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (4.20)$$

kde  $\nu = \mu / \rho$  je součinitel kinematické vazkosti.

N-S rovnice představují soustavu nelineárních parciálních diferenciálních rovnic pro neznámý vektor rychlosti  $\mathbf{u}$  a tlak  $p$ , tedy 4 skalární neznámé. Máme tedy k dispozici 3 N-S rovnice a rovnici kontinuity  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . K jejich vyřešení potřebujeme počáteční a okrajové podmínky. Vyskytuje-li se v proudu tekutiny nepohyblivá stěna, potom na jejím povrchu platí podmínka neprostupnosti stěny

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.21)$$

kde  $\mathbf{n}$  je vektor normály ke stěně v daném místě. Dále platí podmínka nulového skluzu (angl.: *no-slip condition*), která říká, že také složka rychlosti tečná k povrchu je na stěně nulová:

$$\mathbf{u} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (4.22)$$

Tyto dvě podmínky (4.21) a (4.22) lze spojit do jediné:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (4.23)$$

V některých konkrétních případech může být opodstatněné uvažovat ideální nevazkou tekutinu. Tensor smykových napětí potom obsahuje pouze izotropní část

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij}. \quad (4.24)$$

Rovnováha hybností má potom tvar Eulerových rovnic

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \quad (4.25)$$

Eulerovy rovnice, na rozdíl od N-S rovnic, neobsahují druhou derivaci rychlosti, vyžadují proto také odlišný tvar okrajových podmínek. Například na nepohyblivé stěně lze použít pouze podmínku nepropustnosti stěny (4.21), nikoli však podmínku nulového skluzu (4.22). Na tomto místě je třeba zdůraznit, že řešení Eulerových rovnic obecně není totožné s řešením N-S rovnic pro případ  $\nu \rightarrow 0$ .

### 4.3.3. Navierovy-Stokesovy rovnice

Navierovy-Stokesovy rovnice představují základní rovnice používané v dynamice tekutin. Navier odvodil tyto rovnice již v roce 1823. N-S rovnice v sobě pravděpodobně obsahují všechny aspekty skutečného chování tekutin včetně jevu turbulence, aspoň tomu nasvědčují doposud experimentálně ověřované případy. Přesto je nutné stále pohlížet na N-S rovnice jako na matematický model a neustále je konfrontovat s experimentálními daty. Uvědomme si také, že hypotéza o platnosti N-S rovnic je založena na apriorní platnosti dalších hypotéz, jako je hypotéza spojitosti tekutiny, či hypotéza, že tekutina je Newtonská. Není-li přijetí těchto hypotéz v daném případě oprávněné, potom s velkou pravděpodobností nelze úspěšně aplikovat ani matematický model založený na N-S rovnicích.

N-S rovnice ve složkovém tvaru:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_I + \underbrace{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{II} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{III} + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}}_{IV}. \quad (4.26)$$

Fyzikální význam jednotlivých členů N-S rovnice je následující:

- I* proměnnost proudového pole v čase,
- II* charakterizuje konvekci,
- III* gradient tlaku,
- IV* vliv vazkosti.

N-S rovnice (4.26) jsou uvedeny ve složkovém tvaru, můžeme je napsat také ve vektorovém tvaru

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (4.27)$$

Levá strana N-S rovnic představuje substanciální derivaci rychlosti podle času, zatímco pravou stranu můžeme vyjádřit jednodušeji pomocí tenzoru smykových napětí  $\sigma_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + d_{ij}, \quad (4.28)$$

kde  $d_{ij}$  je deviátor tenzoru smykových napětí

$$d_{ij} = 2\mu s_{ij}, \quad (4.29)$$

$\mu$  je součinitel dynamické vazkosti a  $s_{ij}$  je tenzor „rychlosti deformace“ (angl.: *rate of deformation*)

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

N-S rovnice má potom jednoduchý tvar

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (4.30)$$

Tato rovnice bývá také nazývána Cauchyho a představuje obecný tvar rovnice popisující pohyb libovolného spojitého média.

Někdy bývá žádoucí vyjádřit N-S v bezrozměrných souřadnicích. Nechť  $L$  je charakteristický rozměr oblasti proudění a  $V$  je charakteristická rychlost. Zavedme bezrozměrné souřadnice

$$X_i = \frac{x_i}{L}, \quad U_i = \frac{u_i}{V}, \quad P = \frac{p}{\rho V^2}, \quad \tau = \frac{vt}{L^2} = \frac{v}{LV}. \quad (4.31)$$

Potom můžeme N-S rovnice ve složkovém tvaru přepsat v bezrozměrných souřadnicích

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} + \text{Re} \left( U_k \frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \frac{\partial P}{\partial X_i} \right) = \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_k \partial X_k}, \quad (4.32)$$

kde  $\text{Re}$  je bezrozměrné Reynoldsovo číslo – parametr určující kvalitu proudu:

$$\text{Re} = \frac{LV}{\nu}. \quad (4.33)$$

Vidíme, že v případě, kdy neuvažujeme vnější objemové síly působící na tekutinu, lze její chování plně charakterizovat jediným parametrem – Reynoldsovým číslem.

#### 4.3.3.1. Vlastnosti N-S rovnic

N-S rovnice jsou parciální nelineární diferenciální rovnice druhého řádu. Přes jejich formální jednoduchost nám matematická teorie říká pouze velmi málo o jejich vlastnostech. Nejen že neznáme obecné řešení těchto rovnic v analytickém tvaru, ale do dnešní doby ani nebyl podán důkaz o nejzákladnějších vlastnostech tohoto řešení jako je jeho existence, hladkost a jednoznačnost, případně stabilita v obecném prostorovém případě. Výrazem závažnosti tohoto problému je např. aktivita Clayova Matematického Institutu (CMI) z Cambridge, Massachusetts, USA. Ten na svém výročním zasedání v Paříži roku 2000 vyhlásil 7 matematických problémů pro 3. tisíciletí, na řešení každého z nich vypsál odměnu 1 milion USD. Jedním z těchto problémů je právě důkaz základních vlastností N-S rovnic.

Klíčovou vlastností N-S rovnic je jejich nelineárnost, která je zdrojem všech obtíží. Souvisí s tím vlastností řešení, které může být charakterizováno jako fraktální, zahrnuje jevy jako deterministický chaos a samoorganizace, vznik koherentních struktur. Další vlastností je nelokálnost N-S rovnic, jedná se totiž ve své podstatě o integro-diferenciální rovnice pro pole rychlosti a toto pole je nelokální. Můžeme rozlišit dva aspekty této nelokálnosti:

- Dynamická nelokálnost – tlak v bodě je definován pomocí celého rychlostního pole. Tlak má nelagrangeovskou povahu, s tím souvisí nelokálnost turbulence v čase („paměť“). Při vyloučení tlaku (rovnice pro vířivost) zavádí nelokálnost definice vířivosti, existuje oboustranná vazba mezi rychlostním polem a polem vířivosti (vířivost se nechová jako pasivní skalár).
- Reynoldsův rozklad (detaily viz kapitola 5) – existuje vzájemná vazba mezi polem středních rychlostí a fluktuací, která není lokalizovaná v čase a prostoru – má charakter funkcionálu. Fluktuace v daném místě a čase jsou funkcí středního pole v celém prostoru a naopak.

Výsledkem těchto skutečností je, že N-S rovnice jsou neintegrovatelné – neexistuje analytické řešení v uzavřené formě. Jedním z důsledků může být chaotické chování řešení.

Další velmi důležitou vlastností N-S rovnic jsou jejich symetrie. O této vlastnosti pojednáme podrobněji v následujícím odstavci.

### 4.3.3.2. Symetrie N-S rovnic

Pod pojmem „přírodní zákon“ rozumíme obvykle soubor pravidel, která nám říkají, jak se věci mění v prostoru a v čase. Slouží k předpovědi budoucího chování věcí za předpokladu znalosti nějakého počátečního stavu. Takovéto zákony změny lze převést na zcela ekvivalentní výroky či zákony o invarianci, tedy neměnnosti jisté struktury či vlastnosti při jakékoli povolené změně stavu sledovaného systému. Ukazuje se, že invariance vede k zachování určité veličiny v čase.

Klasifikací všech možných typů změn v souvislosti s různými typy invariancí se zabývá odvětví matematiky – teorie grup. Grupou rozumíme soubor změn, které se vyznačují třemi vlastnostmi: musí do něj patřit možnost, že k žádné změně nedojde, musí v něm být obsažena možnost každou změnu zrušit či zvrátit do původního stavu a každé dvě po sobě následující změny musejí dávat výsledek, jehož bychom mohli dosáhnout jedinou změnou patřící do daného souboru.

Každý z fyzikálních zákonů zachování, který známe, je založen na nějaké invarianci – to znamená, že existuje soubor změn tvořící grupu symetrie, který ponechává tyto zákony beze změny a vede tak k příslušnému zákonu zachování. Například zachování energie je ekvivalentní invarianci zákonů pohybu k posunům v čase dopředu či dozadu, jinými slovy výsledek experimentu nezáleží na okamžiku, kdy byl realizován, pokud jsou všechny ostatní podmínky identické. Zachování hybnosti je ekvivalentní invarianci zákonů pohybu vzhledem k poloze laboratoře v prostoru, zachování momentu hybnosti je potom ekvivalentní invarianci vzhledem ke směrové orientaci laboratoře. Další zachovávané se veličiny ve fyzice, které souvisejí s integračními konstantami zákonů změny, se také ukazují být ekvivalentní jiným, méně zjevným zákonům přírody.

Nechť  $G$  označuje grupu transformací působící na prostoro-časové funkce  $u(x,t)$ , které jsou prostorově periodické a jejich divergence je nulová. Potom  $G$  je považována za grupu symetrie N-S rovnic, pokud platí, že pro všechna  $u$ , která jsou řešením N-S rovnic a všechna  $g \in G$ , že funkce  $gu$  jsou také řešením N-S rovnic. Dále uvedeme seznam doposud objevených symetrií N-S rovnic.

V současnosti je známo šest symetrií N-S rovnic. Za předpokladu, že stav tekutinového systému je charakterizován časem  $t$ , vektorovým polem polohy  $x$  a vektorovým polem rychlosti  $u$ , jednotlivé symetrie můžeme charakterizovat:

1. **Posuv v prostoru:**  $g_r: t, x, u \mapsto t, x + r, u$ ,  
kde vektor  $r \in \mathbb{R}^3$  představuje vektor posunutí v prostoru.
2. **Posuv v čase:**  $g_\tau: t, x, u \mapsto t + \tau, x, u$ ,  
 $\tau \in \mathbb{R}$  je posuv v čase.
3. **Galileova transformace:**  $g_U: t, x, u \mapsto t, x + Ut, u + U$ ,  
 $U \in \mathbb{R}^3$  je unášivá rychlost, jedná se potom o tzv. inerciální soustavu.
4. **Zrcadlení (parita):**  $g_p: t, x, u \mapsto t, -x, -u$ .  
Jedná se o „reversibilitu“ proudění. Tato symetrie platí pouze za předpokladu zanedbatelného nelineárního (konvektivního) členu, v turbulenci obecně neplatí.
5. **Rotace:**  $g_A: t, x, u \mapsto t, Ax, Au$ ,  
 $A \in SO(\mathbb{R}^3)$  je transformační matice operace otočení v prostoru. Spojitá rotace však není konsistentní s periodickými okrajovými podmínkami, povoleny jsou pouze určité diskrétní hodnoty otočení. Spojitá rotace je možná pouze pro neomezenou oblast.
6. **Škálování:**  $g_\lambda: t, x, u \mapsto \lambda^{1-h}t, \lambda x, \lambda^h u$ ,

$\lambda \in \mathbb{R}$  je škálovací parametr a  $h \in \mathbb{R}$  je exponent. Tato symetrie je pro libovolné  $h$  platná pouze pro nevazkou tekutinu, pro vazkou tekutinu je nutné, aby bylo  $h = -1$ .

Symetrie jsou základními vlastnostmi dynamického systému, které musí být inherentně obsaženy v matematickém modelu tohoto systému. Pokud použitý matematický model vykazuje odlišné vlastnosti ve vztahu k symetriím, je třeba se velmi vážně zamyslet nad oprávněností použití takového systému, případně dobře zvážit omezení modelu z tohoto faktu plynoucí.

### 4.3.3.3. Rovnice pro tlak

V našich úvahách z hlediska dynamiky tekutin uvažujeme o tlaku poněkud z jiného hlediska než např. v termodynamice, kde jsme zvyklí spojovat okamžitou velikost tlaku se stavovými veličinami plynu – teplotou a hustotou. V dynamice tekutin je tlakové pole propojeno s polem rychlostí.

Vyjádříme divergenci N-S rovnice vynásobením operátorem nabra  $\nabla$

$$\left( \frac{D}{Dt} - \nu \nabla^2 \right) \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla^2 p - \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}. \quad (4.34)$$

Pole rychlosti je však solenoidální, proto s ohledem na (4.12) se levá strana rovnice (4.34) rovná nule. Nule se musí rovnat i strana pravá, platí tedy

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}, \quad (4.35)$$

což je Poissonova rovnice pro tlak. Její splnění je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby solenoidální pole rychlostí nadále solenoidálním zůstalo. Pro řešení této rovnice potřebujeme okrajové podmínky. Na tuhé stěně dostáváme Neumanovu okrajovou podmínku ve tvaru

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \mu \frac{\partial^2 u_n}{\partial n^2}, \quad (4.36)$$

kde  $n$  je vzdálenost ve směru normály k povrchu a  $u_n$  je složka rychlosti kolmá ke stěně.

Povšimněme si, že Poissonova rovnice vyjadřuje nelokálnost problému. Tlak v libovolném bodě je podle této rovnice totiž funkcí rozložení rychlosti v celé oblasti. Tlak tak představuje velmi zajímavou veličinu, která je vhodnou diagnostickou veličinou pro celou oblast proudění.

K řešení Poissonovy rovnice lze použít např. metody Greenovy funkce, výsledkem je pole rozložení tlaků v oblasti proudění.

### 4.3.3.4. Formulace pro pole vířivosti

Základní vlastností turbulentního proudového pole je jeho vířivá povaha. „Vířivost“ nebo také „vír rychlosti“ (angl.: *vorticity*) je definována jako rotace vektoru rychlosti

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{u}. \quad (4.37)$$

Vířivost nabývá v turbulentním poli nenulových hodnot. Modul vířivosti se číselně rovná dvojnásobku rychlosti rotace elementu tekutiny v daném bodě. Vířivost identicky splňuje rovnici kontinuity (viz dodatek – tenzorový počet (12.10)).

Přepíšme N-S rovnici do „rotačního tvaru“ užitím vektorové identity (viz také (12.11))

$$\nabla \mathbf{u}^2 / 2 = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + [\mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u}]. \quad (4.38)$$

N-S rovnice (4.27) potom jsou

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}] + \nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (4.39)$$

Rovnici pro vířivost můžeme získat vektorovým vynásobením N-S rovnice operátorem nabra zleva, po úpravě dostáváme

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}. \quad (4.40)$$

Člen obsahující tlak  $-\nabla \times \nabla p / \rho$  je pro tekutinu s konstantní hustotou nulový, je to důsledek vektorové identity (12.8). Z rovnice pro vířivost tedy vypadl tlak.

Všimněme si, že rovnice pro vířivost obsahuje také složky rychlosti a to jak na levé straně (v konvektivním členu obsaženém v substanciální derivaci) tak i na straně pravé. Fyzikální význam prvního členu na pravé straně je vazká difúze vířivosti, druhého potom generování neboli produkce vířivosti vlivem nehomogenity rychlostního pole.

Rovnice (4.40) bývá nazývána Helmholtzovou rovnicí. Řešení této rovnice vyžaduje uzavření systému přidáním vztahu mezi rychlostí a vířivostí (4.37). Jednou z možností je vyjádření rychlosti jako integrálu pole vířivosti. Získáme tak soustavu nelineárních integro-diferenciálních rovnic. Integrální vlastnost těchto rovnic odráží nelokální charakter N-S rovnic. Helmholtzovy rovnice jsou však značně složitější než původní N-S rovnice, přesto se tento přístup hojně používá zejména v dynamice neviskózních tekutin. Výhodou této formulace je skutečnost, že vířivost je často koncentrována v omezených oblastech (jádra vířů), jinde je prakticky nulová. Další výhodou je absence tlaku.

Pro neviskózní tekutinu vypadne člen s kinematickou viskozitou a dostáváme vyjádření Eulerových rovnic s vířivostí

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (4.41)$$

Tato rovnice dostatečně přesně popisuje chování velkých vířových struktur v omezených časových intervalech. Vířové struktury mají často rovinný charakter, to znamená, že složka rychlosti  $u_3 = 0 = \omega_1 = \omega_2$ , nenulové jsou pouze složky rychlosti  $u_1$  a  $u_2$  a složka vířivosti  $\omega_3$ . Z toho vyplývá, že pro toto proudění je člen na pravé straně rovnice (4.41) identicky roven 0 a platí:

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0, \quad (4.42)$$

kde  $\omega = \omega_3$ .

Tento výsledek lze interpretovat pomocí následujícího výroku: „*Při rovinném proudění ideální tekutiny v potenciálním silovém poli je vířivost všech jednotlivých částic tekutiny zachována.*“

Pro ustálené proudění rovnice (4.42) nabývá ještě jednoduššího tvaru

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = 0. \quad (4.43)$$

Tento výsledek lze interpretovat pomocí výroku: „*Při ustáleném rovinném proudění ideální tekutiny v potenciálním silovém poli je vířivost zachována podél všech proudnic.*“ Důsledkem platnosti tohoto výroku je skutečnost, že rovinné proudění kolem hladce obtékaných těles (např. leteckých profilů) je vždy nevířivé.

## 5. Rovnice turbulentního proudění

Nyní ukážeme způsob popisu turbulentního proudového pole pomocí pravděpodobnostně-statistického přístupu, který se v současnosti používá nejčastěji při řešení inženýrských problémů.

Tento přístup je založen na pojmu průměru souboru dat (přesná definice je v dodatku, kapitola 12.4.1.). Jeho pomocí lze studovat zákony pravděpodobnosti výskytu různých stavů, které jsou popsány pomocí statistických charakteristik. Tento princip byl poprvé použit v turbulenci Gabeleinem v roce 1935 a je na něm založena Kolmogorovova teorie izotropní turbulence z roku 1941 a mnoho dalších.

### 5.1. Reynoldsovy rovnice

Okamžité stavy proudového pole nestlačitelné tekutiny jsou úplným způsobem popsány soustavou N-S rovnic doplněných o rovnici kontinuity. Řešení těchto okamžitých stavů je pro praktické případy z různých důvodů stěží aplikovatelné, proto se používá úprava matematického modelu pro výpočet statisticky středních stavů. Reynolds již roku 1894 formuloval příslušné rovnice, které jsou po něm nazvány.

Reynolds vychází z předpokladu, že rychlostní pole  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  lze rozložit následujícím způsobem

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \overline{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)} + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t). \quad (5.1)$$

Jedná se o tzv. „Reynoldsovův rozklad“ (angl.: *Reynolds decomposition*) na časově střední složku  $\overline{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}$  a fluktuaci  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ . Pro flukuační rychlosti zřejmě platí

$$\overline{\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)} = \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

Stejný rozklad aplikujeme i na ostatní veličiny, jmenovitě na tlak

$$p = \bar{p} + p'. \quad (5.3)$$

Více o operaci středování viz Dodatek k tomuto skriptu, kapitola 12.4.

Z faktu, že pole okamžitých rychlostí je solenoidální vyplývá, že pole středních rychlostí i pole fluktuací jsou taktéž solenoidální. Rovnice kontinuity tedy platí nejen pro pole okamžitých rychlostí, ale také pro pole středních rychlostí i pro pole flukuačních složek

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0; \quad \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_k}} = 0; \quad \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_k}} = 0. \quad (5.4)$$

Dále můžeme vyjádřit výraz  $u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$  pomocí derivování per partes

$$\overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_k}, \quad (5.5)$$

druhý člen na levé straně rovnice (5.5) je však podle (5.4) roven nule, proto platí

$$\overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_k}. \quad (5.6)$$

„Reynoldsovy rovnice“ (angl.: *Reynolds equations*) vzniknou z N-S rovnic aplikací operace středování. Uvažujme N-S rovnice ve složkovém tvaru. Vyjádřeme nejprve výraz pro středovanou hodnotu substanciální derivace rychlosti

$$\begin{aligned}
\frac{Du_i}{Dt} &= \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k}} = \\
&= \overline{\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial [(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_k + u'_k)]}{\partial x_k}} = \\
&= \frac{D\bar{u}_i}{Dt} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Vidíme, že střední substantiální derivace okamžité rychlosti se rovná substantiální derivaci střední rychlosti zvětšené o přídatný člen  $\frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k}$ . Po dosazení do N-S rovnic dostáváme Reynoldsovy rovnice

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k^2} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}, \tag{5.8}$$

Pravou stranu této rovnice můžeme psát ve tvaru

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ -\bar{p} \delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_k} \right], \tag{5.9}$$

potom v hranaté závorce na pravé straně máme součet tří členů, které můžeme interpretovat jako napětí. První člen  $-\bar{p} \delta_{ij}$  představuje napětí způsobené středním tlakem,  $\mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$

je potom tenzor středního vazkého napětí a konečně  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$  je tenzor napětí, jehož vznik souvisí s fluktuacemi rychlosti. Tuto veličinu nazýváme „tenzor Reynoldsových napětí“ (angl.: *Reynolds stress tensor*). Ve zcela vyvinutém turbulentním proudění platí, že absolutní velikost tenzoru Reynoldsových napětí je minimálně o dva řády větší než tenzoru středního vazkého napětí. Tato relace neplatí pouze v tenkých smykových oblastech kde je vliv vazkosti rozhodující. Je to případ vazké podvrstvy, která se nachází v mezní vrstvě v bezprostřední blízkosti stěny.

Stejným způsobem, aplikací operace středování, můžeme upravit Poissonovu rovnici

$$-\frac{1}{\rho} \nabla^2 \bar{p} = \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}} = \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}} + \frac{\partial^2 \overline{u'_k u'_l}}{\partial x_k \partial x_l}. \tag{5.10}$$

Ke stejnému výsledku bychom dospěli výpočtem divergence Reynoldsovy rovnice (5.8).

Statistický popis proudového pole je tedy proveden pomocí 3 Reynoldsových rovnic a rovnice kontinuity nebo Poissonovy rovnice. Máme tedy k dispozici 4 rovnice. Tyto rovnice obsahují kromě 4 základních neznámých, kterými jsou složky středního vektoru rychlosti a střední tlak, také tenzor Reynoldsových napětí, který figuruje jako dalších 6 neznámých veličin, protože se jedná o symetrický tenzor 2. řádu. Systém Reynoldsových rovnic je tedy nedostatečně určený, říkáme, že je „neuzavřený“ (angl.: *unclosed*). Pro jeho jednoznačné řešení potřebujeme ještě další informace, které se týkají tenzoru Reynoldsových napětí.

### 5.1.1. Reynoldsova napětí

Tvar Reynoldsových rovnic je formálně stejný jako N-S rovnice až na přídatný člen obsahující Reynoldsova napětí  $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ , který hraje v Reynoldsových rovnicích klíčovou roli.

Fyzikální interpretace Reynoldsových napětí je průměrný tok hybnosti ve směru „*i*“ spojený s fluktuacním pohybem ve směru „*j*“ anebo naopak tok ve směru „*j*“ způsobený fluktuacemi ve směru „*i*“. Reynoldsova napětí tedy představují sílu na jednotku plochy spojenou

s přenosem hybnosti flukтуаčním rychlostním polem na rozdíl od vazkých napětí, která představují sílu spojenou s transportem hybnosti v molekulárním měřítku.

Tensor Reynoldsových napětí je symetrický semidefinitní tenzor druhého řádu, je jednoduchým vztahem vázán s tenzorem korelací  $\overline{u'_i u'_j}$ . Zkoumejme dále vlastnosti tenzoru korelací  $\overline{u'_i u'_j}$ . Diagonální prvky  $\overline{u'_k u'_k} = \overline{u_k'^2}$  se vztahují k „normálovým napětím“ (angl.: *normal stress*), zatímco mimodiagonální prvky  $\overline{u'_i u'_j}$ ,  $i \neq j$  charakterizují smyková napětí (angl.: *shear stress*). „Turbulentní kinetická energie“ (angl.: *turbulent kinetic energy*) je definována jako polovina stopy tenzoru korelací  $\overline{u'_i u'_j}$

$$k = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'} = \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_k}. \quad (5.11)$$

Tensor  $\overline{u'_i u'_j}$  můžeme rozložit na „izotropní část“ (angl.: *isotropic part*)  $i_{ij}$  a „deviační anizotropní část“ (angl.: *deviatoric anisotropic part*)  $a_{ij}$ :

$$\overline{u'_i u'_j} = i_{ij} + a_{ij}, \quad (5.12)$$

kde izotropní část je

$$i_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (5.13)$$

a anizotropní část potom je

$$a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}. \quad (5.14)$$

Izotropní část Reynoldsových napětí může být zahrnuta do modifikovaného středního tlaku – viz dále (5.20).

Chování flukтуаčních veličin v čase můžeme matematicky popsat tak, že do N-S rovnic dosadíme Reynoldsův rozklad pro rychlosti a tlak a následně odečteme Reynoldsovy rovnice pro středované veličiny. Potom dostáváme:

$$\underbrace{\frac{\partial u'_i}{\partial t}}_I + \underbrace{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k}}_{II} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i u'_k - \overline{u'_i u'_k})}_{III} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i}}_{IV} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2}}_V. \quad (5.15)$$

Význam jednotlivých členů:

- I* časová změna flukтуаční rychlosti,
- II* představuje vzájemnou vazbu mezi polem středních rychlostí a polem fluktuací,
- III* je potom nelineární člen,
- IV* je vliv fluktuací tlaku,
- V* je disipační člen.

Abychom obdrželi rovnici pro tenzor Reynoldsových napětí, respektive pro korelační tenzor  $\overline{u'_i u'_j}$ , musíme rovnici (5.15) vynásobit  $u'_j$ , sečíst pro zaměněné indexy a provést operaci středování:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t}}_I + \underbrace{u'_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k}}_{II} = \\ & = - \underbrace{\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k}}_{III} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k}}_{IV} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \left[ \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right]}_V + \nu \underbrace{\left[ \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k^2}} + \overline{u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2}} \right]}_{VI}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Fyzikální význam jednotlivých členů v této rovnici je následující:

- I* je časová změna místního korelačního tenzoru,
- II* představuje advekci Reynoldsových napětí **středním** proudem (nikoli celkovým),

- III tento člen představuje interakci mezi střední a flukтуаční složkou proudění, souvisí s produkcí Reynoldsových napětí,
- IV představuje advekci v souvislosti s flukтуаční složkou proudění,
- V představuje potom vliv tlaku a konečně
- VI představuje difúzi a disipaci vlivem vazkosti, který se projevuje hlavně u malých měřítek poruch.

Rovnice pro Reynoldsova napětí (5.16) by teoreticky mohla vyřešit problém neuzavřenosti Reynoldsových rovnic. Ve skutečnosti tomu tak není, protože tato rovnice obsahuje celou řadu dalších neznámých veličin – korelací druhého řádu s tlakem (člen V) a dále korelace třetího řádu (člen IV).

Turbulentní proudění je charakterizováno nenulovou hodnotou vířivosti. V případě nevířivého proudění je střední i flukтуаční složka vířivosti nulová. Vynásobme flukтуаční složku vířivosti flukтуаční složkou rychlosti a provedme operaci středování, dostáváme

$$u'_k \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_k} = 0. \quad (5.17)$$

Pro nevířivé proudění potom dostáváme Corrsinovu-Kistlerovu rovnici

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_k} = \frac{\partial k}{\partial x_i}. \quad (5.18)$$

Vidíme, že v nevířivém proudění hrají Reynoldsova napětí  $\overline{u'_i u'_j}$  stejnou roli jako isotropní napětí  $k\delta_{ij}$ , které lze zahrnout do modifikovaného tlaku. Z toho vyplývá, že v případě nevířivého proudění nemají Reynoldsova napětí žádný vliv na střední pole rychlostí.

Dále si povšimněme některých případů, které lze považovat ve smyslu středovaných veličin za dvourozměrné, tedy rovinné. Jsou to taková proudění, kdy máme okrajové podmínky geometricky rovinné, je však třeba si uvědomit, že okamžitá pole veličin v turbulentním proudění jsou vždy třírozměrná, tedy prostorová.

### 5.1.2. Možnosti řešení Reynoldsových rovnic

Při praktickém použití Reynoldsových rovnic se musíme vypořádat s problémem neuzavřenosti jejich systému. Máme k dispozici 3 složkové Reynoldsovy rovnice a rovnici kontinuity, tedy celkem 4 rovnice. Neznámých je ovšem 10, jsou to 3 složky střední rychlosti, střední tlak a 6 nezávislých složek tenzoru Reynoldsových napětí.

Řešení tohoto problému se datuje již od dob Reynoldsových, kdy byly navrženy některé základní koncepce. První jednoduché modely nevystihují dostatečně přesně fyzikální chování systému a nedávají obecně příliš dobré výsledky, jsou však jasné, průhledné. Při správném použití mohou dát uspokojivé výsledky. Koncepce moderních metod řešení Reynoldsových rovnic v podstatě vychází z historických modelů, proto na tomto místě některé užitečné koncepce uvedeme.

Jednou z klasických metod modelování Reynoldsových napětí je „hypotéza turbulentní vazkosti“ (angl.: *turbulent-viscosity hypothesis*), kterou roku 1877 zavedl Boussinesq. Tato metoda využívá analogii s Newtonovým zákonem pro vyjádření tečných napětí v tekutině.

Podle této hypotézy je napětí v tekutině, které přísluší deviační anizotropní části Reynoldsových napětí (5.14), úměrné střední rychlosti deformace částice tekutiny. Konstantou úměrnosti je „turbulentní vazkost“  $\nu_{turb}$  (angl.: *turbulent viscosity* nebo *eddy viscosity*):

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = \rho \nu_{turb} \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.19)$$

Reynoldsovy rovnice potom přecházejí do tvaru

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ v_{eff} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) \right] \quad (5.20)$$

kde  $v_{eff}(\mathbf{x}, t) = \nu + \nu_{turb}(\mathbf{x}, t)$  je součinitel efektivní vazkosti. Povšimněme si, že tyto rovnice mají formálně stejný tvar jako N-S rovnice v nichž figurují časově střední rychlosti, součinitel molekulární vazkosti je nahrazen efektivním součinitelem a tlak potom modifikovaným středním tlakem  $\bar{P}$ .

$$\bar{P} = \bar{p} + (2/3) \rho k \quad (5.21)$$

Problémem zůstává určení turbulentní vazkosti, která je funkcí polohy a času. Turbulentní vazkost je vázána s typickou hodnotou rychlosti  $U$  a s velikostí největších turbulentních vírů  $L$  vztahem  $\nu_{turb} \sim U \cdot L$ . Obecně je turbulentní vazkost funkcí času, při praktické aplikaci se předpokládá, že změny turbulentní vazkosti v čase lze zanedbat. Pro rozložení hodnot turbulentní vazkosti v prostoru existují doporučení platná pro určitou třídu úloh.

V roce 1925 Prandtl zavedl zvláštní měřítko, nazývané „směšovací délka“ (angl.: *mixing length*). Použitím hypotézy formulované Boussinesqem a analogie s molekulární difúzí, která vyjadřuje gradienty rychlosti pro měřítko menší, než je střední volná dráha molekul, Prandtl předpokládal, že existuje turbulentní difúze, která vyhlazuje rychlostní pole pro měřítko menší než je směšovací délka  $l_{mix}$ . Potom lze tenzor Reynoldsových napětí přepsat jako turbulentní difúzní člen. Vztah mezi směšovací délkou a turbulentní vazkostí v mezní vrstvě v blízkosti tuhé stěny je

$$\nu_{turb} = l_{mix}^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_{\parallel}}{\partial x_{\perp}} \right|, \quad (5.22)$$

kde  $\bar{u}_{\parallel}$  je střední rychlost podél stěny a  $x_{\perp}$  je souřadnice kolmá ke stěně.

Na myšlenke směšovací délky jsou založeny tzv. algebraické modely turbulence. Pokud však uvažujeme proudění při vysokých hodnotách Reynoldsových čísel, hypotéza využívající analogii s kinetickou teorií plynů přestává fungovat. Molekulární difúze může být modelována difúzní lineární Laplaceovou rovnicí, protože platí, že difúzní pohyby jsou odděleny od pohybů velkých měřítek. Toto však neplatí pro plně vyvinuté turbulentní proudění, ve kterém nelineární advektivní člen dominuje nad difúzním členem a obsahuje fluktuace všech měřítek. Nejsou zde tedy oddělena velká a malá měřítko pohybu. Tato skutečnost je hlavní překážkou při pokusech o modelování turbulence pomocí hybnostních rovnic, problém jejich neuzavřenosti je stále nedořešen.

Další možnosti řešení problému neuzavřenosti Reynoldsových rovnic ukážeme v kapitole o modelování turbulentního proudění pomocí Reynoldsových rovnic.

## 5.2. Energetická bilance

Energie v jednotkovém objemu tekutiny sestává z kinetické energie proudění, která je rovna  $\frac{1}{2} \rho u_k^2$ , a z vnitřní energie  $e \rho$ , která souvisí se subatomárními silami a s relativním pohybem jednotlivých molekul vzhledem k makroskopickému pohybu tekutiny. Navenek můžeme vnitřní energii měřit pomocí teploty a specifického tepla tekutiny. V následujících odstavcích se budeme zabývat bilancí pouze kinetické energie v tekutině.

Kinetická energie na jednotku hmotnosti  $k = \frac{1}{2} u_k u_k$  neobsahuje derivace, proto lze předpokládat, že je určována hlavně strukturami velkých měřítek. Naopak rychlost disipace

$$\Delta = \frac{1}{2} \nu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (5.23)$$

závisí na prostorových derivacích rychlosti, největších hodnot tedy bude zřejmě nabývat v oblasti nejmenších měřítek. Máme tedy kinetickou energii svou podstatou vázanou na velká měřítka, která disipuje vlivem vazkosti v oblasti malých měřítek. Aby k tomu mohlo dojít, musí existovat vazba mezi oběma veličinami, která je zprostředkována přenosem energie od velkých měřítek k malým.

Aplikujme nyní Reynoldsův rozklad na vzorec pro výpočet kinetické energie. Střední kinetická energie potom bude

$$\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{u_k u_k} = \frac{1}{2} \overline{u_k} \overline{u_k} + \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_k}. \quad (5.24)$$

Členy na pravé straně představují energii středního proudu a střední energii turbulence. Střední energie turbulence je důležitou veličinou, která kvantifikuje intenzitu turbulentních pohybů. Zavádí se střední kvadratická hodnota

$$\overline{q'^2} = \overline{u'_k u'_k} \quad (5.25)$$

a také střední kvadratická odchylka

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{q'^2} / 3} = \sqrt{(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}) / 3}. \quad (5.26)$$

Střední energie turbulence charakterizuje pohyby velkých měřítek. Turbulentní Reynoldsovo číslo

$$\text{Re}_L = \sigma_u L / \nu \quad (5.27)$$

definované pro největší měřítka  $L$  potom charakterizuje význam vazkosti pro tyto největší energetické struktury.

### 5.2.1. Energie středního proudu

Přepíšme Reynoldsovy rovnice (5.8) do následujícího tvaru

$$\frac{D\overline{u}_i}{Dt} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}, \quad (5.28)$$

kde

$$T_{ij} = \nu \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\overline{p}}{\rho} \delta_{ij} - \overline{u'_i u'_j} \quad (5.29)$$

je efektivní tenzor smykových napětí dělený hustotou.

Budeme dále předpokládat proudění v určitém prostoru omezeném tuhými stěnami, na nichž je rychlost proudění nulová. Vynásobme rovnici (5.28)  $\overline{u}_k$  a integrujme ji přes objem tekutiny  $V$ , který se pohybuje střední rychlostí proudu. Potom můžeme nahradit substanciální derivaci obyčejnou a vytknout ji před integrál

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \overline{u}_k \overline{u}_k dV = \int \overline{u}_k \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} dV = \int \frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u}_k T_{kl}) dV - \int T_{kl} \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_l} dV. \quad (5.30)$$

První člen na pravé straně rovnice je 0, celou rovnici pak můžeme přepsat do tvaru

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \overline{u}_k \overline{u}_k dV}_I = \underbrace{\int \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_l} dV}_{II} - \underbrace{\frac{1}{2} \nu \int \left( \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \right) dV}_{III}. \quad (5.31)$$

Fyzikální význam jednotlivých členů je následující:

- I* představuje rychlost změny energie středního proudu,
- II* je dán vazbou středního proudu a turbulentních pohybů a
- III* představuje vazkou disipaci středního proudu.

Vazebný člen mezi středním proudem a turbulencí *II* představuje energii odebíranou střednímu proudem pro turbulenci. Tento člen souvisí s Reynoldsovým napětím a je typicky řádově větší než vazká disipace středního proudu.

## 5.2.2. Celková energie

Postup odvození vztahů pro celkovou energii je obdobný jako u bilance energie středního proudu provedeného v předchozím odstavci, vycházíme však z N-S rovnic. Ty vynásobíme  $u_k$  a integrujeme přes oblast proudění omezenou tuhými stěnami

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} u_k u_k dV = -\frac{1}{2} \nu \int \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) dV = -\int \Delta dV, \quad (5.32)$$

kde  $\Delta$  je rychlost disipace energie v souvislosti s viskozitou na jednotku hmotnosti. Rovnice nám dává celkovou (integrovanou) rychlost změny energie, zahrnuje v sobě jak vliv vazkých smykových napětí, tak vliv tlaku a konvekce. Použijeme-li Reynoldsovu dekompozici na veličinu  $\Delta$ , potom pro její střední hodnotu dostáváme

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{2} \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \nu \overline{\left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \right)}. \quad (5.33)$$

Tak jsme celkovou střední disipaci rozložili na složku střední a flukтуаční, tedy turbulentní. Turbulentní složka bývá nazývána rychlost disipace  $\varepsilon$  a hraje důležitou roli v teorii turbulence

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \right) \quad (5.34)$$

a její střední hodnota

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \nu \overline{\left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \right)}. \quad (5.35)$$

Rozložme nyní veličiny v rovnici (5.32) na část odpovídající střednímu proudu a turbulentní složce a provedme operaci středování v čase. Pro celkovou střední energii potom platí

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \overline{u_k u_k} dV = -\frac{1}{2} \nu \int \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \right) + \overline{\left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \right)} \right] dV. \quad (5.36)$$

Tento vztah nám ukazuje, jakým způsobem disipuje celková střední energie proudu, rychlost disipace sestává ze složky charakterizující vazkou disipací středního proudu (první člen na pravé straně) a ze složky charakterizující turbulentní vazkou disipací (druhý člen na pravé straně).

V praktických případech, kdy je Reynoldsovo číslo dostatečně vysoké, je složka charakterizující disipací středního proudu zanedbatelná oproti složce turbulentní, platí tedy

$$\frac{1}{2} \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \right) \ll \frac{1}{2} \nu \overline{\left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \right)}. \quad (5.37)$$

Je to dáno tím, že flukтуаční gradienty rychlosti  $\partial u'_i / \partial x_j$  nabývají vysokých a stále vyšších hodnot s rostoucím Reynoldsovým číslem, zatímco gradienty střední rychlosti nikoli. Tyto gradienty nabývají nejvyšších hodnot u malých měřítek turbulentních pohybů. Jednou z výjimek je oblast mezní vrstvy v bezprostřední blízkosti stěny, kde vzniká tzv. „vazká podvrstva“ (angl.: *sublayer* nebo *viscous layer*), která má laminární charakter i v případě turbulentní mezní vrstvy. Převažují zde gradienty střední rychlosti ve směru kolmém ke stěně, zatímco gradienty spojené s fluktuacemi zde prakticky chybí a vztah (5.37) zde neplatí. Tento případ se však týká velmi prostorově omezené oblasti v bezprostřední blízkosti stěny, všude jinde platí vztah (5.37).

Vzájemné energetické propojení středního proudu a turbulence se projevuje v prvním členu na pravé straně rovnice (5.31), který představuje produkci turbulence, v celkové energetické bilanci však nevystupuje.

### 5.2.3. Energie turbulence

Rovnici pro turbulentní kinetickou energii můžeme získat z rovnic (5.16) položením  $j = i$  a dělením 2, turbulentní kinetickou energii na jednotku hmotnosti vyjádříme pomocí (5.24) a (5.25):

$$\underbrace{\frac{\partial(\overline{q'^2}/2)}{\partial t}}_I + \underbrace{u_k \frac{\partial(\overline{q'^2}/2)}{\partial x_k}}_{II} = \underbrace{-\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k}}_{III} - \underbrace{\frac{\partial(\overline{q'^2 u'_k}/2)}{\partial x_k}}_{IV} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{u'_i} \frac{\partial p'}{\partial x_i}}_V + \underbrace{\overline{v u'_i} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}}_{VI}. \quad (5.38)$$

Tato v teorii turbulence velmi důležitá rovnice obsahuje opět celou řadu členů:

*I* představuje rychlost změny turbulentní energie v čase v daném bodě (pro ustálené proudění je 0),

*II* je konvekce turbulentní energie středním proudem. Součet členů *I* a *II* dává rychlost časové změny turbulentní energie na jednotku hmotnosti v bodě pohybujícím se střední rychlostí,

*III* je produkce turbulentní energie vznikající vzájemným působením mezi středním proudem a turbulencí, tento člen je nejčastěji kladný (turbulentní energie se přivádí z hlavního proudu), ve výjimečných případech může být záporný (turbulentní energie se spotřebovává),

*IV* je advektivní transport turbulentní energie fluktuálními pohyby,

*V* potom je přesun turbulentní energie vlivem tlaku (práce vykonaná fluktuacemi tlaku),

*VI* představuje vazkou difúzi a disipaci.

Člen *VI* můžeme přepsat následujícím způsobem:

$$\overline{v u'_i} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k} = \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{u'_i \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)} \right] - \overline{\varepsilon}, \quad (5.39)$$

první člen na pravé straně rovnice (5.39) představuje vazký transport, druhý potom disipaci turbulentní energie. Integrál turbulentního transportního členu přes celou oblast proudění je zřejmě nulový (nulová divergence), nepřispívá tedy ke změně celkové energie. Tento člen bývá také označován jako difúzní, protože pro homogenní turbulenci nabývá nulové hodnoty, v nehomogenní turbulenci představuje „difúzi“ kinetické energie. Turbulentní difúzi je nutno v rovnici pro kinetickou turbulentní energii modelovat, protože je představována trojnou korelací fluktuací rychlosti. V praxi je často tento člen značně menší než disipační člen a lze jej tedy zanedbat (výjimkou je opět vazká podvrstva zmiňovaná výše). Disipační člen naopak hraje velmi důležitou roli v každém turbulentním proudu.

Rovnici (5.38) můžeme upravit pomocí vztahu (5.39), za předpokladu nestlačitelnosti tekutiny a platnosti rovnice kontinuity pro střední hodnoty rychlosti i pro fluktuace dostáváme následující prakticky užitečný tvar energetické rovnice

$$\frac{\partial(\overline{q'^2}/2)}{\partial t} = \underbrace{-\overline{u'_k u'_i} \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i}}_I - \underbrace{\frac{\overline{\varepsilon}}{\nu}}_{II} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \underbrace{\frac{1}{2} \overline{q'^2 u'_i}}_{III} + \underbrace{u'_i \left( \frac{1}{2} \overline{q'^2} + \frac{p'}{\rho} \right)}_{IV} - \underbrace{v u'_k \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)}_{V} \right]}_V. \quad (5.40)$$

V rovnici (5.40) je:

*I* produkce turbulentní energie,

*II* je potom disipace turbulence,

*III* představuje vliv konvekce středním proudem,

*IV* souvisí s difúzí, fluktuace tlaku přispívají ke zvýšení izotropie a homogenity turbulence,

*V* transport turbulentní energie – součet členů *III* a *IV*.

Integrací transportního členu *V* přes celou oblast proudění až ke stěnám dostáváme 0 (teorém o nulové divergenci), jedná se tedy o jakési přerozdělování energie z jednoho místa na jiné, celková energie se v souvislosti s tímto členem nemění. Celková energie proudu daná integrá-

lem přes oblast proudění je tedy určována rozdílem integrálů produkčního a disipačního členu. Pro statisticky stacionární, ustálené turbulentní proudění musí zřejmě být produkce a disipace turbulentní energie v rovnováze a proto pravá strana rovnice (5.40) bude nulová.

Jednoduchou matematickou úpravou transportního členu  $V$ , kdy jej vynásobíme hustotou a provedeme integraci přes libovolný pevný objem, můžeme výsledek interpretovat jakožto vektor určující střední tok turbulentní energie v souvislosti s konvekcí středním proudem a difúzí turbulentní energie

$$\frac{1}{2} \overline{\rho q'^2 u_i} + u_i \overline{\left( \frac{1}{2} \rho q'^2 + p' \right)} - \mu u'_k \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)}. \quad (5.41)$$

Tento vektor charakterizuje nehomogenitu turbulentního proudění.

Pro homogenní turbulentní proudění dostáváme zjednodušenou rovnici energie bez transportního členu

$$\frac{\partial (\overline{q'^2}/2)}{\partial t} = -\overline{u'_k u'_i} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i} - \overline{\varepsilon}. \quad (5.42)$$

Produkční člen způsobuje vznik nebo případně zánik turbulentní energie v závislosti na jeho znaménku. Bez gradientů středního rychlostního pole by nebylo produkce a turbulentní energie by stále klesala. Disipační člen  $\overline{\varepsilon}$  je vždy kladný, vždy způsobuje odvádění energie známým mechanismem přes turbulentní pohyby malých měřítek, které generují největší hodnoty prostorových gradientů a tedy i nejméně disipaci.

Pro izotropní turbulenci platí, že žádný ze směrů není jakkoli upřednostněn a zvláštní. Proto tenzor Reynoldsových napětí  $\overline{u'_i u'_j}$  musí mít stejné složky, ať provádíme libovolnou rotaci souřadného systému. Z teorie tenzorového počtu vyplývá, že dotyčný tenzor potom musí mít tvar, který lze vyjádřit jako součin skalární konstanty a Kroneckerova tenzoru, skalární konstantou je v našem případě kvadrát směrodatné odchylky modulu vektoru rychlosti  $\sigma_u^2 = \overline{u'_i u'_i} / 3$ . Pro izotropní turbulenci tedy platí  $\overline{u'_i u'_j} = \sigma_u^2 \delta_{ij}$ , tenzor Reynoldsových napětí je diagonální se všemi diagonálními prvky shodnými. Tato vlastnost může být použita při ověřování hypotézy o isotropii konkrétního turbulentního proudění.

#### 5.2.4. Rychlost disipace energie

Předpokládejme turbulentní proudění při dostatečně vysokém Reynoldsově čísle, tedy mimo vazkou podvrstvy. Jak již bylo řečeno výše, rychlost disipace  $\Delta$  (viz rovnice (5.23)) je funkcí prostorových derivací rychlosti, pro její velikost jsou tedy určující nejmenší turbulentní struktury, vliv gradientů středního proudění zde můžeme zanedbat a uvažovat pouze turbulentní složku rychlosti disipace  $\varepsilon$ . Rovnici (5.35) můžeme upravit pomocí rovnice kontinuity pro fluktuace rychlosti, z níž vyplývá identita

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 u_k u_l}{\partial x_k \partial x_i}, \quad (5.43)$$

do následujícího tvaru

$$\overline{\varepsilon} = \nu \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}} + \nu \overline{\frac{\partial^2 u'_k u'_l}{\partial x_k \partial x_i}}. \quad (5.44)$$

Jednoduchými aritmetickými operacemi lze rovněž dospět ke vztahu pro střední turbulentní rychlost disipace vyjádřenou pomocí fluktuací vířivosti

$$\overline{\varepsilon} = \nu \overline{\omega'_k \omega'_k} + 2\nu \overline{\frac{\partial^2 u'_k u'_l}{\partial x_k \partial x_i}}. \quad (5.45)$$

Pro homogenní turbulenci odpadne druhý člen na pravé straně rovnice (5.44) i (5.45) a pro rychlost disipace dostáváme zjednodušený vztah

$$\bar{\varepsilon} = \nu \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_l} \frac{\partial u'_k}{\partial x_l}} = \nu \overline{\omega'_k \omega'_k}. \quad (5.46)$$

Ukazuje se, že zjednodušený vztah pro rychlost disipace (5.46), který je exaktně platný pouze pro homogenní turbulenci, platí s dostatečnou přesností ve většině turbulentních proudů za předpokladu dostatečně vysoké hodnoty Reynoldsova čísla. Je to dáno tím, že prostorové derivace okamžité rychlosti obsažené v prvním členu mají podstatně větší velikost než derivace veličin středovaných, což je případ Reynoldsova napětí  $\overline{u'_i u'_j}$  ve členu druhém. Druhý člen proto můžeme zanedbat.

Pro izotropní turbulenci platí pro výpočet střední turbulentní rychlost disipace zjednodušený vzorec

$$\bar{\varepsilon} = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\right)^2}, \quad (5.47)$$

kde směr 1 je libovolný směr (u izotropního proudového pole jsou všechny směry ekvivalentní) a tento index není počítací.

Pozn.: V dalších kapitolách, zejména v kapitole 7., budeme turbulentní složku rychlosti disipace  $\varepsilon$  již značit bez znaménka středování, rozumět ale budeme vždy střední hodnotu v čase, nikoli její okamžitou hodnotu.

### 5.2.5. Střední vířivost

Vektor vířivosti  $\boldsymbol{\omega}$  byl již dříve definován jako rotace vektoru rychlosti  $\boldsymbol{u}$ . Pro pole vířivosti potom platí, že jeho divergence je identicky nulová (viz (12.10)):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (5.48)$$

Reynoldsův rozklad pro rychlosti (5.1) můžeme použít také na vířivost

$$\boldsymbol{\omega} = \bar{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}'. \quad (5.49)$$

Jelikož rovnice (5.48) je lineární, analogický vztah musí platit také pro obě složky zvlášť, tedy divergence pole střední vířivosti i jejích fluktuací je nulová, jinými slovy všechna tato vektorová pole jsou solenoidální.

Helmholtzovu rovnici pro okamžitou vířivost jsme již odvodili dříve, nyní ji přepíšeme do složkového tvaru

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} = \omega_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (5.50)$$

Fyzikální interpretace jednotlivých členů je zleva doprava: nestacionární člen, konvektivní člen, člen charakterizující protahování vířů a vazká difúze.

Proveďme nyní Reynoldsův rozklad vířivosti a aplikujme na Helmholtzovu rovnici operaci středování. Dostáváme tak rovnici pro střední vířivost

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t}}_I + \underbrace{u_k \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial x_k}}_{II} = \underbrace{\omega_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{III} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \underbrace{\overline{\omega'_i u'_k}}_{IV} - \underbrace{\overline{u'_i \omega'_k}}_V \right] + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{\omega}_i}{\partial x_k \partial x_k}}_{VI}, \quad (5.51)$$

- I* zřejmě charakterizuje nestacionaritu,
- II* je advekce středním proudem,
- III* protahování související se středním proudem,
- IV* turbulentní advekce,
- V* turbulentní protahování a
- VI* vazká difúze.

Členy *IV* a *V* představují vliv turbulence na pole střední vířivosti, ostatní členy turbulencí ovlivněny nejsou.

Fluktuační složka vířivosti je potom popsána následující rovnicí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega'_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_k} &= \\ &= \overline{\omega_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} + \overline{\omega'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \overline{u'_k} \frac{\partial \overline{\omega_i}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{\omega'_i u'_k} - \overline{\omega'_k u'_i} + \overline{\omega'_k u'_i} - \overline{\omega'_i u'_k} \right] + \nu \frac{\partial^2 \omega'_i}{\partial x_k \partial x_k}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Lepší fyzikální představu o intenzitě vířivosti získáme zavedením nové fyzikální veličiny, která bývá nazývána „**enstrofie**“ (angl.: *enstrophy*). Enstrofie je důležitá veličina charakterizující míru nestacionárního zavíření proudění. Na rozdíl od vířivosti se jedná o skalár. Enstrofie  $\zeta$  je definována jako variance vířivosti

$$\zeta = \frac{1}{2} \overline{\omega'^2} = \frac{1}{2} \overline{\omega'_k \omega'_k}. \quad (5.53)$$

Vztah enstrofie  $\zeta$  k vířivosti  $\omega$  je ekvivalentní vztahu kinetické energie  $k$  a vektoru rychlosti  $\mathbf{u}$  – srovnej s rovnicí (5.11). Celková enstrofie je potom analogicky vyjádřena pomocí celkové vířivosti.

Dále platí identita

$$\frac{\overline{\varepsilon}}{\nu} = \zeta + \frac{\overline{\partial u'_k} \partial u'_l}{\partial x_l \partial x_k}, \quad (5.54)$$

kteřá naznačuje vztah mezi rychlostí disipace a enstrofií. V homogenní turbulenci totiž platí, že druhý člen na pravé straně výrazu (5.54) je roven 0. Ukazuje se, že i ve smykových oblastech, které zřejmě homogenní nejsou, lze s velmi dobrou přesností uvažovat vztah  $\zeta = \overline{\varepsilon}/\nu$ . Tento fakt nabízí možnost použití v modelech turbulence místní hodnoty enstrofie místo rychlosti disipace.

Celkovou enstrofií můžeme rozložit na 2 složky pomocí Reynoldsova rozkladu vířivosti

$$\frac{1}{2} \overline{\omega_k \omega_k} = \frac{1}{2} \overline{\omega_k} \overline{\omega_k} + \frac{1}{2} \overline{\omega'_k \omega'_k}. \quad (5.55)$$

Odvodíme nyní rovnici pro enstrofií, kterou dostaneme vynásobením rovnice pro vířivost, vynásobením vektorem vířivosti. Pro případ střední enstrofie vyjdeme z rovnice (5.51)

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial (1/2) \overline{\omega_k} \overline{\omega_k}}{\partial t}}_I + \underbrace{u_l \frac{\partial (1/2) \overline{\omega_k} \overline{\omega_k}}{\partial x_l}}_{II} &= \\ &= \underbrace{\overline{\omega_k} \overline{\omega_l} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_l}}_{III} - \underbrace{\overline{\omega_k} \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \frac{\overline{\omega'_k u'_l}}{IV} - \frac{\overline{u'_k \omega'_l}}{V} \right]}_{IV} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 (1/2) \overline{\omega_k} \overline{\omega_k}}{\partial x_l \partial x_l}}_{VI} - \underbrace{\nu \frac{\partial \overline{\omega_k}}{\partial x_l} \frac{\partial \overline{\omega_k}}{\partial x_l}}_{VII}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

- I* opět charakterizuje nestacionarity,
- II* je advekce středním proudem,
- III* je protahování související se středním proudem,
- IV* je turbulentní advekce a
- V* turbulentní protahování vírů,
- VI* je člen vazkého transportu a
- VII* je potom vazká disipace.

Při odvození rovnice pro flukтуаční složky enstrofie vyjdeme z rovnice (5.52)

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial (1/2) \overline{\omega'_k \omega'_k}}{\partial t}}_I + \underbrace{u_l \frac{\partial (1/2) \overline{\omega'_k \omega'_k}}{\partial x_l}}_{II} &= \\ &= \underbrace{\overline{\omega'_k \omega'_l} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_l} + \overline{\omega_l \omega'_k} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_l} - \overline{\omega'_l u'_k} \frac{\partial \overline{\omega_k}}{\partial x_l}}_{III} + \underbrace{\overline{\omega'_k \omega'_l} \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_l}}_{IV} - \underbrace{\frac{\partial (1/2) \overline{u'_l \omega'_k \omega'_k}}{\partial x_l}}_{V} + \underbrace{\nu \frac{\partial (1/2) \overline{\omega'_k \omega'_k}}{\partial x_l \partial x_l}}_{VI} - \underbrace{\nu \frac{\partial \overline{\omega'_k}}{\partial x_l} \frac{\partial \overline{\omega'_k}}{\partial x_l}}_{VII}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Členy představují:

- I* charakterizuje nestacionaritu,
- II* je advekce středním proudem,
- III* potom představuje vazbu mezi středním proudem a turbulencí,
- IV* turbulentní protahování související s fluktuacemi rychlosti,
- V* je transport související s nehomogenitami a
- VI* je vazká disipace.

Jednotlivé členy v této rovnici mají velmi proměnnou velikost v závislosti na Reynoldsově čísle. Předpokládáme-li velmi vysoké hodnoty Reynoldsova čísla, potom se ukazuje, že na pravé straně rovnice (5.57) jsou členy *IV* a *VI* řádově větší než ostatní. Pro fluktuační složku enstrofie potom dostáváme zjednodušenou rovnici, která odpovídá případu bez přítomnosti gradientů ve středním proudu

$$\frac{\partial(1/2)\overline{\omega'_k\omega'_k}}{\partial t} + u_l \frac{\partial(1/2)\overline{\omega'_k\omega'_k}}{\partial x_l} = \overline{\omega'_k\omega'_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \nu \frac{\partial \omega'_k}{\partial x_l} \frac{\partial \omega'_k}{\partial x_l}. \quad (5.58)$$

Tato rovnice popisuje dynamiku malých měřítek, neříká však nic o chování v oblasti velkých měřítek. Pro homogenní turbulenci je druhý člen na levé straně rovnice (5.58) rovněž nulový. Můžeme jít ještě dále, je-li turbulentní proudění zcela vyvinuté při velmi vysoké hodnotě Reynoldsova čísla, potom lze dokonce zanedbat celou levou stranu rovnice (5.58), dostáváme tedy rovnováhu mezi turbulentním protahováním vírů a jejich rozpadem vlivem vazkosti. Pro dosažení rovnováhy potom musí být člen reprezentující protahování kladný, tedy musí docházet skutečně k protahování vírů, nikoli k jejich smršťování.

### 5.3. Hlavní problém turbulence

Z Reynoldsových rovnic (5.8) je zřejmé, že v turbulentním proudu závisí změna střední hybnosti nejen na silách molekulové vazkosti jako u laminárního proudění, ale také na přenosu hybnosti fluktuačními pohyby. Vzniká zdánlivé Reynoldsovo napětí, které má pro chování tekutiny v turbulentním stavu rozhodující význam. Jeho vznik souvisí s přenosem hybnosti pomocí turbulentních vírů obsažených v proudící tekutině. Každá z částic, ze kterých tyto víry sestávají, obsahuje obrovský počet molekul a pohybuje se do vzdáleností značně převyšujících volnou dráhu molekul. Proto je přenos skalárních i vektorových vlastností tekutiny využívající turbulentních mechanismů mnohem efektivnější než pomocí náhodných pohybů molekul, které určují vazké síly. Turbulentní smyková napětí jsou tedy v turbulentním proudu řádově větší než napětí vazká. Toto platí ve smykových oblastech všude kromě velmi tenké vrstvy v blízkosti povrchu – vazké podvrstvy.

Bohužel, systém Reynoldsových rovnic je neuzavřený – počet rovnic je nižší než počet proměnných v nich obsažených. Máme k dispozici 3 Reynoldsovy rovnice plus rovnici kontinuity. Z neznámých máme 3 složky střední rychlosti, střední tlak a 6 složek Reynoldsových napětí. Tedy 4 rovnice pro 10 neznámých. Soustavu je třeba uzavřít pomocí dalších rovnic. Napíšeme-li však rovnice pro Reynoldsova napětí (5.16), situace je ještě horší, protože tím získáme novou sadu neznámých momentů 2. a 3. řádu. Máme potom sice již 10 rovnic, ale 75 neznámých.

Problém neuzavřenosti soustavy Reynoldsových rovnic bývá nazýván „hlavním problémem turbulence“. Tento problém je řešen pomocí různých zjednodušení a předpokladů o vlastnostech Reynoldsových napětí. Jedná se vesměs o tzv. fenomenologické modely přijímané ad hoc bez hlubšího pochopení fyzikální podstaty jevů, které toto chování způsobují. Tyto modely jsou vytvářeny pomocí sady experimentálních dat, model není o mnoho více než pouhou regresí těchto dat. Přijetím takového modelu jsou často obětovány fundamentální informace obsažené v N-S rovnicích. Tyto modely jsou označovány za artefakty na různých úrovních matematického aparátu. Důsledkem je, že mají velmi omezenou platnost, jsou použitelné pouze na případy, ze kterých byly odvozeny, případně na velmi podobné případy s pouze malými modifikacemi. Obecně, každá třída případů turbulentního proudění tekutiny vyžaduje svůj vlastní takový model nebo jeho variantu.

## 5.4. Bernoulliho rovnice

Použití Bernoulliho rovnice je velmi časté v technických aplikacích. Nyní odvodíme tuto rovnici z obecných N-S rovnic za přijetí určitých předpokladů, tak objasníme podmínky platnosti Bernoulliho rovnice a její použitelnost v turbulenci.

Předpokládejme **nevazkou, nestlačitelnou** tekutinu při **stacionárním** proudění. Chování takové tekutiny lze popsat Eulerovou rovnicí pro stacionární proudění

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}, \quad (5.59)$$

kde  $\mathbf{g}$  je vektor vnějších zrychlení. Gravitační zrychlení  $\mathbf{g}$  působí proti směru osy  $x_3$ , můžeme tedy tento člen vyjádřit následujícím způsobem

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3, \quad (5.60)$$

kde  $\mathbf{e}_3$  je jednotkový vektor ve směru osy  $x_3$ . Dále pro libovolný vektor  $\mathbf{u}$  platí následující vektorová identita (viz také (12.11))

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (5.61)$$

Rovnici (5.59) potom můžeme přepsat následujícím způsobem

$$\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\frac{\nabla p}{\rho} - g\mathbf{e}_3. \quad (5.62)$$

Po dalších úpravách dostáváme

$$\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{2} \nabla(u^2) + g\mathbf{e}_3 = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (5.63)$$

kde  $u$  je modul vektoru rychlosti  $|\mathbf{u}|$ .

Sledujme nyní vývoj této rovnice při pohybu podél proudnice. Vynásobíme proto rovnici skalárně elementárním vektorem  $d\mathbf{s}$ , který leží na proudnici

$$\frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{2} \nabla(u^2) \cdot d\mathbf{s} + g\mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{s} = [\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})] \cdot d\mathbf{s}, \quad (5.64)$$

$d\mathbf{s}$  má směr proudnice, to znamená, že je také rovnoběžné s místním vektorem rychlosti  $\mathbf{u}$ . Vektor  $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$  je pak k tomuto směru kolmý, proto vymizí pravá strana rovnice (5.64).

Dále pro tlak platí vztah

$$\nabla p \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial p}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3} dx_3 = dp. \quad (5.65)$$

Stejný vztah platí pro kvadrát rychlosti. Můžeme tedy rovnici (5.64) dále přepsat

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{d(u^2)}{2} + g dx_3 = 0. \quad (5.66)$$

Tuto rovnici můžeme nyní integrovat podél proudnice a pro nestlačitelnou tekutinu dostáváme známý vztah nazývaný též Bernoulliho rovnice nebo Bernoulliho teorém

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + g x_3 = H = konst, \quad (5.67)$$

kde  $H$  je Bernoulliho konstanta.

Bernoulliho teorém platí **podél proudnic** (ty jsou pro stacionární proudění totožné s trajektoriemi) a **podél vírových čar** (vektorové čáry pole  $\boldsymbol{\omega}$ ). Bernoulliho konstanta  $H$  může být pro každou proudnici jiná. Substitucí dostáváme vztah

$$\nabla H = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (5.68)$$

kteřý nám říká, že veličina  $H$  je konstantní v celé oblasti tehdy, když vektorová pole  $\mathbf{u}$  a  $\boldsymbol{\omega}$  jsou paralelní, tedy jinými slovy proudnice a vírové čáry splývají. Další možností je případ, kdy je proudění nevířivé, tedy vířivost je všude a v každém okamžiku rovna nule.

Z výše uvedeného vyplývá, že použití Bernoulliho rovnice se obecně omezuje na laminární proudění a pro turbulentní proudění neplatí. Pro homogenní turbulentní proud však lze tento přístup použít pro střední hodnoty tlaku a rychlosti s tím, že je třeba provést korekci s ohledem na fluktuace. Do Bernoulliho rovnice použijeme střední rychlost  $U$  a modifikovaný tlak  $\bar{P}$  podle (5.21).

## 5.5. Transport pasivního skaláru

Pasivní skalár je taková veličina, která je spojena přímo s tekutinou a která neovlivňuje její vlastnosti důležité z hlediska dynamiky tekutin – tedy hustotu a viskozitu. Pasivním skalárem může být například teplota nebo koncentrace určité příměsi za předpokladu, že zanedbáme vliv změn této hodnoty na výše uvedené materiálové veličiny.

Pro molekulovou difúzi pasivního skaláru  $\theta$  platí rovnice

$$\frac{D\theta}{Dt} = \kappa \nabla^2 \theta, \quad (5.69)$$

v případě difúze tepla, kdy  $\theta$  je teplota tekutiny, máme na levé straně substanciální derivaci  $\theta$  podle času,  $\kappa$  je potom obecně molekulární difuzivita, v tomto případě se jedná o tepelnou difuzivitu (tj. molekulární tepelnou vodivost tekutiny). Tato rovnice neuvažuje dynamiku proudění, pouze molekulární efekty – např. transport skaláru napříč proudovým polem v případě laminárního proudění.

Provedme kvalitativní analýzu této rovnice. Nechť  $L$  je typický rozměr oblasti,  $\Delta\theta$  je rozdíl teplot a  $T_m$  je časové měřítko molekulárního přenosu skaláru. Potom platí řádová relace:

$$\frac{\Delta\theta}{T_m} \sim \kappa \frac{\Delta\theta}{L^2} \Rightarrow T_m \sim \frac{L^2}{\kappa}. \quad (5.70)$$

Proces °molekulární difúze je charakterizován Schmidtovým číslem

$$Sh = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (5.71)$$

pro případ teploty jakožto pasivního skaláru přechází Schmidtovo číslo v Prandtlovo číslo. Typická velikost Prandtlova čísla běžných tekutin je v řádu jednotek (vzduch 0,7, voda 7).

Uvažujme nyní druhý případ přenosu skaláru pomocí turbulentního proudění tekutiny, které může být generováno např. vztlakovou silou při jejím lokálním ohřevu. Největší struktury vznikající v oblasti budou mít řádově rozměr této oblasti  $L$  a typická rychlost proudění charakterizující pohyby v tekutině na těchto měřítkách je  $u$ . Časové měřítko charakterizující přenos skaláru turbulentními pohyby největších měřítek bude řádově:

$$T_t \sim \frac{L}{u}. \quad (5.72)$$

Vyjádřeme nyní řádovou velikost poměru časových měřítek při molekulárním a turbulentním přenosu skaláru:

$$\frac{T_m}{T_t} \sim \frac{L^2}{\kappa L} \frac{u}{L} = \frac{Lu}{\kappa}. \quad (5.73)$$

Pokud přijmeme předpoklad, že Prandtlovo číslo má řád jednotek, můžeme tvrdit, že poměr časových měřítek při molekulárním a turbulentním přenosu skaláru se řádově rovná velikosti Reynoldsova čísla, které charakterizuje turbulentní pohyb tekutiny  $Re = Lu/\nu$ . Turbulentní proudění je charakterizováno vysokými hodnotami Reynoldsova čísla (řádově  $10^3$  a více), jeho hodnota řádově určuje urychlení procesu difúze vlivem turbulentních pohybů.

## 6. Vznik turbulence

Vznik turbulentního proudění v určité oblasti je podmíněn vznikem jisté situace ve zkoumané oblasti.

Proces vzniku turbulence způsobuje porušení symetrií N-S rovnic. Vznikají totiž různé více či méně pravidelné periodické struktury, které způsobují, že symetrie posunutí v čase či v prostoru platí pouze pro jisté diskrétní hodnoty tohoto posunutí, rovnající se násobkům periody struktur. Při dostatečně velkém Reynoldsově čísle vzniká chaotické proudění a symetrie znovu nabývají na své platnosti, i když pouze ve statistickém smyslu.

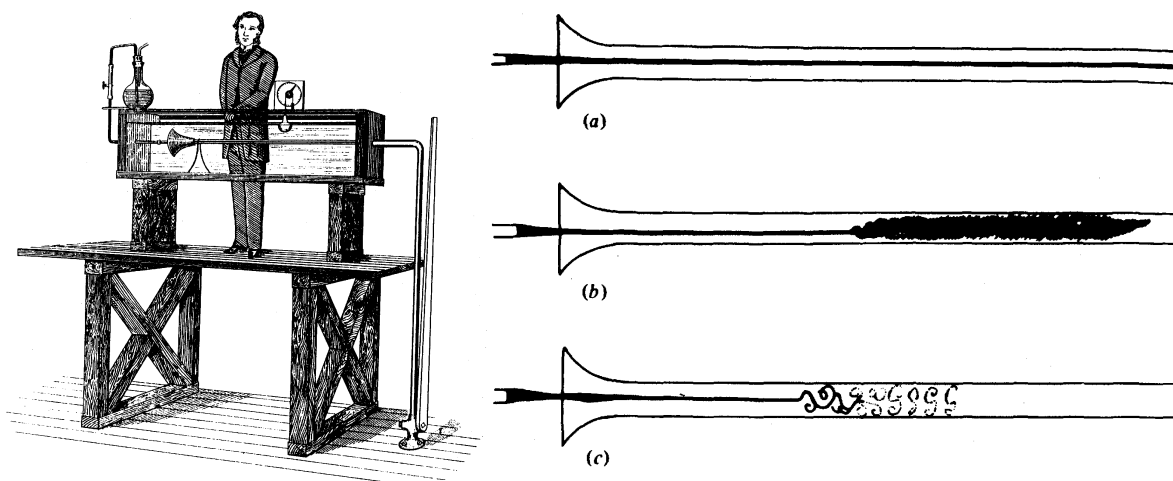
Přechod laminárního proudění do turbulence můžeme pozorovat ve smykových oblastech různých typů při zvyšování rychlosti proudění. Celý proces je nastartován vznikem nestability systému vzhledem k určitému druhu poruch. Velmi malé poruchy všech typů jsou v proudící tekutině vždy přítomny, je to dáno povahou tekutiny, která se skládá z velmi velkého počtu částic – molekul. Pohyb, který souvisí s molekulární strukturou tekutin (Brownův pohyb) v sobě obsahuje všechny módy a frekvence, které struktura umožňuje. Má charakter bílého šumu.

Ztráta stability laminárního proudění má za následek vznik určitých pravidelných vírových útvarů a jejich růst. Ten nejprve probíhá podle lineárního scénáře, posléze se stále více uplatňuje vliv nelinearit. Dochází ke vzájemným interakcím jednotlivých struktur a jejich částí. V určité fázi dochází ke vzniku chování, které je typické pro nelineární systémy – ke vzniku deterministického chaosu. Po homogenizaci v prostoru je proces přechodu do turbulence ukončen.

Budeme nyní podrobněji zkoumat jednotlivé fáze tohoto procesu. Nejprve však uvedeme několik historických informací.

### 6.1. Reynoldsův experiment

Osborn Reynolds popisuje ve svém věhlasném článku z roku 1883 svůj experiment zkoumání stability proudění v potrubí kruhového průřezu při výtoku ze zásobníku. Schéma tohoto experimentu je na obr. 6.1. Reynolds dochází k následujícím závěrům:



Obr. 6.1 – Reynoldsův experiment (originální obrázek)

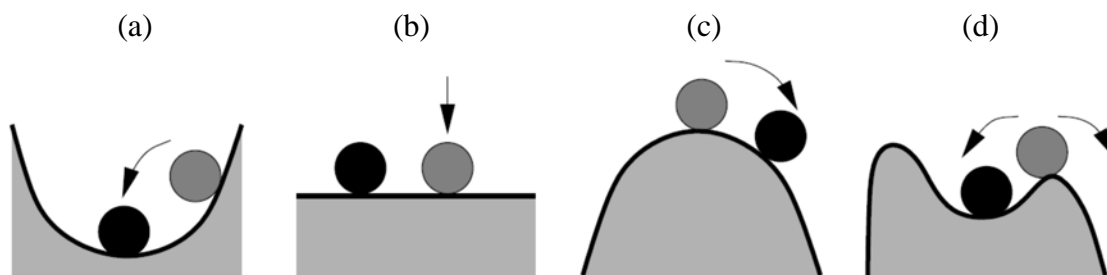
- Pokud je rychlost proudění dostatečně nízká, proužek barviva vytváří téměř dokonalou přímou čáru uvnitř potrubí (viz obr. 6.1(a)).
- Pokud není voda v zásobníku dokonale klidná, proužek se při stále nízké rychlosti proudění může pohybovat v potrubí, nevytvářejí se však pravidelné poruchy.

- Když je postupně v malých krocích rychlost proudění zvyšována, potom v určitém místě potrubí, avšak vždy v dostatečné vzdálenosti od vtoku, dochází k náhlému promíchání barviva a k rovnoměrnému obarvení tekutiny v celém průřezu potrubí (viz obr. 6.1(b)). Další zvyšování rychlosti vede k přibližování bodu zhroucení proudění blíže ke vtoku, nikdy jej však nedosáhne. Při použití jiskrového výboje pro osvětlení oblasti zhrouceného proudění je zřetelná soustava více či méně zřetelných vírů různých velikostí (viz obr. 6.1(c)).

Reynolds správně rozpoznal klíčovou úlohu bezrozměrného rychlostního parametru, který nyní nazýváme Reynoldsovým číslem:

$$\text{Re} = \frac{Ud}{\nu}, \quad (6.1)$$

kde  $U$  označuje hodnotu rychlosti proudění v trubce,  $d$  je průměr trubky a  $\nu$  je kinematická viskozita. Reynolds hledal „kritickou“ hodnotu tohoto parametru, která odděluje režimy s výskytem a bez výskytu zhroucení proudění. Při tomto hledání zjistil, že celá záležitost je značně komplikovanější. Podle jeho slov: „... kritická rychlost je velmi citlivá na přítomnost poruch na vstupu do trubice ... nabízí se tedy hypotéza, že celý problém je problémem nestability poruch určité velikosti a stability poruch menších...“. Reynoldsovi se nakonec pečlivým provedením experimentu podařilo získat stabilní proudění pro Reynoldsova čísla kolem 13000. Později byly publikovány experimenty, kdy bylo pozorováno stabilní proudění trubici při Reynoldsových číslech větších než 90000. Pro srovnání: za „běžných“ laboratorních podmínek bez speciálních opatření se tato hodnota pohybuje okolo 2000. Dále Reynolds zjistil, že hodnota Reynoldsova čísla 2000 je hranicí kdy se původně turbulentní proudění vrátí zpět do laminárního stavu. Výše popsané výsledky experimentů i teoretické rozborů problému ukazují, že vyvinuté proudění trubkou je stabilní vzhledem k infinitesimálně malým poruchám pro libovolnou hodnotu Reynoldsova čísla. Analogii k proudění v trubici lze schematicky znázornit na obr. 6.2, (a) představuje stabilní stav, (b) indiferentní stav na mezi stability, (c) je nestabilní stav, kdy sebemenší výchylka vede k nestabilitě a konečně (d) je stav, který je stabilní vzhledem k malým poruchám a nestabilní vzhledem k velkým.



Obr. 6.2 – Schematické znázornění stability

## 6.2. Teorie stability

Přejdeme nyní ke zkoumání otázek stability matematickými prostředky. Předpokládejme, že poruchy proudění jsou infinitesimálně malé, takové, že jakékoli součiny veličin o velikosti řádu poruchy můžeme v matematickém modelu zanedbat. Jedná se tedy o linearizovaný model, který v některých případech dobře vystihuje chování některých skutečných nelineárních tekutinových systémů blízko meze stability. Stabilitu případu, který je popisován výše, totiž Poiseuilleovo proudění potrubím, tímto způsobem vyšetřovat nelze. Lze ale dobře modelovat některé jiné případy, jako je Kelvinova-Helmholtzova nestabilita, Taylorova nestabilita, Bénárdova nestabilita a některé další případy. Je však třeba zdůraznit, že linearizovaný model lze úspěšně použít pouze za splnění výchozího předpokladu, že totiž poruchy proudu jsou infini-

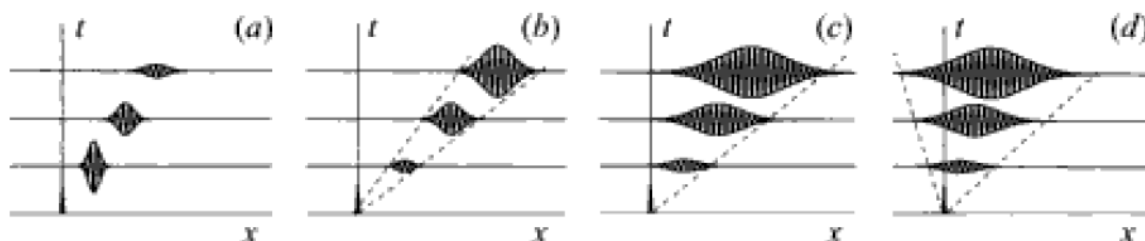
tesimálně, resp. velmi malé. Prakticky to znamená, že pomocí linearizovaného modelu můžeme úspěšně předpovědět hranici stability systému, jeho chování za touto hranicí již předpovědět nelze, k tomu by bylo třeba analyzovat úplný, nelineární model.

Základním přístupem při zkoumání hydrodynamické stability je použití lineárního matematického modelu. Předpokládá se, že laminární proudění tekutiny je podrobena vlivu určitých poruch, které mohou být buďto přinášeny proudem (fluktuační rychlosti) nebo přicházejí ze stěny (drsnot). Lineární teorie potom zkoumá rychlost změn těchto poruch v laminárním proudě. Základní otázkou je, zda poruchy s časem zanikají či zda v čase rostou. Pokud mají tendenci zanikat, je proudění „stabilní“, pokud naopak rostou, potom je proudění „nestabilní“ a je vytvořen základní předpoklad pro jeho přechod do turbulentního stavu. Vlastnost stability proudění vzhledem k poruchám je dána podmínkami proudění, zejména má vliv Reynoldsovo číslo. Ukazuje se, že zpravidla se vzrůstajícím Reynoldsovým číslem má proudění větší sklon k nestabilitě.

Růst poruch v čase a v prostoru je podmíněno vznikem oblastí s „absolutní nestabilitou“ (angl.: *absolute instability*). Oblast, která je absolutně nestabilní, se vyznačuje vlastností, že lokálně vložená porucha je zvětšována jak v čase, tak v prostoru. Výsledkem je, že v určitém časovém horizontu se porucha rozšíří na celou absolutně nestabilní oblast. Příkladem absolutně nestabilních oblastí je úplav za špatně obtékaným tělesem.

Dále rozeznáváme „konvektivní nestabilitu“ (angl.: *convective instability*), která je charakterizována odplováním (konvekcí) poruchy s proudem tak, že po určitém čase již porucha nemůže ovlivnit proudění v místě jejího původního umístění. Typickým příkladem je mezní vrstva vznikající při paralelním obtékání tuhého povrchu.

Růst poruch při absolutní a konvektivní nestabilitě systému je schematicky zobrazen na obr. 6.3. Na svislé ose je čas, na vodorovné potom poloha poruchy v proudovém poli. Situace (a) odpovídá stabilnímu stavu – porucha se v čase zmenšuje. Obr. 6.3(b) představuje konvektivní nestabilitu, (c) je nestabilita na pomezí mezi konvektivním a absolutním typem, (d) je potom zcela absolutní nestabilita.

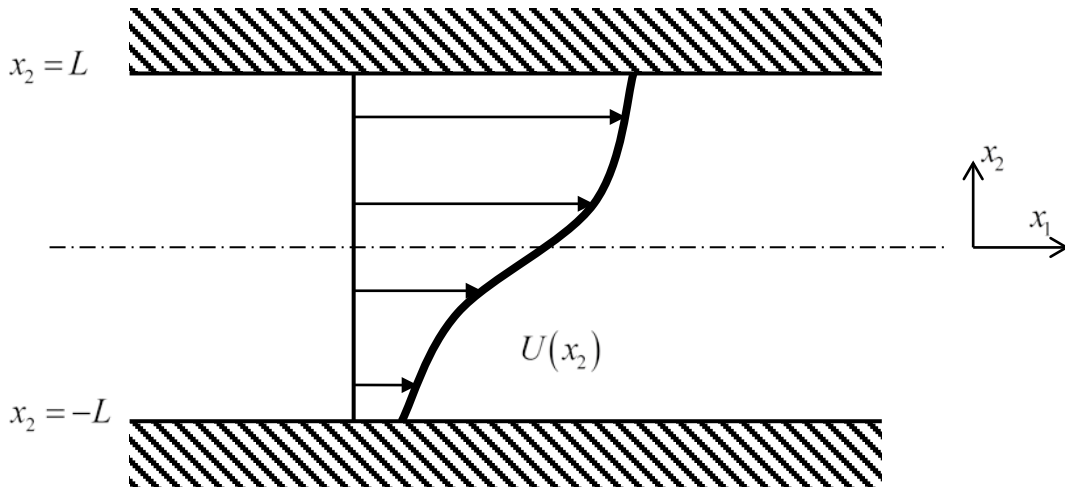


Obr. 6.3 – Konvektivní a absolutní nestabilita

Dynamické systémy v souvislosti se stabilitou podléhají hystereznímu chování. Znamená to, že vlastnosti systému jsou dány nejen jeho stavem, ale také způsobem jak se do daného stavu dostal. Prakticky to znamená, že pokud zkoumáme stabilitu daného systému v závislosti na jednom vybraném parametru, typicky se jedná o Reynoldsovo číslo, potom pro danou hodnotu tohoto parametru stabilita systému závisí na tom, zda jsme dospěli k aktuální hodnotě zvyšováním či snižováním parametru, případně i jakým způsobem (jak rychle, ...).

### 6.2.1. Stabilita nevazkého proudění

Uvažujme rovinné proudění nevazké tekutiny mezi dvěma rovnoběžnými deskami podle obr. 6.4. Na obrázku je naznačen rychlostní profil, v případě nevazkého proudění neplatí podmínka nulové rychlosti na stěně.



Obr. 6.4 – Smykové proudění nevazké tekutiny

Proudění tekutiny je v tomto případě popsáno Eulerovými rovnicemi, v tomto případě budou

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (6.2)$$

Jejich stacionárním řešením je zřejmě  $\mathbf{u}_0 = [U(x_2), 0, 0]$  rovnoběžné smykové proudění ve směru osy  $x_1$  s libovolným průběhem  $U(x_2)$  při konstantním tlaku  $p_0$  v celé oblasti. Uvažujme nyní rovinné poruchy rychlostního pole  $\mathbf{u}' = [u'_1, u'_2, 0]$  a podobně také  $p'$  poruchy pole tlakového. Dosadíme nyní vztahy pro okamžité hodnoty rychlostí a tlaku do (6.2) a rovnice kontinuity, po linearizaci a úpravách dostáváme rovnice pro fluktuace

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_1}{\partial t} + U \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + u'_2 \frac{dU}{dx_2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial u'_2}{\partial t} + U \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Rovnice (6.3) můžeme použít pro výpočet velikosti poruch v čase při zadání jistých počátečních podmínek. Takovýto výpočet by byl poměrně náročný a výsledky málo přehledné s omezenou vypovídací schopností o obecných vlastnostech systému. Analýzu stability proto provedeme pomocí modální analýzy systému rovnic (6.3).

Protože koeficienty rovnic (6.3) závisí pouze na  $x_2$ , můžeme předpokládat jejich řešení, které je exponenciální funkcí souřadnice  $x_1$  a času  $t$ . Obecně bychom měli uvažovat poruchy ve všech 3 dimenzích, podrobným rozбором problému však lze ukázat, že nejméně stabilní je rovinná porucha, jejíž tvar nezávisí na souřadnici  $x_3$ . Toto je obsahem tzv. Squireova teorému. Poruchy tedy uvažujeme ve tvaru

$$\begin{aligned} u'_1(x_1, x_2, t) &= \hat{u}_1(x_2) \exp[i(\kappa x_1 - \omega t)], \\ u'_2(x_1, x_2, t) &= \hat{u}_2(x_2) \exp[i(\kappa x_1 - \omega t)], \\ p'(x_1, x_2, t) &= \hat{p}(x_2) \exp[i(\kappa x_1 - \omega t)]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Stříškou jsou označeny amplitudy,  $i$  je zde imaginární jednotka a  $\kappa$  a  $\omega$  jsou frekvence v prostorové a časové oblasti. Fyzikální význam má pochopitelně pouze reálná část výrazů

(6.4). Z podmínky, že řešení musí být konečné pro  $x_1 \rightarrow \pm\infty$  vyplývá, že konstanta  $\kappa$  je reálné číslo. Frekvence fluktuací v čase  $\omega$  je ovšem obecně komplexní číslo  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ . Výraz (6.4) tedy představuje vlny, které se pohybují prostorem ve směru osy  $x_1$  fázovou rychlostí rovnou  $\omega_r$  a které v čase rostou či se zmenšují jako výraz  $\exp(\omega_i t)$ . O stabilitě těchto vln můžeme rozhodnout podle kritéria, které sleduje hodnotu imaginární části frekvence  $\omega$ . Pokud je  $\omega_i < 0$ , potom jsou vlny v čase stabilní a postupně zanikají, pro  $\omega_i > 0$  vlny rostou a jsou nestabilní,  $\omega_i = 0$  charakterizuje neutrálně stabilní případ na mezi stability.

Nyní dosadíme výrazy (6.4) do rovnic (6.3) a dostaneme soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} -i(\omega - U\kappa)\hat{u}_1 + U'\hat{u}_2 &= -\frac{1}{\rho}i\kappa\hat{p}, \\ -i(\omega - U\kappa)\hat{u}_2 &= -\frac{1}{\rho}\hat{p}', \\ i\kappa\hat{u}_1 + \hat{u}_2' &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Zde  $'$  značí derivaci podle  $x_2$ .

Z rovnic (6.5) lze vyloučit  $\hat{p}$  a  $\hat{u}_1$ , potom dostáváme

$$\hat{u}_2'' + \left[ \frac{\kappa U''}{\omega - \kappa U} - \kappa^2 \right] \hat{u}_2 = 0, \quad (6.6)$$

S okrajovými podmínkami  $\hat{u}_2 = 0$  na stěně, tedy pro  $x_2 = \pm L$ .

Touto rovnicí, která bývá nazývána Rayleighovou rovnicí, je definován standardní Sturm-Liouvilleův problém vlastních hodnot  $\omega$ . Problém vlastních hodnot můžeme řešit pro jakýkoli daný profil střední rychlosti  $U(x_2)$  a rozhodnout tak o jeho stabilitě. Lord Rayleigh již roku 1880 navrhl kvalitativní analýzu rovnice (6.6), která definuje postačující podmínku pro stabilitu profilů střední rychlosti.

Vynásobme rovnici (6.6) veličinou  $\hat{u}_2^*$ , která je komplexně sdružená k amplitudě  $\hat{u}_2$  a provedme integraci napříč kanálem, potom dostáváme

$$\int_{-L}^L \hat{u}_2^* \hat{u}_2'' dx_2 + \int_{-L}^L \left[ \frac{\kappa U''}{\omega - \kappa U} - \kappa^2 \right] |\hat{u}_2|^2 dx_2 = 0. \quad (6.7)$$

Integrujeme po částech

$$\left[ \hat{u}_2^* \hat{u}_2' \right]_{-L}^L - \int_{-L}^L |\hat{u}_2'|^2 dx_2 + \int_{-L}^L \left[ \frac{\kappa U''}{\omega - \kappa U} - \kappa^2 \right] |\hat{u}_2|^2 dx_2 = 0. \quad (6.8)$$

První člen na levé straně musí být roven 0, protože  $\hat{u}_2$  i  $\hat{u}_2^*$  jsou na stěnách nulové. V rovnici máme tedy jedinou komplexní veličinu, kterou je frekvence  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ . Dosadíme tedy tuto hodnotu do rovnice (6.8)

$$-\int_{-L}^L |\hat{u}_2'|^2 dx_2 + \int_{-L}^L \left[ \frac{(\omega_r - \kappa U - i\omega_i)\kappa U''}{|\omega - \kappa U|^2} - \kappa^2 \right] |\hat{u}_2|^2 dx_2 = 0 \quad (6.9)$$

a zkoumejme nyní odděleně imaginární a reálnou část rovnice, které musí být obě splněny. Imaginární část rovnice (6.7) nám dává

$$\omega_i \kappa \int_{-L}^L \frac{U'' |\hat{u}_2|^2}{|\omega - \kappa U|^2} dx_2 = 0. \quad (6.10)$$

Předpokládejme nyní, že existuje aspoň jeden mód, který je charakterizován  $\omega_i > 0$ , kdy dochází k exponenciálnímu růstu vln v čase. Podle vztahu (6.10) je to možné pouze za předpo-

kladu, že je nulový integrál. To však může nastat pouze za předpokladu, že veličina  $U''(x_2)$  mění znaménko někde v intervalu  $-L \leq x_2 \leq L$ .

Tato skutečnost je obsahem Rayleighova teoremu o inflexním bodu:

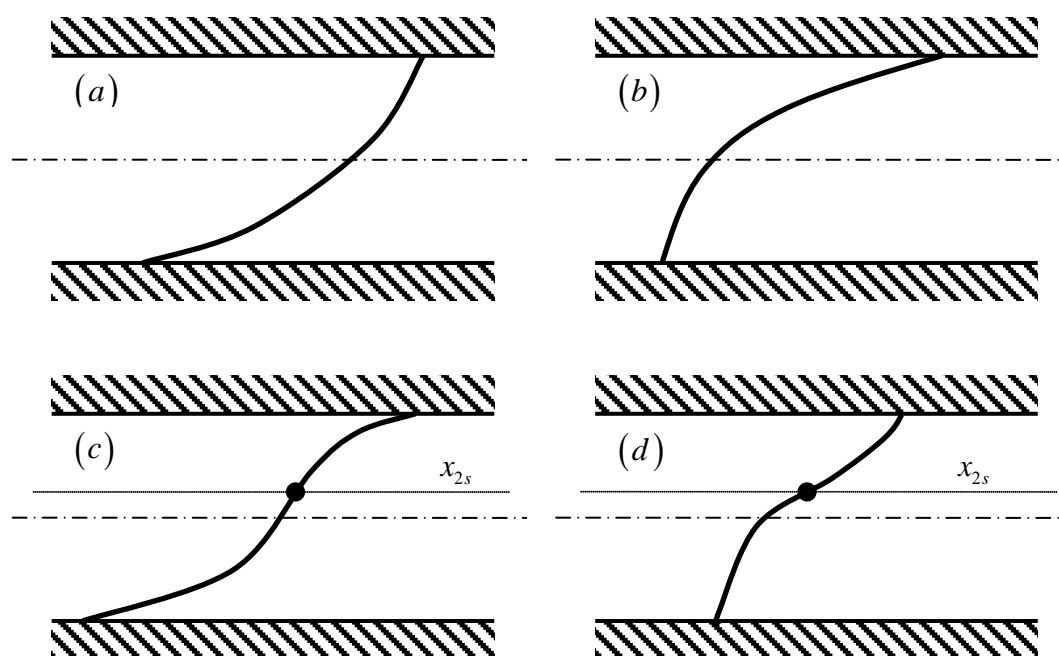
*Nutnou podmínkou pro lineární nestabilitu smykového proudění neviskózní tekutiny s profilem střední rychlosti  $U(x_2)$  je změna znaménka  $U''(x_2)$  někde v proudu.*

Zdůrazněme, že přítomnost inflexního bodu na profilu střední rychlosti je **nutnou** podmínkou pro neviskózní nestabilitu proudění vzhledem k infinitesimálně malým poruchám, není však podmínkou **postačující**!

Podobným způsobem lze analyzovat také reálnou část rovnice (6.7), výsledkem je Fjørtoftův teorém:

*Nutnou podmínkou pro nestabilitu je, aby platila nerovnice  $U''(U - U_s) < 0$  někde uvnitř proudového pole, kdy  $x_{2s}$  je bod, kde  $U'' = 0$  a  $U_s = U(x_{2s})$ .*

Tato podmínka je silnější než Rayleighova. Některé případy profilů střední rychlosti proudění neviskózní tekutiny, které jsou nestabilní podle Rayleighova kritéria mohou být stabilní podle kritéria Fjørtoftova. Příklad profilů rychlosti při neviskózním proudění kanálem je na obr. 6.5.



Obr. 6.5 – Profily rychlosti při neviskózním proudění kanálem  
(a)-(c) stabilní, (d) možná nestabilita

Profily na obr. 6.5(a) a (b) jsou stabilní, protože  $U'' > 0$  resp.  $U'' < 0$  v celé oblasti a nemění tedy znaménko. Profil na obr. 6.5(c) je také stabilní, protože ačkoli  $U'' = 0$  a je tak splněna Rayleighova podmínka, dle Fjørtofta je profil stabilní neboť platí  $U''(U - U_s) \geq 0$  v celé oblasti. Pouze profil (d) je nestabilní podle obou kritérií.

Typickými praktickými případy proudění vykazující profily s neviskózní nestabilitou je výtok paprsku do klidného prostředí nebo úplav za tělesem. Naopak stabilní podle těchto kritérií je proudění v kanále nebo mezní vrstva bez přítomnosti gradientu tlaku, protože odpovídající rychlostní profil nemá inflexní bod.

## 6.2.2. Stabilita vazkého proudění

Teorie stability nevazkého proudění je relativně dobře propracována. Otázkou však je, do jaké míry lze výsledky této analýzy aplikovat na případ proudění reálné tekutiny, která je vždy vazká. Kvalitativní vliv vazkosti na výsledky získané pomocí teorie nevazké stability formuloval již Osborn Reynolds:

- Proudění nevazké tekutiny může být nestabilní, zatímco proudění vazké tekutiny za stejných podmínek je stabilní. Vazkost tedy stabilizuje proudění.
- Proudění nevazké tekutiny může být stabilní, zatímco proudění vazké tekutiny za stejných podmínek je nestabilní. Zde je vazkost příčinou nestabilního chování.

Z těchto dvou do značné míry protichůdných tvrzení je zřejmé, že výsledky stabilitní analýzy prováděné pro nevazkou tekutinu je nutno brát s rezervou. V dalším se pokusíme ukázat vliv vazkosti na stabilitu proudění.

Vyšetřování stability proudění vazké tekutiny budeme provádět podobným způsobem jako pro nevazkou tekutinu. Místo Eulerových rovnic však pro nás nyní budou výchozím bodem rovnice N-S. Předpokládejme opět rovinné proudění. Zavedme pro poruchové rychlosti proudovou funkci  $\psi$  pomocí definice:

$$u'_1 = \partial\psi/\partial x_2, \quad u'_2 = -\partial\psi/\partial x_1. \quad (6.11)$$

Předpokládejme poruchovou proudovou funkci ve tvaru

$$\psi = \hat{\psi}(x_2) \exp[i(\kappa x_1 - \omega t)]. \quad (6.12)$$

Okrajové podmínky nyní obsahují také podmínku nulové normálové i tečné poruchové rychlosti na stěně, je tedy ve tvaru  $\hat{\psi} = \hat{\psi}' = 0$  pro  $x_2 = \pm L$ . Výsledná rovnice má potom tvar

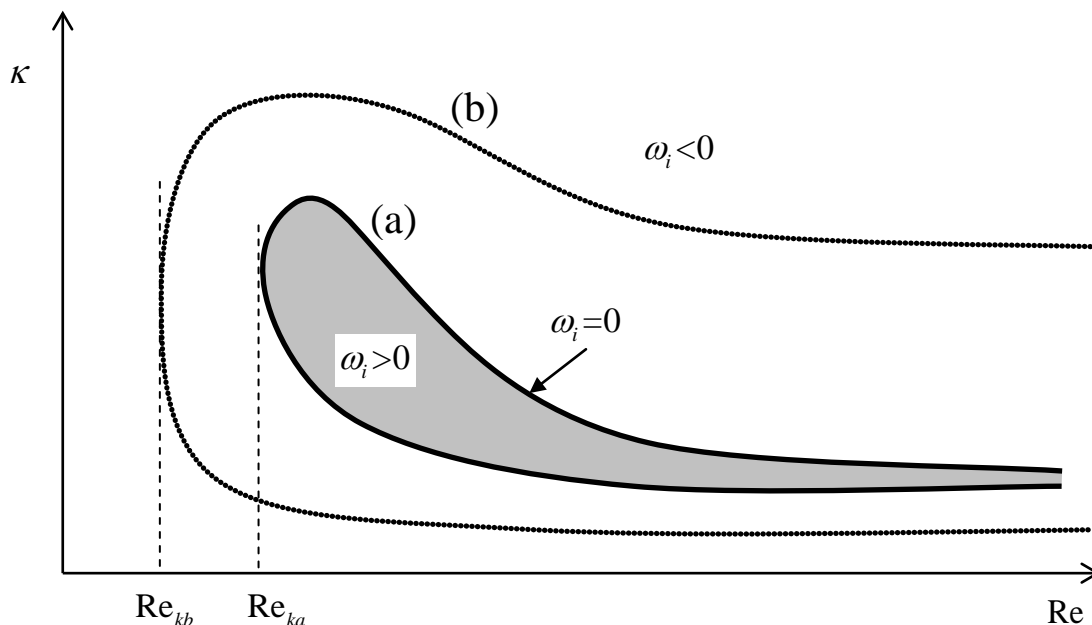
$$i\nu(\hat{\psi}'''' - 2\kappa^2\hat{\psi}'' + \kappa^4\hat{\psi}) + (\kappa U - \omega)(\hat{\psi}'' - \kappa^2\hat{\psi}) - \kappa U''\hat{\psi} = 0. \quad (6.13)$$

Jedná se o Orrův-Sommerfeldovu rovnici, která byla odvozena již v roce 1907 a je ekvivalentem Rayleighovy rovnice pro vazké proudění. Je to obyčejná lineární diferenciální rovnice 4. řádu, pro kterou řešíme problém vlastních hodnot  $\omega$ .

Uvažujme Poiseuillovo proudění v rovinném kanálu. Proudění vzniká působením tlakového gradientu podél kanálu. Vyvinuté Poiseuillovo proudění má parabolický profil střední rychlosti

$$U(x_2) = U_{\max} \left(1 - \frac{x_2^2}{L^2}\right). \quad (6.14)$$

Povšimněme si, že profil střední rychlosti nemá inflexní bod a je tedy podle nevazké teorie stability stabilní. Řešení problému stability při uvažování vazkosti je na obr. 6.6.



Obr. 6.6 – Stabilitní diagram pro (a) Poiseuillův profil a (b) profil s inflexním bodem

Diagram na obr. 6.6 ukazuje oblasti kladné imaginární části  $\omega_i$  komplexní frekvence  $\omega$ , která odpovídá nestabilnímu vývoji poruch, v rovině parametrů vlnového čísla  $\kappa$  a Reynoldsova čísla  $Re = U_{\max} L/\nu$ . Případ (a) na obr. 6.6 odpovídá parabolickému rychlostnímu profilu rovinného Poiseuilleova proudění, případ (b) potom ukazuje proudění charakterizované profilem střední rychlosti s inflexním bodem (např. paprsek vytékající do klidné tekutiny). Při překročení kritického Reynoldsova čísla  $Re_k$  může dojít k růstu poruch s odpovídajícím vlnovým číslem. U Poiseuilleova proudění v rovinném kanálu je hodnota  $Re_{ka} = 5772$ . Obecně platí, že u profilu rychlosti, který je podle ne vazké teorie stabilní (a) je oblast vazké nestability podstatně menší a nastává při vyšších hodnotách Reynoldsova čísla než v případě profilu nestabilního podle ne vazké teorie (b).

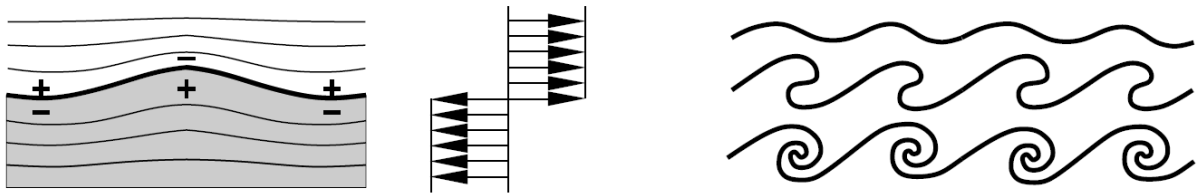
Na příkladu Poiseuilleova proudění lze ukázat dvojí vliv vazkosti na jeho stabilitu. Jednak má vazkost stabilizující vliv, protože ze stabilitní analýzy s uvažováním vazkosti bylo určeno kritické Reynoldsovo číslo, zvýšíme-li hodnotu kinematické vazkosti  $\nu$ , má to za následek zvýšení kritické rychlosti. Na druhou stranu má vazkost destabilizující účinek, protože z ne vazké analýzy vyplývá, že Poiseuilleovo proudění je vždy stabilní, kdežto uvažováním vazkosti dojdeme ke konečné hodnotě kritického Reynoldsova čísla.

### 6.2.3. Druhy hydrodynamické nestability

V této kapitole ukážeme některé druhy nestability proudění za jistých specifických podmínek. Představená proudová pole jsou první fází přechodu do turbulentního stavu.

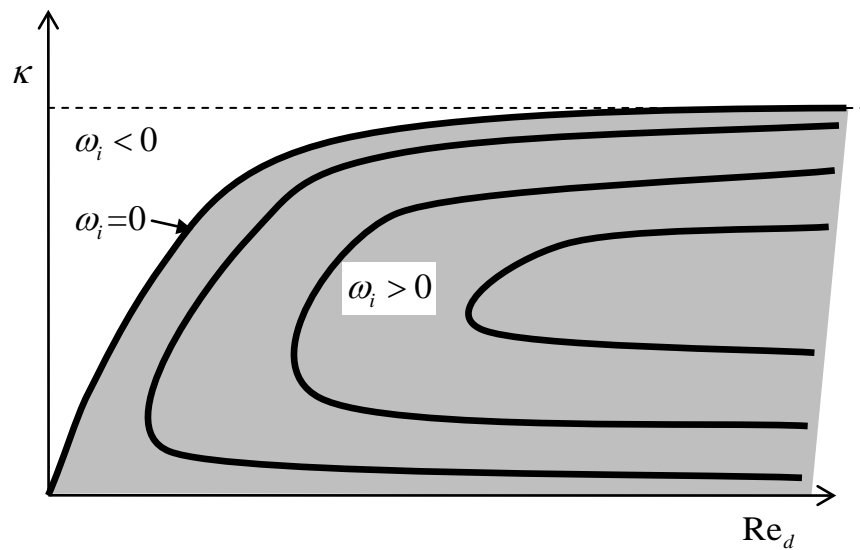
#### 6.2.3.1. Kelvinova-Helmholtzova nestabilita

Jedná se o nejjednodušší, ilustrativní případ smykového proudu, u něhož může dojít ke ztrátě stability. Přesto však se tento typ nestability velmi často vyskytuje v praxi, např. při obtékání křídel, při odtržení mezní vrstvy nebo ve zvrstvené atmosféře. Často se vyskytuje na hranici dvou tekutin různých fyzikálních vlastností. Situaci schematicky naznačuje obr. 6.7. V proudu v blízkosti hranice vznikají poruchy tlaku, přetlak (+) a podtlak (-), tím vzniká deformace hranice ve tvaru periodických vírových struktur.



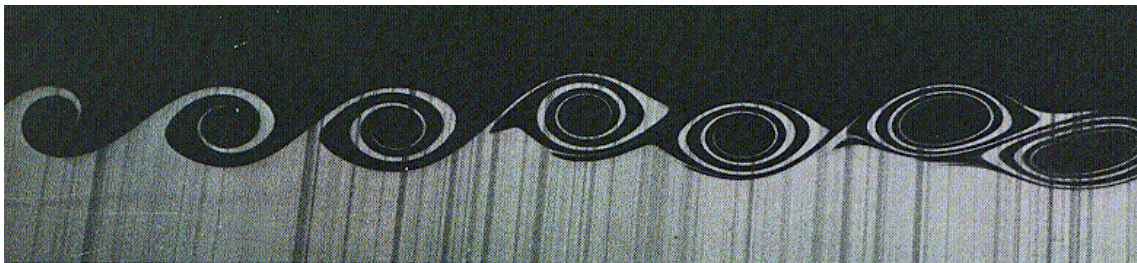
Obr. 6.7 – Schéma vzniku Kelvinovy-Helmholtzovy nestability

Matematicky lze stabilitu této volné smykové vrstvy řešit podobně jako případ mezní vrstvy (viz výše). Můžeme uvažovat počáteční rychlostní profil  $U_0(x_2) = \tanh(x_2)$ . Lze potom aplikovat Orrův-Sommerfeldovu rovnici, která vede na stabilitní diagram, který je schematicky uveden na obr. 6.8. Podle tohoto diagramu je volná smyková vrstva nestabilní pro libovolnou hodnotu Reynoldsova čísla  $Re_d = U_\infty \cdot d / \nu$  ( $d$  je příčný rozměr smykové oblasti). Pro rostoucí  $Re_d$  se zvětšuje interval nestabilních vlnových čísel  $\kappa$ , až pro dostatečně vysoká Reynoldsova čísla dosáhne své maximální asymptotické hodnoty. Rychlost růstu poruch  $\omega_i$  v tomto případě obecně klesá s klesajícím  $Re_d$ . Na rozdíl od případu mezní vrstvy v tomto případě horní větev neutrální křivky stále stoupá. Tření ve volné smykové vrstvě působí proti ztrátě stability, vzhledem k poruchám s velkými vlnovými čísly (malé rozruchy) je proudění stabilní.



Obr. 6.8 – Stabilitní diagram pro volnou smykovou vrstvu

Skutečný, experimentálně získaný vzhled volné smykové vrstvy za podmínek Kelvinovy-Helmholtzovy nestability je na obr. 6.9.



Obr. 6.9 – Kelvinova-Helmholzova nestabilita

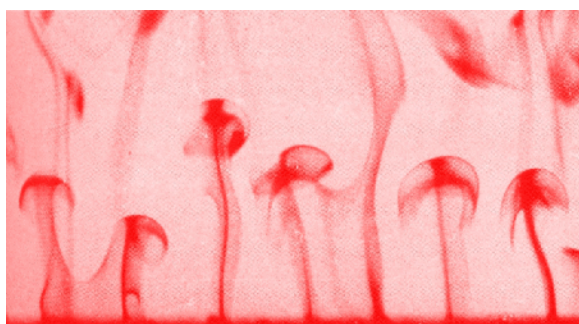
### 6.2.3.2. Rayleighova-Bénárdova nestabilita

Při tomto typu proudění je původně klidná tekutina uzavřena v nádobě, jejíž spodní stěna je ohřívána. Vlivem změn hustoty tekutiny při jejím ohřívání dochází v gravitačním poli k pohybu tekutiny uvnitř nádoby. Parametrem, který určuje obraz proudění v nádobě je Rayleighovo číslo

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\vartheta \nu}, \quad (6.15)$$

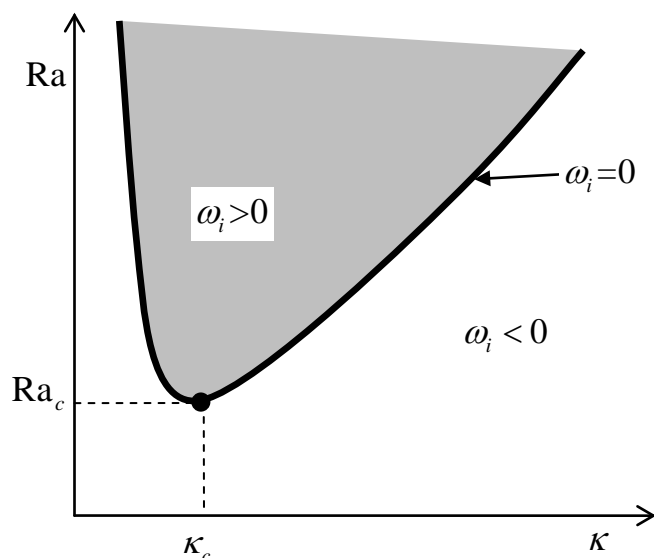
kde  $\alpha$  je součinitel tepelné roztažnosti tekutiny,  $\vartheta$  je součinitel tepelné difúze,  $g$  je gravitační zrychlení,  $\Delta T$  je rozdíl teploty dna a víka nádoby a  $L$  je svislý rozměr nádoby. Rayleighovo číslo vyjadřuje poměr gravitačních a vazkých sil.

Při vzniku nestability můžeme pozorovat typické houbovitě struktury – viz obr. 6.10. Další fází Rayleighovy-Bénárdovy nestability je vznik oblastí rotující tekutiny mezi zahřívanou a chladnou stěnou, tak jak bylo ukázáno na obr. 3.6 v kapitole o deterministickém chaosu a Lorenzově systému.



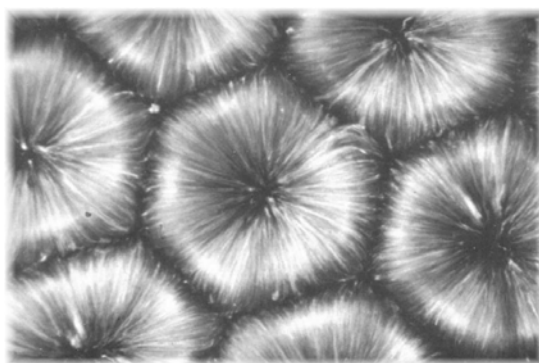
Obr. 6.10 – Taylorova-Couettova nestabilita

Na obr. 6.11 je stabilitní diagram určující oblast nestability v rovině Rayleighových čísel  $Ra$  a vlnových čísel  $\kappa$ . Minimální hodnota Rayleighova čísla pro nestabilitu  $Ra_c$  je 1707 a odpovídající vlnové číslo, které je určující pro rozměr vznikajících buněk je  $\kappa_c = 3,12$ .



Obr. 6.11 – Stabilitní diagram Rayleighovy-Bénardovy nestability

Při pohledu na proudění mezi stěnami svrchu můžeme pozorovat pravidelnou „buněčnou“ strukturu ve tvaru pravidelných šestiúhelníků. Tekutina stoupá středem, na okrajích potom klesá dolů. Fotografie vizualizace ze skutečného experimentu je na obr. 6.12.



Obr. 6.12 – Stabilitní diagram Rayleighovy-Bénardovy nestability

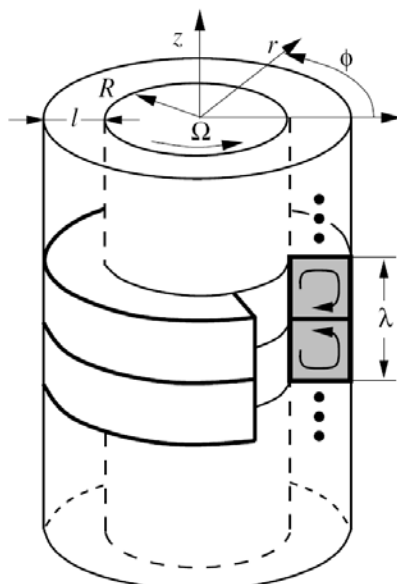
### 6.2.3.3. Taylorova-Couettova nestabilita

Tento typ nestability vzniká při vzájemné rotaci dvou souosých válců, mezera mezi nimi je naplněna vazkou tekutinou. Proudění je charakterizováno Taylorovým číslem, které vyjadřuje poměr odstředivých a vazkých sil. Jeho definice je

$$\text{Ta} = \frac{\Omega^2 R l^3}{\nu^2}, \quad (6.16)$$

kde  $\Omega$  je úhlová rychlost otáčení vnitřního válce,  $R$  je poloměr vnitřního válce,  $l$  je šířka mezery mezi válci a  $\nu$  je kinematická vazkost tekutiny. Schéma proudění v mezeře mezi válci po ztrátě stability je naznačeno na obr. 6.13.

Kritická hodnota Taylorova čísla  $\text{Ta}_c$  je kolem 1708, pro vyšší hodnoty vznikají prstenkové vírové struktury v mezeře mezi válci, odpovídající vlnové číslo je  $\kappa_c = 3,12$ . Hodnota vlnového čísla stoupá se stoupajícím Taylorovým číslem. Vlnová délka  $\lambda$  na obr. 6.13 je svázána s vlnovým číslem  $\kappa$  vztahem:  $\kappa = 2\pi/\lambda$ .



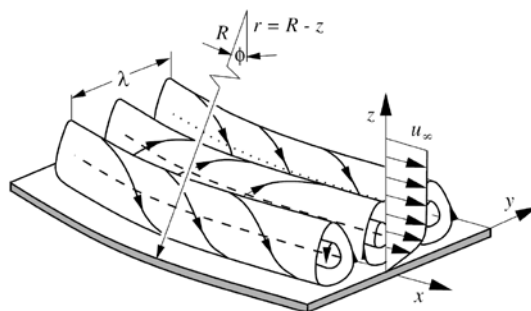
Obr. 6.13 – Taylorova-Couettova nestabilita

#### 6.2.3.4. Görtlerova nestabilita

Tento typ nestability je velmi podobný předchozímu případu. Nestabilita vzniká při proudění podél konkávně zakřivené stěny, v problému opět vystupují odstředivé a vazké síly, jejich poměr vyjadřuje Görtlerovo číslo

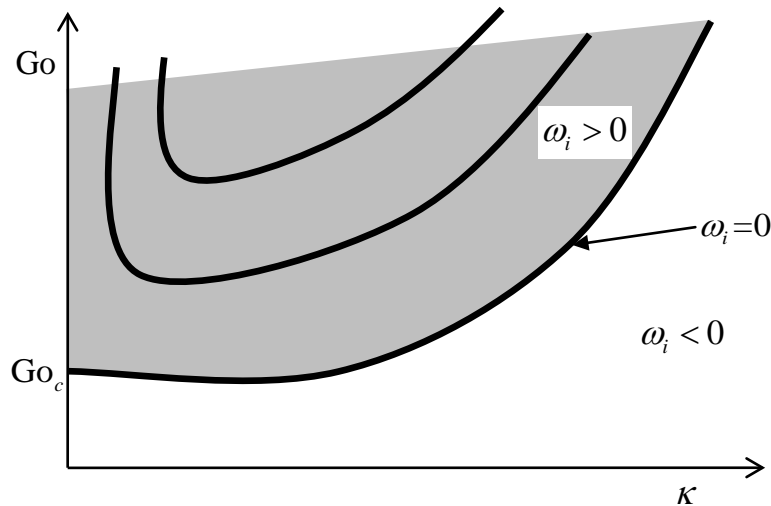
$$Go = \frac{U_\infty \theta}{\nu} \left( \frac{\theta}{R} \right)^{1/2}, \quad (6.17)$$

kde  $U_\infty$  je rychlost proudění mimo mezní vrstvu,  $\theta$  je pošnovací tloušťka mezní vrstvy,  $R$  je poloměr zakřivení stěny a  $\nu$  je kinematická vazkosta tekutiny. Situace je znázorněna na obr. 6.14. Při této definici Görtlerova čísla je jeho kritická hodnota potřebná pro vznik vírových struktur asi 0,3.



Obr. 6.14 – Görtlerova nestabilita

Stabilitní diagram v rovině Görtlerových čísel  $Go$  a vlnových čísel  $\kappa$  periodických pohybů orientovaných v příčném směru je na obr. 6.15. Vztah vlnového čísla a vlnové délky z obr. 6.14 je  $\kappa = 2\pi/\lambda$ .



Obr. 6.15 – Stabilitní diagram Görtlerovy nestability

### 6.2.3.5. Tollmienova-Schlichtingova nestabilita

Tollmienova-Schlichtingova nestabilita nastává v mezní vrstvě při dosažení kritické hodnoty Reynoldsova čísla

$$\text{Re}_x = \frac{U_\infty x_1}{\nu}, \quad (6.18)$$

kde  $U_\infty$  je rychlost proudění mimo mezní vrstvu,  $x_1$  je vzdálenost od náběžné hrany a  $\nu$  je kinematická vazkost tekutiny.

Reynoldsovo číslo může být definováno dvojím způsobem, buďto se za délkový parametr bere vzdálenost od náběžné hrany  $x_1$  nebo tloušťka mezní vrstvy  $\delta$ . Definice jsou ekvivalentní, pouze číselné hodnoty takto definovaných Reynoldsových čísel jsou rozdílné. Mezi délkovými parametry totiž pro laminární mezní vrstvu platí vztah  $\delta \sim x_1 \sqrt{\text{Re}_x}$ .

Tollmienovy-Schlichtingovy vlny jsou představovány víry v mezní vrstvě orientovanými ve směru kolmém ke směru proudění, tj.  $x_2$ . Kritická hodnota Reynoldsova čísla je pro případ laminární mezní vrstvy na desce bez přítomnosti tlakového gradientu asi  $\text{Re}_x = 10^5$  (tato hodnota odpovídá Reynoldsově číslu definovanému pomocí tloušťky mezní vrstvy asi 500).

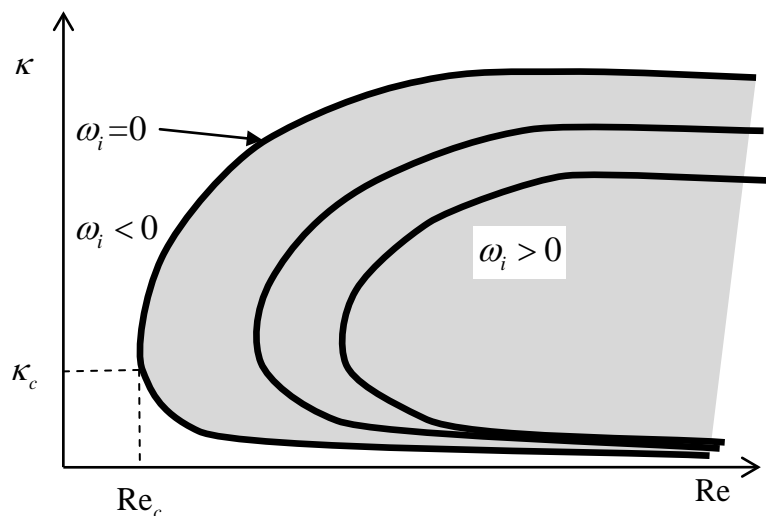
Tímto typem nestability se budeme podrobně zabývat v následujícím odstavci 6.3., který pojednává o přechodu do turbulence.

### 6.2.3.6. Úplavy za tělesy

Za „špatně obtékanými tělesy“ (angl.: *bluff body*) vznikají oblasti zabrzděné tekutiny, kde může docházet i ke zpětnému proudění. Na hranicích mezi zabrzděnou a proudící tekutinou vznikají smykové oblasti, ve kterých může vzniknout nestabilita Kelvinova-Helmholtzova typu. Situace je však zde složitější, dochází k vazbě mezi ději probíhajícími v různých částech úplavu prostřednictvím tlakových signálů, výsledkem jsou kvazi-periodické struktury – „von Kármánova-Bénardova vírová stezka“ (angl.: *von Kármán-Bénard vortex street*) – viz obr. 3.12.

Stabilitní diagram pro tento případ je naznačen na obr. 6.16 a představuje situaci v rovině vlnových čísel  $\kappa$  a Reynoldsových čísel  $\text{Re}$ ,  $\omega_i$  je imaginární složka frekvence. Reynoldsovo číslo je definováno obvyklým způsobem na základě příčného rozměru tělesa. Nestabilita se projeví pro Reynoldsova čísla větší než je kritická hodnota  $\text{Re}_c$ , odpovídající vlnové číslo je

$\kappa_c$ . Například pro příčně obtékaný kruhový válec je  $Re_c = 44$ , kdy se do té doby stabilní víry stávají nestabilními a vzniká von Kármánova-Bénardova vírová řada (viz Obr. 3.13).



Obr. 6.16 – Stabilitní diagram úplavu

Dalším případem jsou paprsky vyfukované do klidného prostředí, situace je ovšem obrácená než v případě úplavu – v oblasti paprsku je vysoká rychlost, mimo je rychlost proudění velmi malá (blíží se k 0). Stabilitní diagram vychází kvalitativně velmi podobný jako v případě úplavu na obr. 6.16., kritické Reynoldsovo číslo definované pomocí průměru ústí trysky je nyní asi 500.

### 6.2.3.7. Další nestability

Existuje celá řada dalších nestabilit různých typů. Jako příklad uvedme Rayleighovu-Taylorovu nestabilitu, která vzniká za přítomnosti dvou tekutin různých hustot za působení gravitace nebo Saffmanovu-Taylorovu nestabilitu, která vzniká při míšení dvou chemicky nereagujících tekutin, které se liší viskozitou.

Obecně platí, že proudění ve smykové oblasti libovolného typu ztratí svou stabilitu za podmínky, že objemové síly (setrvačné, odstředivé, vztlakové,...) působící na tekutinu nabudou převahu nad silami vazkými.

## 6.3. Přechod do turbulence

Ztrátu stability proudění daného typu můžeme považovat za první fázi přechodu proudění do turbulence, následuje scénář vlastního přechodu smykové oblasti do turbulence. Ukazuje se, že tento scénář má určité rysy, které jsou společné pro všechny případy probírané výše. Jevy spojené s přechodem smykových vrstev do turbulence budeme demonstrovat na „kanonickém“<sup>8</sup> případě mezní vrstvy na rovinné desce bez přítomnosti tlakového gradientu.

Ve smykové oblasti vystavené působení poruch mohou nastat dva různé scénáře přechodu do turbulence.

Pokud je amplituda poruch vznikajících vnějším buzením „malá“, potom můžeme pozorovat víceméně pravidelné oscilace související s prostorovými strukturami vlnového charakteru, které vznikají poněkud po proudu od jistého kritického bodu. Tyto vlny mají podobu určité vlastní tvary dané laminární smykové vrstvy. První fáze jejich vývoje může být dostatečně přesně popsána pomocí linearizovaného modelu. Pravidelné útvary se zvětšují, oscilace se zesilují, stále více se uplatňuje nelineární charakter, proces končí rozpadem pravidelných

<sup>8</sup> „kanonické“ případy jsou takové, které jsou obvykle definovány pomocí velmi jednoduchých okrajových či počátečních podmínek, v literatuře existuje velké množství srovnávacího materiálu popisujícího tyto případy.

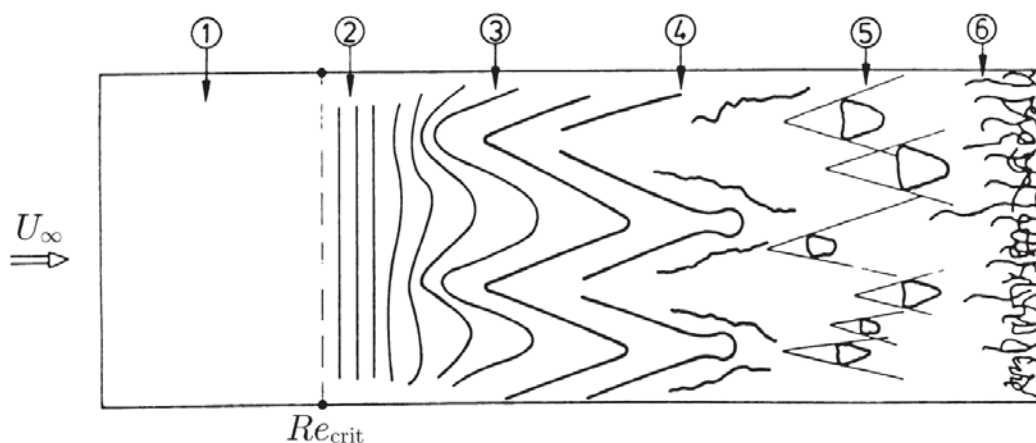
struktur a vznikem turbulence. Tento scénář bývá nazýván „přirozený přechod do turbulence“ (angl.: *natural transition*).

Pokud je amplituda vnějšího buzení „dostatečně velká“, potom jsou nastartovány přímo nelineární procesy a velmi záhy je proces přechodu do turbulence ukončen. Odtud název tohoto procesu – „zkrácený přechod“, anglický výraz pro tento jev – *bypass transition* – potom vyjadřuje skutečnost, že lineární fáze přechodu vůbec nenastává, je přeskočena (*bypassed*).

Skutečnost, že chování smykové vrstvy je závislé na amplitudě poruch, kterým je vystavena, souvisí s nelineárním charakterem problému. Lépe než lineární stabilita charakterizuje vlastnosti smykové vrstvy její „receptivita“ (angl.: *receptivity*). Tato vlastnost smykové oblasti ukazuje její vývoj za působení skutečných poruch, které jsou charakterizovány frekvencí a amplitudou konečné velikosti.

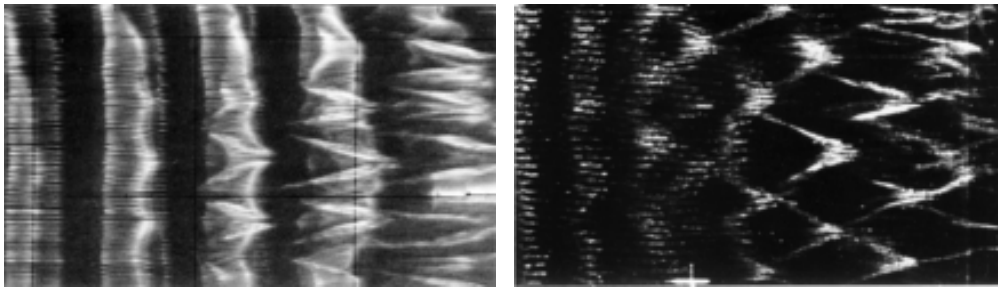
### 6.3.1. Přirozený přechod do turbulence

Základní scénář přechodu laminárního proudění do turbulence je schematicky ukázán na obr. 6.17 pro případ mezní vrstvy na desce v pohledu kolmo k desce. Tekutina proudí podél desky laminárně (pozice ①) rychlostí  $U_\infty$ , dokud se její pohyb v jistém místě, označeném jako  $Re_{crit}$ , nestane nestabilním. Dále po proudu jsou v mezní vrstvě generovány rovinné poruchy (pozice ②) známé jako Tollmienovy-Schlichtingovy vlny, které se vlivem sekundárních nestabilit rychle vyvíjejí v prostorové poruchy trojúhelníkového tvaru (pozice ③). Z nich potom vznikají prostorové „vlásečnicové víry“ (angl.: *hairpin vortex*) (pozice ④), které mají tendenci se rozpadat. Dále rostou a interagují spolu, tím vznikají v prostoru náhodně distribuované „skvrny turbulence“ (angl.: *turbulence spots*) (pozice ⑤), nakonec vzniká zcela vyvinutá mezní vrstva (pozice ⑥). Tím je přechod do turbulence ukončen.



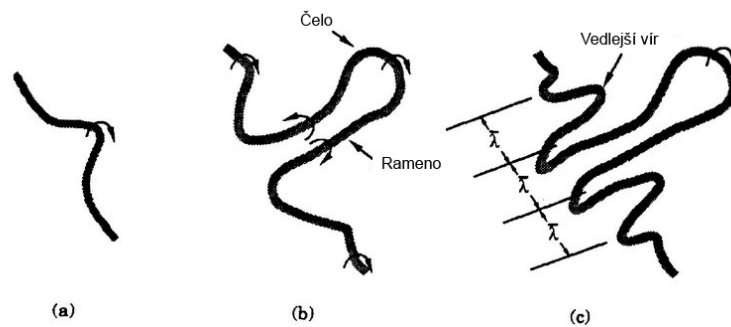
Obr. 6.17 – Schéma přirozeného přechodu mezní vrstvy na rovinné desce z laminárního stavu do turbulence

Chování poruch v oblasti raného stádia přechodu (pozice ② až ③) lze popsat linearizovaným modelem, růst poruch je tedy v čase exponenciální. Trojúhelníkové sekundární nestability z obr. 6.17 odpovídají klasické topologii poruch, jsou řazeny za sebou, jedná se o K-typ (Klebanoff). Další možností je výraznější uplatnění subharmonických procesů, potom dostáváme prostřídanou šachovnicovou topologii struktur, scénář potom nazýváme H-typ (Herbert). Vizualizaci těchto struktur uvádíme na obr. 6.18. Zobrazena je oblast ztráty stability, tekutina proudí zleva doprava. Existují i další typy struktury proudění v této oblasti, jejich konkrétní tvar úzce souvisí s charakterem poruch, které jej vyvolaly. V každém případě dochází v této fázi k významnému protahování vírových struktur a tím ke generování vířivosti.



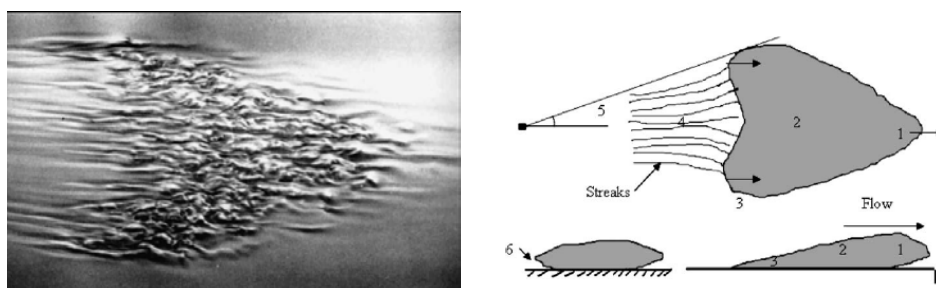
Obr. 6.18 – Schéma sekundárních nestabilit typu K (vlevo) a H (vpravo)

Dále po proudu (pozice ④) je dosaženo mezní amplitudy těchto pravidelných poruch, v této fázi lze zjistit stále rostoucí odchylky od chování předpovězeného na základě lineární teorie. Tvar vlásečnicových vírů je stále pravidelný, má periodický charakter po rozpětí a je schematicky ukázán na obr. 6.19. Na obr. 6.19a je počáteční porucha, která se dále vyvíjí v typický vlásečnicový vír s čelem a rameny (obr. 6.19b) a dále na obr. 6.19c vlivem sekundární nestability vznikají vedlejší struktury. Ramena vlásečnicových vírů se přibližují, až spolu vzájemně interagují a dochází k rozpadu celé struktury, vznikají skvrny turbulence.



Obr. 6.19 – Vývoj Tollmienovy-Schlichtingovy nestability, vlásečnicový vír

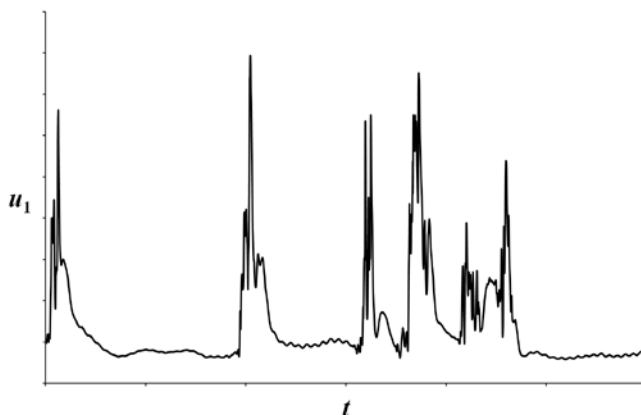
Vznik skvrn turbulence je proces náhodný jak v prostoru, tak v čase, tyto útvary však mají zcela přesně definovaný tvar a vývoj. Frekvence vzniku skvrn turbulence po proudu stoupá, až je jimi zaplněn celý prostor – vzniká vyvinutá turbulentní mezní vrstva. Na obr. 6.20 je vlevo fotografie povrchu vodního přechodového proudu, v pravé části obrázku je schéma turbulentní skvrny. Pozice 1 označuje přední převalisou část, 2 je turbulentní jádro, 3 je boční okraj, 4 je oblast zklidnění za skvrnou turbulence, 5 je poloviční úhel rozšiřování skvrny a 6 je příčný převalis.



Obr. 6.20 – Skvrna turbulence

Místo, kde se vyskytují první skvrny turbulence, bývá označováno za „počátek přechodu“ (angl.: *onset of transition*). Toto místo lze identifikovat jednak ze záznamů signálu pomocí sondy se žhaveným drátkem, ale také pomocí měřících metod umožňujících vyhodnocení

pouze časově středních veličin jako jsou pneumatické metody měření tlaku. V bodě počátku přechodu totiž můžeme pozorovat počátek poklesu tvarového parametru, zatímco střední hodnota povrchového tření se zde začíná odchylovat od hodnot typických pro laminární mezní vrstvu. V přechodové oblasti frekvence výskytu skvrn turbulence stále roste, až tyto skvrny rovnoměrně vyplní celou oblast. Tím je proces přechodu do turbulence ukončen. Oblast vývoje skvrn turbulence je charakteristická výskytem intermitentního signálu při bodovém měření rychlosti. V časovém záznamu signálu se vyskytují úseky laminárního i turbulentního charakteru podle toho, jak skvrny turbulence procházejí místem měření. Příklad takového signálu je na obr. 6.21. Místo o úsecích „laminárního“ a „turbulentního“ signálu je zde spíše namíste hovořit o úsecích s „nízkou turbulencí“ a „zvýšenou turbulencí“.



Obr. 6.21 – Intermitentní signál

U intermitentního signálu se vyhodnocuje „součinitel intermitence“ (angl.: *intermittency coefficient*)  $\gamma$ , který je definovaný jako poměr součtu časových úseků, v nichž se vyskytuje turbulentní signál  $T_t$  k celkové době pozorování  $T$

$$\gamma = T_t / T. \quad (6.19)$$

Hodnota  $\gamma = 0$  znamená, že signál má zcela laminární charakter,  $\gamma = 1$  odpovídá zcela turbulentnímu signálu, intermitentní signál je charakterizován hodnotou  $0 < \gamma < 1$ .

Pro případ přechodu do turbulence mezní vrstvy na rovinné desce představuje velikost lineární oblasti asi 75 až 85 procent vzdálenosti mezi náběžnou hranou a začátkem přechodu do turbulence, oblast nelineárních efektů je tedy velmi krátká.

V případě, že časově střední proudové pole má prostorový charakter (například u šípovitého křídla), lineární fáze procesu přechodu se prakticky neliší. Rozdílné však je chování nestabilních vln, které se nyní šíří různými směry. Podle lineární teorie je směr nejméně stabilního šíření vln určován zrychlením či zpomalením proudění v daném směru. Zvláštností nestability prostorového proudění je, že poruchy s nulovou frekvencí (tedy s konstantní amplitudou) se stávají velice nestabilními, jakmile příčná rychlost překročí určitou mez. V experimentech tyto stacionární poruchy můžeme zviditelnit, jedná se o víceméně pravidelně rozmístěné pruhy ve směru proudění.

O nelineárním mechanismu vývoje nestabilit pro prostorové případy, který vede k přechodu do turbulence je toho v současné době známo pouze velmi málo. Jasně je pouze to, že oblast, ve které nelineární efekty hrají dominantní roli, je v případě prostorového proudění podstatně větší než v případě proudění rovinného.

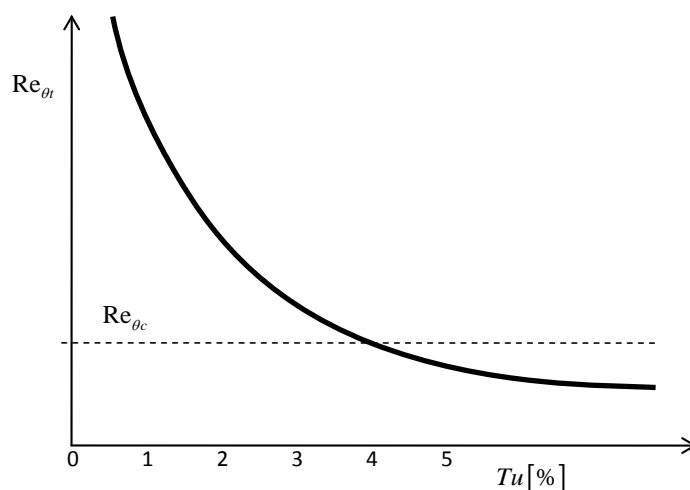
### 6.3.2. Zkrácený přechod do turbulence

Před rokem 1940 nebyli experimentátoři schopni identifikovat Tollmien-Schlichtingovy vlny jakož i následné sekundární nestability v mezní vrstvě. Mělo se za to, že přechod je způsoben jiným typem poruch a jinými mechanismy jejich růstu. Morkovin (1969) prohlásil, že

„můžeme mechanismus Tollmienovy-Schlichtingovy vln zcela přeskočit (angl.: *bypass*)“, tento typ přechodu do turbulence se od té doby nazývá „*bypass transition*“, česky „zkrácený přechod“. Při zkráceném přechodu se uplatňuje přímo nelineární mechanismus růstu poruch, který v klasickém scénáři nastupuje až v pozdějších fázích přechodu ⑤ a ⑥ (viz obr. 6.17). Později se ukázalo, že tento mechanismus skutečně může být nastartován velkými poruchami, např. vysokou úrovní okolní turbulence. Nemonotónní růst poruch může vést k turbulenci při mnohem nižších Reynoldsových číslech, zdánlivě se přitom zcela přeskočí exponenciální růst modálních vln.

Dnes je již jasné, že všechny výše uvedené scénáře zahrnují v té či oné míře stejné prvky a mechanismy, které souvisejí se vznikem a vývojem koherentních struktur ve smykové vrstvě. Vlasečnicové víry hrají rozhodující roli i v případě zkráceného přechodu do turbulence a také v procesu samoudržování turbulentního proudění, jak bude ukázáno dále. Rozdíl je však v tom, že se tyto struktury vyskytují v těchto případech zcela nepravidelně v prostoru i v čase.

Zkrácený přechod proudění ve smykové vrstvě do turbulence nastává v případě velkých poruch působících na proudění a souvisí s nelineárním charakterem celého procesu. V případě mezní vrstvy se může jednat o poruchy v nabíhajícímu proudě, který je již turbulizován nebo o poruchy pronikající do mezní vrstvy ze stěny. V tom případě může jít o drsnost povrchu nebo o jeho vibrace. Není exaktně definována hranice mezi „malými“ poruchami, vedoucími ke scénáři přirozeného přechodu a „velkými“, které způsobí zkrácený přechod do turbulence. Pokud se jedná o poruchy v nabíhajícímu proudě, pak tato hranice je orientačně asi 1 % pro intenzitu turbulence. V každém případě dojde k podstatnému zkrácení oblasti přechodu mezní vrstvy do turbulence, délka přechodové oblasti může být v případě zkráceného přechodu podstatně kratší, oblast vyvinutého turbulentního proudění se může velmi přiblížit k bodu ztráty lineární stability. Na obr. 6.22 je příklad experimentálně získané závislosti Reynoldsova čísla počátku přechodu do turbulence v mezní vrstvě na rovinné desce  $Re_{\theta_t}$  definovaného pomocí pošinovací tloušťky mezní vrstvy na intenzitě fluktuací rychlosti v nabíhajícímu proudě  $Tu$ . Reynoldsovo číslo ztráty lineární stability je pro tento případ  $Re_{\theta_c} = 163$ . Povšimněme si, že při vysokých intenzitách turbulence nabíhajícího proudě může proces přechodu začít ještě před místem ztráty stability podle lineární teorie. Je to dáno tím, že také proces ztráty stability je ve skutečnosti nelineární, se vzrůstající amplitudou poruch klesá skutečná mez stability.



Obr. 6.22 – Závislost Reynoldsova čísla počátku přechodu na intenzitě turbulence nabíhajícího proudě

V procesu zkráceného přechodu do turbulence hraje roli nejen intenzita poruch, ale i jejich charakter a struktura. Významná jsou zejména charakteristická měřítko poruch v nabíhajícímu proudě, která jsou určující pro jejich útlum.

Obecně platí, že pokud jsme schopni zajistit, aby amplitudy poruch ve smykovém proudění byly extrémně nízké, lze přechod do turbulence značně oddálit.

Pro modelování zkráceného přechodu proudění do turbulence je lineární teorie stability nepoužitelná. Doposud neexistuje žádná obecná teorie pro modelování tohoto typu přechodu do turbulence, byly vytvořeny pouze fenomenologické modely založené na experimentálních datech.

## 7. Vyvinutá turbulence

V nevazké tekutině platí Kelvinův teorém, který říká, že cirkulace uzavřené materiální křivky je konstantní. Z toho vyplývá, že pokud dojde k natažení křivky vlivem poměrů při proudění, potom pro zachování hodnoty cirkulace musí dojít k nárůstu rychlosti cirkulačního proudění v okolí křivky. Jedná se o známou analogii krasobruslaře provádějícího piruetu. Pokud má ruce daleko od těla, jeho moment setrvačnosti je velký a rychlost otáčení malá. Pokud ruce přiblíží co nejvíce k ose otáčení (připaží či vzpaží), potom se sníží jeho moment setrvačnosti a při zachování rotační energie dojde ke zvýšení rychlosti otáčení. Tento mechanismus zmenšování velikosti vírových struktur a zvyšování vířivosti je uplatňován při kaskádovém přenosu energie. Víry jsou protahovány, tím se zmenšuje jejich příčný rozměr a zvětšují se hodnoty gradientů rychlosti. Mechanismus generování vířivosti protahováním vírů bude podrobněji ukázán v oddíle 10.2.4.

Představme si vývoj vírových struktur v nějaké oblasti proudící tekutiny, kde v určitém čase byly vlivem vnějších sil vygenerovány vírové struktury velkých měřítek. Vírová vlákna či trubice se poznenáhlu protahují, zároveň se deformují a různě přehýbají. Vzniká tak náhodně uspořádaná soustava stále menších vírových struktur. Pokud je rozměr těchto vírových struktur dostatečně veliký, nemá vazkost tekutiny podstatný vliv na tento proces. Dochází k místnímu zesilování vířivosti. Budeme-li při tomto procesu sledovat jistou dostatečně velikou omezenou oblast, potom vlivem zachování kinetické energie (disipaci můžeme pominout) je intenzita fluktuací rychlostního pole při procesu zmenšování měřítek stále stejného řádu. Z toho je zřejmé, že vířivost obsažená v jednotce objemu tekutiny nemůže příliš vzrůst.

Jakmile se však zmenší rozměr vírů pod jistou mez, viskozita poněmáhle nabude na významu. Člen obsahující vazkost a druhé prostorové derivace v N-S rovnicích roste rychleji než člen obsahující derivace pouze prvního řádu. Dochází tak k podstatnému zmenšování Reynoldsova čísla vztaženého k rozměru struktur, jeho hodnota je již příliš nízká. Vliv vazkosti tak zastavuje proces lokálního růstu vířivosti a zmenšování vírových struktur. Dochází k difúzi vířivosti vlivem nárůstu difúzního členu v rovnici pro vířivost. Tento proces probíhá v oblasti měřítek, která se blíží tzv. Kolmogorovovu měřítku, jsou to nejmenší pozorovatelné vírové struktury a dále disipují. Jakmile dojde ke vzniku těchto struktur v turbulentním proudění, proces jeho vývoje je ukončen a turbulenci považujeme za „vyvinutou“. Pole rychlostí má náhodný charakter a obsahuje celou škálu měřítek. Vzniká spojitý tok energie od největších měřítek ke stále menším, nejmenší potom disipují. V tomto procesu hraje významnou roli protahování vírů.

Existují však jisté třídy procesů, ve kterých nedochází k protahování vírů. Jedná se například o rovinné, dvourozměrné proudění. V takovém proudění musí být zřejmě vírové čáry kolmé k rovině proudění a nemůže docházet k jejich protahování. Není proto ani možný výše popisovaný mechanismus vzniku menších vírových struktur a v konečném důsledku nemůže ani vzniknout vyvinuté turbulentní proudění. Vířivost je pouze unášena nezměněna proudem. U osově souměrného proudění mohou mít vírové čáry tvar kružnice, její poloměr potom určuje intenzitu vířivosti. Může zde tedy docházet k protahování vírových vláken, jedná se ovšem o velmi speciální případ. Pokud v takovémto nominálně dvourozměrném proudění je umožněn prostorový pohyb tekutiny, může i za těchto podmínek vzniknout klasické turbulentní proudění. Existují však případy, kdy toto není možné, jedná se například o proudění v extrémně tenkých vrstvách.

Doposud jsme o turbulentním proudění uvažovali bez přítomnosti omezující tuhé hranice. Tuhé hranice jsou často důležitým zdrojem turbulence a konec konců veškerá vířivost vzniká právě na hranicích, uvnitř tekutiny je pak již pomocí mechanismu protahování pouze zesilována. Chování vírů a turbulence uvnitř smykových oblastí je značně odlišné od chování ve velké vzdálenosti od povrchu. Hodnota efektivního Reynoldsova čísla je zde relativně nízká a také jak produkce, tak disipace turbulentní energie je velmi intenzivní. Je to způsobeno mimo jiné intenzivním smykovým charakterem oblasti. Proces zvyšování vířivosti zde však probíhá

pomocí stejných mechanismů, hlavní úlohu hraje protahování vírů. Vlivem nízkého Reynoldsova čísla je škála velikostí vírových struktur značně omezena. Dále od stěny roste Reynoldsovo číslo a struktura proudění se blíží volné turbulenci, ačkoli vliv omezující stěny může být patrný do značné vzdálenosti. Pokud je vzdálenost stěny větší než hodnota korelační délky, potom vliv stěny může být zanedbán.

## 7.1. Statistický popis turbulence

Dlouholetá praxe ukázala, že aplikace Navierových-Stokesových rovnic na případy laminárního proudění dává spolehlivé výsledky, které se dobře shodují s výsledky získanými z experimentů. Ke zkoumání turbulentního proudění však musíme přistupovat odlišně, protože veličiny charakterizující proudění jsou ve své podstatě náhodné. To znamená, že jakékoli konkrétní hodnoty předpovězené teorií jsou při srovnání s konkrétním experimentem nesprávné. Z teorie lze pomocí matematického modelování předpovědět pouze pravděpodobnost, že určitá událost nastane. K veličinám jako je rychlost proudění v daném bodě, je tedy nutno přistupovat jako k náhodným veličinám a je třeba také používat adekvátní matematické nástroje.

Statistické nástroje dávají exaktně definované výsledky pouze pro náhodné procesy, které jsou v prostoru homogenní. V praxi tento požadavek zpravidla splněn není, nahrazujeme jej mírnějším požadavkem stacionarity procesu ve smyslu statistických veličin.

### 7.1.1. Spektrální charakteristiky

Spektra jsou základní statistické charakteristiky signálů náhodného charakteru, které v sobě obsahují informaci o velikosti struktur. Definiční vztahy a metody výpočtu jsou uvedeny v dodatcích.

Pro sledování prostorových spekter je zaváděn pojem „vlnového čísla“ (angl.: *wave number*), které je definováno vztahem

$$\boldsymbol{\kappa} = 2\pi / \boldsymbol{\ell}, \quad (7.1)$$

kde  $\boldsymbol{\ell}$  je vektor vlnové délky. Vlnové číslo a vlnová délka jsou obdobou frekvence a periody v časové oblasti s tím rozdílem, že se jedná o vektorové veličiny orientované v prostoru.

#### 7.1.1.1. Spektrum rychlosti

Spektrum rychlosti  $\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$  je tenzor 2. řádu, který bývá nazýván „tenzor rychlostního spektra“ (angl.: *velocity-spectrum tensor*). Je definován jako Fourierova transformace prostorové „dvoubodové korelace“ (angl.: *two-point correlation*) rychlostí  $R_{ij}(\mathbf{r})$ , ta je zavedena podobným způsobem jako autokorelace v časové oblasti. Dvoubodová korelace je tenzor druhého řádu  $R_{ij}$

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \overline{u'_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) u'_j(\mathbf{x}, t)}, \quad (7.2)$$

kde  $\mathbf{x}$  je vektor polohy daného bodu,  $\mathbf{r}$  je vektor posunutí a  $u_i, u_j$  jsou složky vektoru rychlosti do příslušných směrů. V homogenní turbulenci lze vzájemný vztah spektra rychlosti a korelace vyjádřit rovnicemi

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (7.3)$$

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} d\boldsymbol{\kappa}, \quad (7.4)$$

kde  $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)^T$  je vektor vlnových čísel (spojitých),  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$  je vektor prostorového posunutí.

Z fyzikálního hlediska tenzor rychlostního spektra představuje hustotu Reynoldsových napětí v prostoru vlnových čísel. Například pro  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  z rovnice (7.4) ihned plyne následující vztah:

$$R_{ij}(0) = \overline{u'_i u'_j} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa}. \quad (7.5)$$

Tenzor rychlostního spektra je komplexní veličinou, je pozitivně semidefinitní. Informaci v něm obsaženou lze rozdělit do několika částí. První informaci nesou indexy ( $i$  a  $j$ ), které označují směr rychlosti ve fyzikálním prostoru. Další informace jsou obsaženy ve vektoru vlnových čísel  $\boldsymbol{\kappa}$ . Jeho směr  $\boldsymbol{\kappa}/|\boldsymbol{\kappa}|$  označuje směr Fourierova módu ve fyzikálním prostoru a konečně jeho velikost určuje příslušné prostorové měřítko  $\ell = 2\pi/|\boldsymbol{\kappa}|$ .

V tenzoru je také obsažena informace o derivacích rychlosti

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_k \kappa_l \Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa}, \quad (7.6)$$

můžeme proto jeho pomocí také vyjádřit rychlost disipace

$$\varepsilon = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} 2\nu \kappa^2 \frac{1}{2} \Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa}. \quad (7.7)$$

Korelační funkce, stejně jako spektrum, je obecně funkcí času, ve výše uvedených výrazech není tato závislost vyznačena z důvodů větší přehlednosti.

### 7.1.1.2. Jednorozměrné spektrum

Téměř všechna experimentální data z výzkumu turbulentního proudění pocházejí z měření pomocí sond se žhaveným drátkem, které jsou umístěny v pevném bodě prostoru. Pro určení prostorových korelací se potom používá Taylorova hypotéza (viz 7.1.3), vyhodnocují se bezrozměrné podélné a příčné korelační koeficienty  $f(r_1)$  a  $g(r_1)$ , které jsou definovány pro posuv ve směru osy  $x_1$ :

$$\begin{aligned} f(r_1) &= R_{11}(\mathbf{e}_1 r_1) / \overline{u_1'^2} = \overline{u'_1(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1 r_1, t) u'_1(\mathbf{x}, t)} / \overline{u_1'^2}, \\ g(r_1) &= R_{22}(\mathbf{e}_1 r_1) / \overline{u_2'^2} = \overline{u'_2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1 r_1, t) u'_2(\mathbf{x}, t)} / \overline{u_2'^2}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

kde  $\mathbf{e}_1$  je jednotkový vektor ve směru  $x_1$ . Izotropní homogenní turbulence je plně charakterizována těmito dvěma bezrozměrnými korelačními koeficienty, pro ostatní složky tenzoru  $R_{ij}$  totiž platí:  $R_{33} = R_{22}$  a dále  $R_{ij} = 0$  při  $i \neq j$ .

Jednorozměrné spektrum je potom definováno Fourierovou transformací korelační funkce

$$E_{jj}(\kappa_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{jj}(\mathbf{e}_1 r_1) e^{i\kappa_1 r_1} dr_1, \quad (7.9)$$

kde  $\kappa_1$  je vlnové číslo ve směru osy  $x_1$ ,  $j$  se rovná 1 nebo 2.

Jednorozměrné spektrum souvisí s tenzorem rychlostního spektra

$$E_{11}(\kappa_1) = 2 \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(\boldsymbol{\kappa}) d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (7.10)$$

Uvědomme si, že výsledné jednorozměrné spektrum  $E_{11}$  obsahuje příspěvky ze všech vlnových čísel  $\boldsymbol{\kappa}$  v rovině  $\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\kappa} = \kappa_1$  (průmět do této roviny). Výsledná amplituda  $|\boldsymbol{\kappa}|$  však může být podstatně větší než  $\kappa_1$ .

Praktický výpočet jednorozměrného spektra  $E_{jj}$  můžeme zjednodušit na základě znalosti, že  $R_{ij}$  je vždy sudou funkcí  $\kappa_1$ . Potom zřejmě platí

$$E_{ij}(\kappa_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_{ij}(e_1 r_1) \cos(\kappa_1 r_1) dr_1 \quad (7.11)$$

a také inverzní transformace

$$R_{ij}(e_1 r_1) = \int_0^\infty E_{ij}(\kappa_1 r_1) \cos(\kappa_1 r_1) d\kappa_1. \quad (7.12)$$

Pro případ izotropní turbulence je jednorozměrné spektrum svázané s energetickým spektrem  $E(\kappa)$ , které bude definováno v následující kapitole.

### 7.1.1.3. Energetické a disipační spektrum

Tenzor rychlostního spektra obsahuje značné množství informací, jeho praktické použití by bylo poněkud těžkopádné. Pro větší přehlednost se proto zavádí pojem „energetické spektrum“ (angl.: *energy spectrum*), který reprezentuje poněkud redukovanou veličinu.

Energetické spektrum vznikne z tenzoru rychlostního spektra potlačením informace o směrech rychlostí ve fyzikálním prostoru a informace o směrech vlnových čísel ve Fourierově prostoru. Matematicky to znamená výpočet stopy tenzoru 2. řádu a dále integraci po povrchu koule ve Fourierově prostoru s poloměrem  $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}|$  se středem v počátku:

$$E(\kappa) = \oint \frac{1}{2} \Phi_{ii}(\boldsymbol{\kappa}) dS(\boldsymbol{\kappa}), \quad (7.13)$$

Energetické spektrum  $E$  je tedy skalární funkcí skalární proměnné  $\kappa$ . Z definice energetického spektra vyplývá, že integrace  $E(\kappa)$  přes všechna  $\kappa$  je ekvivalentní integraci  $\frac{1}{2} \Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$  přes všechna  $\boldsymbol{\kappa}$ . Pro kinetickou energii tedy platí vztah

$$k = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa, \quad (7.14)$$

Energetické spektrum  $E(\kappa)$  tedy představuje rozdělení kinetické energie na jednotlivá vlnová čísla  $\kappa$ .

Podobně můžeme uvažovat o rychlosti disipace turbulence  $\varepsilon$  (máme samozřejmě na mysli střední hodnotu této veličiny, z praktických důvodů pruh vypouštíme). Platí pro ni vztah

$$\varepsilon = \int_0^\infty 2\nu\kappa^2 E(\kappa) d\kappa. \quad (7.15)$$

Výraz uvnitř integrálu je „disipační spektrum“ (angl.: *dissipative spectrum*)  $D(\kappa)$

$$D(\kappa) = 2\nu\kappa^2 E(\kappa). \quad (7.16)$$

Pomocí disipačního spektra můžeme např. vyjádřit disipaci v intervalu vlnových čísel  $(0, \kappa_1)$  jako  $\varepsilon(\kappa_1) = \int_0^{\kappa_1} D(\kappa) d\kappa$ .

### 7.1.2. Taylorova hypotéza

Prostorový tenzor rychlostního spektra  $\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa})$  je definován jako Fourierova transformace dvoubodové korelace rychlostí  $R_{ij}(\boldsymbol{r})$ . Úplné proměření kompletního tenzoru korelace je velmi náročné, prakticky se neprovádí.

S anemometrem s jedním senzorem je možno proměřit dvoubodovou korelaci podél úsečky ve směru střední rychlosti proudění. Technika se nazývá „pohybující se žhavený drátek“, sonda se při ní pohybuje vůči turbulentnímu proudovému poli (tj. vůči proudění po odečtení střední rychlosti) konstantní rychlostí  $V$  ve směru  $x_1$  (jednotkový vektor  $e_1$ ). Pro okamžitou polohu sondy  $\boldsymbol{\zeta}(t)$  platí vztah

$$\xi(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{e}_1 V t, \quad (7.17)$$

kde  $\mathbf{x}_0$  je počáteční poloha sondy. Rychlost indikovaná sondou bude  ${}^s u$ :

$${}^s \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(\xi(t), t) - \mathbf{e}_1 V. \quad (7.18)$$

Autokorelace určená z údajů indikovaných sondou potom bude

$$\begin{aligned} {}^s R_{ij}(\tau) &= \overline{\left[ {}^s u_i(t) - \overline{{}^s u_i(t)} \right] \left[ {}^s u_j(t+\tau) - \overline{{}^s u_j(t+\tau)} \right]} \\ &= \overline{u_i(\xi(t), t) u_j(\xi(t+\tau), t+\tau)} \\ &= \overline{u_i(\xi(t), t) u_j(\xi(t+e_1 r_1), t+r_1/V)}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

kde  $r_1 = V\tau$  je vzdálenost o kterou se sonda přemístí za čas  $\tau$ . Pro homogenní turbulentní rychlostní pole dostáváme v limitě, kdy rychlost pohybu sondy jde nade všechny meze

$$\begin{aligned} {}^i R_{ij}(\tau) &= \overline{u_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}_1 V t, 0) u_j(\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}_1 V t + \mathbf{e}_1 r_1, 0)} \\ &= \overline{u_i(\mathbf{x}_0, 0) u_j(\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}_1 r_1, 0)} \\ &= R_{ij}(\mathbf{e}_1 r_1, \mathbf{x}_0, 0). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Vidíme, že změřená autokorelační funkce v časové oblasti přechází v prostorovou autokorelační funkci v bodě  $(\mathbf{x}_0, 0)$ .

V praktickém případě, kdy rychlost pohybu sondy je konečná, je zjištěná časová autokorelační funkce aproximací prostorové autokorelační funkce, která je tím lepší, čím vyšší je rychlost pohybu sondy  $V$ .

Jednodušší variantou této metody je použití pevné sondy v prostoru. Potom zřejmě platí, že  $\mathbf{e}_1 V = -\overline{\mathbf{u}} = -\mathbf{e}_1 \overline{u_1}$  a také  $r_1 = -\overline{u_1} \tau$ . Metoda dává dobré výsledky pro nízké intenzity turbulence, kdy  $u' \ll \overline{u_1}$ .

Nahrazení prostorové korelace korelací časovou je v literatuře uváděno jako „Taylorova hypotéza“, či „metoda aproximace zmrazenou turbulencí“.

Úspěšnost této aproximace záleží jak na vlastnostech proudění, tak na statistických veličinách, které mají být vyhodnoceny. Bylo například ověřeno, že v případě mřížové turbulence pro nízkou intenzitu turbulence je tato metoda vyhovující i pro charakteristiky vyšších řádů. Naopak pro volné smykové proudy tuto metodu obecně nelze použít.

### 7.1.3. Strukturní funkce

Pro detailní analýzu turbulentních signálů se často používají tzv. „strukturní funkce“ (angl.: *structure function*). Strukturní funkce jsou statistické charakteristiky přírůstků dané funkce, které mají vypovídací schopnosti při studiu korelací. Lze pomocí nich usuzovat na stacionárnost procesu a jeho intermitentní charakter. Lze je použít pro studium nestacionárních procesů se stacionárními přírůstky a to jak fraktálního tak multifraktálního charakteru.

Strukturní funkce  $n$ -tého řádu náhodného skalárního pole  $q$  je definována následujícím vztahem

$$S_n(\mathbf{r}) = \int \left[ q(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - q(\mathbf{x}) \right]^n d\mathbf{x}. \quad (7.21)$$

Strukturní funkce může být počítána pomocí hustoty pravděpodobnosti přírůstků veličiny  $q$ , které jsou definovány vztahem  $\Delta(\mathbf{r}) = q(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - q(\mathbf{x})$ . Je potom dána momentem  $n$ -tého řádu hustoty pravděpodobnosti

$$S_n(\mathbf{r}) = \int \Delta^n(\mathbf{r}) f(\Delta(\mathbf{r})) d(\Delta(\mathbf{r})) \quad (7.22)$$

Obecným znakem strukturních funkcí je fakt, že počet bodů signálu pro jejich určení s danou přesností roste s řádem  $n$ . Strukturní funkce vyšších řádů je velmi obtížné určit s dostatečnou přesností.

Účelem strukturálních funkcí je měřit intenzitu fluktuací v závislosti na měřítku přímo v prostoru souřadnic.

## 7.2. Měřítko turbulence

Turbulentní proudění sestává z vírových struktur různých velikostí, ty lze charakterizovat měřítky turbulence.

### 7.2.1. Kaskáda měřítek

Uvažujme vyvinuté turbulentní proudění s charakteristickou rychlostí  $u$  a délkovým měřítkem  $\mathcal{L}$ . Necht' Reynoldsovo číslo  $Re = u\mathcal{L}/\nu$  nabývá velkých hodnot.

Myšlenka energetické kaskády byla poprvé formulována L.F. Richardsonem v roce 1922. Základem této myšlenky je představa, že se vyvinuté turbulentní proudění skládá z velkého počtu vírů různých měřítek. Víru velikosti  $\ell$  přísluší charakteristická rychlost  $u(\ell)$  a časové měřítko  $\tau(\ell) = \ell/u(\ell)$ . Exaktní definice víru je poněkud problematická, pro naše účely vírem rozumíme oblast o rozměru  $\ell$ , která vykazuje jistou míru koherence. Oblast náležející víru určité velikosti může současně obsahovat jiné, menší víry. Pro reprezentaci posloupnosti měřítek vírů Richardson navrhuje Fourierův prostor, kde velikost víru  $\ell$  je charakterizována vlnovým číslem  $\kappa = 1/\ell$ .

Víry největších rozměrů vznikají pomocí mechanismů nestability smykových oblastí, které byly popsány v kapitole 6. Jsou charakterizovány délkovým měřítkem  $\ell_0$ , které je řádu  $\mathcal{L}$  a příslušná charakteristická rychlost  $u(\ell)$  je řádu směrodatné odchylky rychlosti  $u' = \sqrt{2/3}k$  a je srovnatelná s  $u$ . Jejich rozměr je dán rozměry oblasti proudění, tyto víry jsou živeny energií hlavního proudu. Reynoldsovo číslo těchto vírů  $Re_0 = u_0\ell_0/\nu$  je tedy velké, srovnatelné s  $Re$  a tedy vliv viskozity je zanedbatelně malý.

Richardson předpokládá, že největší víry jsou nestabilní, rozpadají se a předávají energii vírům poněkud menším. Tyto menší víry procházejí podobným procesem rozpadu a přenášejí svou energii na stále menší víry. V mechanismu rozpadu hraje vazkost zanedbatelnou roli. Tato „energetická kaskáda“ (angl.: *energy cascade*) pokračuje až Reynoldsovo číslo víru je dostatečně malé, takové, že se vírový pohyb stává stabilním vlivem vazkých sil a dochází k přímé disipaci kinetické energie víru. Richardson charakterizoval tento proces ve formě sonetu, kterým parafrázoval sonet J. Twista o samopodobnosti v biologii, konkrétně o blechách, které mají své blechy atd.:

*„Big whorls<sup>9</sup> have little whorls  
That feed on their velocity,  
And little whorls have lesser whorls  
And so on to viscosity – in the molecular sense.“*

V tomto modelu figuruje viskozita až na samém konci kaskády procesů. Rychlost disipace  $\varepsilon$  je však určena prvním z posloupnosti procesů, kterým je transformace energie největších vírů. Energie těchto vírů je řádu  $u_0^2$  a časové měřítko  $\tau_0 = \ell_0/u_0$ , rychlost přenosu energie je potom charakterizována měřítkem  $u_0^2/\tau_0 = u_0^3/\ell_0$ . Tato velikost měřítka rychlosti disipace byla experimentálně potvrzena pro velká Reynoldsova čísla a nezávisí na viskozitě.

### 7.2.2. Definice měřítek turbulence

Složitou strukturu turbulentního proudění lze kvantifikovat pomocí charakteristických měřítek turbulence, které nyní zavedeme.

---

<sup>9</sup> *whorls* jsou „spirály“, zde ve smyslu „víry“

V kapitole 7.1.1.2 o jednorozměrném spektru rychlostí byly definovány bezrozměrné podélné a příčné korelační koeficienty  $f(r_1)$  a  $g(r_1)$  vztahem (7.8), nyní definujeme pro tyto koeficienty charakteristická měřítka.

„Integrální měřítka“ (angl.: *integral scale*) charakterizuje střední rozměr energetických vírů. Lze definovat dvě integrální měřítka a to „podélné integrální měřítka“  $L_{11}$  a „příčné integrální měřítka“  $L_{22}$ :

$$L_{11} \equiv \int_0^{\infty} f(r_1) dr_1, \quad (7.23)$$

$$L_{22} \equiv \int_0^{\infty} g(r_1) dr_1.$$

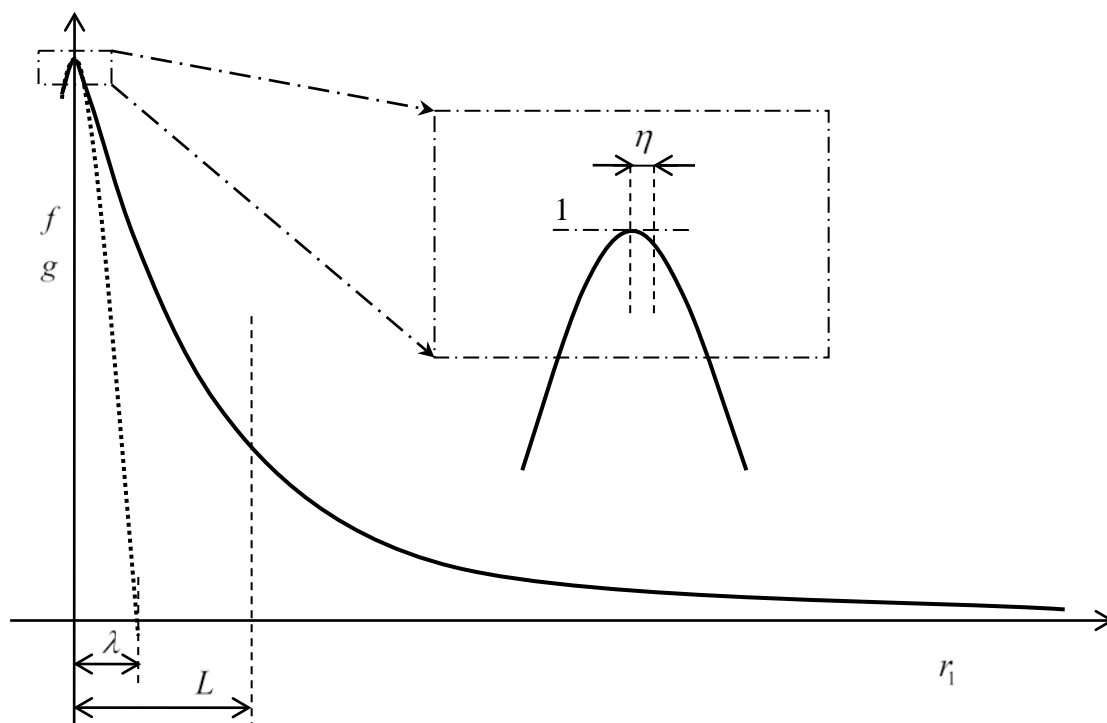
V izotropní turbulenci má příčné integrální měřítka poloviční velikost než podélné.

Dalším měřítkem, které bývá definováno, je „Taylorovo mikroměřítka“ (angl.: *Taylor microscale*). Taylorovo mikroměřítka nemá jasný fyzikální význam. Uvádí se, že charakterizuje střední prostorové gradienty rychlosti ale také víry, které ještě málo přispívají k procesu disipace, obsahují však již velmi málo turbulentní energie. V každém případě se jedná o měřítka mezi Kolmogorovovým měřítkem a velikostí energetických vírů, které je jednoznačně definováno. Matematicky je Taylorovo mikroměřítka definováno pomocí druhé derivace bezrozměrného korelačního koeficientu pro  $r_1 = 0$ :

$$\lambda_f = \left[ -1/2 \left( \partial^2 f / \partial r_1^2 \right)_{r_1=0} \right]^{-1/2}, \quad (7.24)$$

$$\lambda_g = \left[ -1/2 \left( \partial^2 g / \partial r_1^2 \right)_{r_1=0} \right]^{-1/2}.$$

Prakticky lze velikost Taylorova mikroměřítka zjistit pomocí oskulační paraboly prokládané vrcholem korelační funkce – viz obr. 7.1.



Obr. 7.1 – Měřítka turbulence

V izotropní turbulenci platí mezi příčným a podélným měřítkem vztah

$$\lambda_g = \lambda_f / \sqrt{2}. \quad (7.25)$$

Dále lze odvodit vztah mezi rychlostí disipace  $\varepsilon$  a Taylorovým mikroměřítkem

$$\varepsilon = 15\nu \overline{u'^2} / \lambda_g^2, \quad (7.26)$$

kde  $u'$  je složka flukтуаční rychlosti v libovolném směru.

Reynoldsovo číslo založené na Taylorově mikroměřítku se často používá jako charakteristika izotropní turbulence

$$\text{Re}_\lambda \equiv \frac{\sqrt{\overline{u'^2}} \lambda_g}{\nu}. \quad (7.27)$$

Pro toto Reynoldsovo číslo platí vztah

$$\text{Re}_\lambda = \sqrt{(20/3)\text{Re}_L}. \quad (7.28)$$

„Kolmogorovovo měřítko“ (angl.: *Kolmogorov scale*) bude přesněji definováno v kapitole o Kolmogorovově teorii, pro tuto chvíli stačí konstatování, že se jedná o charakteristickou velikost nejmenších vírů, u nichž jsou disipační procesy dominantní. Na obr. 7.1 je vyznačena jeho velikost  $\eta$ , hodnota koeficientu korelace se v jeho rámci významně neodchyluje od 1, to znamená, že se útvary těchto velikostí pohybují více-méně jako kompaktní tělesa.

Definujme dále  $L$  jako měřítko charakterizující největší víry vztahem

$$L \equiv k^{3/2} / \varepsilon, \quad (7.29)$$

kde  $\varepsilon$  je rychlost disipace a  $k = (1/2)\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle$  je měrná kinetická energie. Dále definujme Reynoldsovo číslo turbulence

$$\text{Re}_L \equiv \frac{k^{1/2} L}{\nu} = \frac{k^2}{\varepsilon \nu}. \quad (7.30)$$

Poměry mezi měřítky lze potom vyjádřit následujícími vztahy

$$\frac{\lambda_g}{L} = \sqrt{10} \text{Re}_L^{-1/2}, \quad (7.31)$$

$$\frac{\eta}{L} = \text{Re}_L^{-3/4}, \quad (7.32)$$

$$\lambda_g = \sqrt{10} \eta^{2/3} L^{1/3}. \quad (7.33)$$

Obecně jsou korelační koeficienty i měřítka funkcí času, uvažujeme-li však stacionární případ, potom tuto závislost uvažovat nemusíme.

### 7.2.3. Fraktální struktura měřítek

Fraktální struktury se vyskytují v mnoha fyzikálních jevech, jako např. v turbulenci nebo chaotických dynamických systémech. Ústřední roli při charakteristice fraktálů hraje jejich dimenze, jak bylo již řečeno v oddíle 3.2.1.

Geometrické objekty v prostoru dimenze  $d$  mají svou topologickou dimenzi  $d_T$ . Fraktální dimenze daného geometrického objektu  $d_F$  může být definována pomocí metody pokrývání objektu nejmenším možným počtem hyperkrychlí  $N(\varepsilon)$  s hranou délky  $\varepsilon$

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d_F} \text{ pro } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.34)$$

Hyperkrychlí rozumíme symetrický, pravidelný objekt charakterizovaný délkou hrany pro danou dimenzi – čtverec pro  $d_T = 2$ , krychle pro  $d_T = 3$ . Tato definice charakterizuje tzv. Hausdorffovu metodu určení fraktální dimenze. Pro hladké objekty se spojitými derivacemi obvykle platí, že  $d_F = d_T$ , pro objekty fraktální povahy však je  $d_F \geq d_T$ . Příkladem je náhodná trajektorie v rovině, která má  $d_T = 1$  a  $d_F = 2$ .

Zákony měřítek v přírodě nemohou být charakterizovány jediným geometrickým parametrem. Můžeme uvažovat vlastnost měřítek určité hustoty  $\mu(\mathbf{x})$  na objektu (nejčastěji hustota pravděpodobnosti). Můžeme pak definovat metriku

$$p_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \mu(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (7.35)$$

kde  $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$  je hyperkrychle o hraně  $\varepsilon$  se středem v bodě objektu  $\mathbf{x}$ .

Obecně metrika  $p_\varepsilon(\mathbf{x})$  roste s exponentem  $\alpha$ , který je funkcí daného místa  $\mathbf{x}$

$$p_\varepsilon(\mathbf{x}) \sim \varepsilon^\alpha, \quad (7.36)$$

Přičemž obecně platí, že  $\alpha \neq d_F$ . Tento objekt tedy může být chápán jako superpozice různých fraktálů

$$F(\alpha) = \{\mathbf{x} : p_\varepsilon(\mathbf{x}) \sim \varepsilon^\alpha, \varepsilon \rightarrow 0\}, \quad (7.37)$$

každý z nich je charakterizován rozdílným exponentem  $\alpha$ .

Tento objekt je potom nazýván „multifraktál“ (angl.: *multifractal*). Fluktuace exponentu  $\alpha$  mohou být charakterizovány rozdělením pravděpodobností. Takovéto struktury jsou typické pro turbulentní proudění tekutiny. Můžeme je chápat jako objekty, u kterých se fraktální dimenze turbulence mění místo od místa a také v čase.

Fraktální struktura turbulence se projevuje jednak přímo v turbulentním proudovém poli výskytem různých struktur v prostoru a v čase a dále na hranici oblasti turbulentně proudící tekutiny. Tato hranice má potom také fraktální charakter.

Existuje přímá souvislost fraktálního charakteru distribuce parametrů v prostoru a čase s energetickou kaskádou. Některé fenomenologické teoretické modely jsou spojovány se spektrem kaskády kinetické energie ve tvaru  $\kappa^{-C}$ . Potom lze odvodit, že fraktální dimenze prostoru, v němž vznikají koherentní víry je rovna  $C+1$ . V případě vyvinuté turbulence charakterizované Kolmogorovovým energetickým spektrem, které bude odvozeno dále, může být struktura proudového pole popsána fraktální dimenzí  $5/3+1=8/3 \approx 2,67$ . Tento výsledek byl ověřen mnohými experimenty ať již fyzikálními či numerickými.

### 7.3. Kolmogorovova teorie

Kolmogorov publikoval v roce 1941 fundamentální článek, který dodává matematický aparát Richardsonově představě energetické kaskády. Kolmogorovova teorie je založena na třech hypotézách: je to hypotéza lokální isotropie a dále první a druhá podobnostní hypotéza. V literatuře bývá tato teorie označována K41.

Hypotéza lokální isotropie se týká vírů malých měřítek. Největší víry mají zhruba rozměr smykové oblasti  $\mathcal{L}$ , topologie těchto vírů je anizotropní, je dána konkrétními okrajovými podmínkami (často bývají dosti pravidelné). Střední velikost energetických vírů je o něco menší, označme ji  $\ell_0$ . Vlivem více-méně chaotického procesu přenosu energie směrem k malým měřítkům dochází k postupnému růstu isotropie menších měřítek. Na těchto úvahách je založena Kolmogorovova **hypotéza lokální isotropie**: *Při dostatečně vysokých Reynoldso-vých číslech jsou pohyby malých měřítek  $\ell \ll \ell_0$  statisticky izotropní.*

Necht' měřítko  $\ell_{EI}$  je hranicí mezi malými izotropními víry a velkými neizotropními víry. Pro lepší představu uvažujme  $\ell_{EI} \approx 1/6 \ell_0$ . V oblasti výskytu malých izotropních vírů  $\ell < \ell_{EI}$  dominují dva mechanismy přenosu energie: přenos od velkých měřítek k menším a dále vazká disipace. Parametry, které řídí tyto procesy jsou rychlost přenosu energie od velkých měřítek k malým  $\mathcal{J}_{EI}$  a kinematická viskozita  $\nu$ . V ustáleném stavu je rychlost disipace  $\varepsilon^{10}$  v rovnováze s rychlostí produkce:  $\varepsilon \approx \mathcal{J}_{EI}$ . Z toho vyplývá, že statisticky univerzální stav ma-

<sup>10</sup> Rozuměj časově střední hodnota.

lých měřítek je určován vazkostí  $\nu$  a rychlostí přenosu energie z oblastí velkých měřítek  $\mathcal{J}_{EI}$ . Tento důsledek formuluje **Kolmogorovova první podobnostní hypotéza**, která říká, že v turbulentním proudě při dostatečně vysokých Reynoldsových číslech mají statistiky pohybů malých měřítek ( $\ell < \ell_{EI}$ ) univerzální tvar a závisí pouze na měřítku  $\ell$ , vazkosti  $\nu$  a rychlosti disipace  $\varepsilon$ .

Z toho vyplývá, že také energetické spektrum  $E(\kappa)$  má univerzální tvar a závisí pouze na  $\nu$  a  $\varepsilon$ . Použijeme-li tyto veličiny pro vyjádření energetického spektra, potom z prosté rozměrové analýzy vyplývá, že tato závislost musí mít tvar

$$E(\kappa) = (\varepsilon \nu^5)^{1/4} \varphi(\kappa \eta), \quad (7.38)$$

kde  $\varphi(\kappa \eta)$  je tzv. „Kolmogorovovo spektrum“ (angl. *Kolmogorov spectrum function*). Pro účely rozměrové analýzy však můžeme použít také  $\varepsilon$  a  $\kappa$ , potom dostáváme

$$E(\kappa) = \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \Psi(\kappa \eta), \quad (7.39)$$

kde  $\Psi(\kappa \eta)$  je tzv. „kompenzované Kolmogorovovo spektrum“ (angl. *compensated Kolmogorov spectrum function*).

Oblast měřítek  $\ell < \ell_{EI}$  bývá označována za „oblast univerzální rovnováhy“ (angl.: *universal equilibrium range*). V této oblasti jsou časová měřítka  $\ell/u(\ell)$  malá ve srovnání s  $\ell_0/u_0$ , malé víry se mohou rychle přizpůsobovat tak, aby byla zachována dynamická rovnováha s rychlostí přenosu energie  $\mathcal{J}_{EI}$ , která je určována velkými víry ( $u(\ell)$  je typická hodnota fluktuací rychlosti pro rozruhy měřítka  $\ell$  a  $u_0$  potom pro  $\ell_0$ ).

Z rozměrové analýzy lze potom jednoznačně určit (až na bezrozměrnou konstantu) hodnoty výsledných tzv. „Kolmogorovových měřítek“ (angl. *Kolmogorov scales*). Relevantními veličinami jsou pouze rychlost disipace  $\varepsilon [m^2/s^3]$  a kinematická viskozita  $\nu [m^2/s]$ , délkové, rychlostní a časové Kolmogorovovo měřítko  $\eta [m]$ ,  $u_\eta [m/s]$  a  $\tau_\eta [s]$  potom můžeme definovat následujícími vztahy:

$$\eta \equiv \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \quad (7.40)$$

$$u_\eta \equiv (\varepsilon \nu)^{1/4}, \quad (7.41)$$

$$\tau_\eta \equiv \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}. \quad (7.42)$$

Z těchto definic vyplývají dvě identity. Za prvé Reynoldsovo číslo založené na Kolmogorovových parametrech je jednotkové:  $\eta u_\eta / \nu = 1$ . Tento fakt je v souladu s tvrzením, že kaskádový přenos pokračuje směrem ke stále menším měřítkům až je Reynoldsovo číslo tak malé, že umožní disipativní procesy. Dále, ze vztahů (7.40) a (7.42) můžeme vyjádřit rychlost disipace

$$\varepsilon = \frac{\nu^3}{\eta^4} = \frac{u_\eta^4}{\nu} = \frac{\nu}{\tau_\eta^2}, \quad (7.43)$$

z čehož vyplývá korektní charakteristika pro rychlostní gradient disipujících vírů:

$$(u_\eta / \eta) = 1 / \tau_\eta. \quad (7.44)$$

Můžeme dále zavést bezrozměrné souřadnice a bezrozměrné rychlosti s použitím příslušných Kolmogorovových měřítek, kdy platí pro bezrozměrné souřadnice  $\mathbf{y}$  a rychlosti  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} / \eta, \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} / u_\eta. \quad (7.45)$$

V oblasti malých měřítek jsou podle výše uvedené hypotézy všechna turbulentní proudová pole **statisticky podobná**, po provedení transformace pomocí Kolmogorových měřítek jsou potom ve statistickém smyslu **identická**.

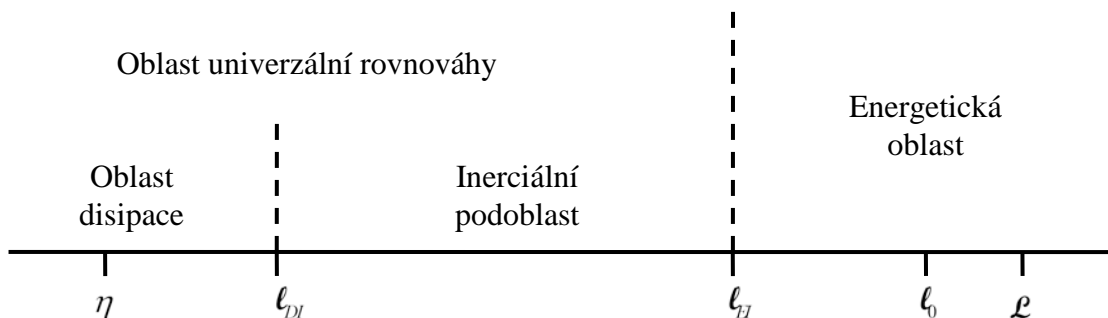
Uvážíme-li, že  $\varepsilon \sim u_0^3 / \ell_0$  potom můžeme vyjádřit poměr velikostí nejmenších a největších měřítek v daném turbulentním proudění

$$\frac{\eta}{\ell_0} \sim \text{Re}^{-3/4}, \quad \frac{u_\eta}{u_0} \sim \text{Re}^{-1/4}, \quad \frac{\tau_\eta}{\tau_0} \sim \text{Re}^{-1/2}. \quad (7.46)$$

**Kolmogorovova druhá podobnostní hypotéza** říká, že v každém turbulentním proudění při velmi vysokém Reynoldsově čísle blízcím se k nekonečnu mají pohyby turbulentních měřítek  $\ell$  takových, že platí  $\ell_0 \gg \ell \gg \eta$ , univerzální tvar a je závislá pouze na rychlosti disipace  $\varepsilon$  a nikoli na vazkosti.

Zaveďme dále měřítko  $\ell_{DI}$  (jeho velikost je asi  $60\eta$ ) takové, že druhá Kolmogorovova hypotéza platí v rozsahu  $\ell_{EI} > \ell > \ell_{DI}$ . Takto definované měřítko rozděluje oblast univerzální rovnováhy na dvě podoblasti: „inerciální podoblast“ (angl.: *inertial subrange*) kde  $\ell_{EI} > \ell > \ell_{DI}$  a „oblast disipace“ (angl.: *dissipation range*) kde  $\ell_{DI} > \ell$ . Oblast disipace je jedinou oblastí, kde je významný vliv vazkosti a platí tam pouze první Kolmogorovova podobnostní hypotéza.

Zbývá poslední oblast  $\ell > \ell_{EI}$ , což je oblast největších vírů, která bývá nazývána „energetickou oblastí“ (angl.: *energy-containing range*). Rozdělení do jednotlivých oblastí je schematicky naznačeno na obr. 7.2, kde osa měřítek má logaritmickou stupnici.



Obr. 7.2 – Oblasti měřítek turbulence dle Kolmogorova

V inerciální podoblasti je vliv vazkosti zanedbatelný a tedy hodnota součinu  $\kappa\eta \ll 1$  je zanedbatelně malá. Proto v inerciální oblasti je kompenzované Kolmogorovovo spektrum definované (7.39) přibližně konstantní  $\Psi(\kappa\eta) = C$  a tedy energetické spektrum lze vyjádřit vztahem

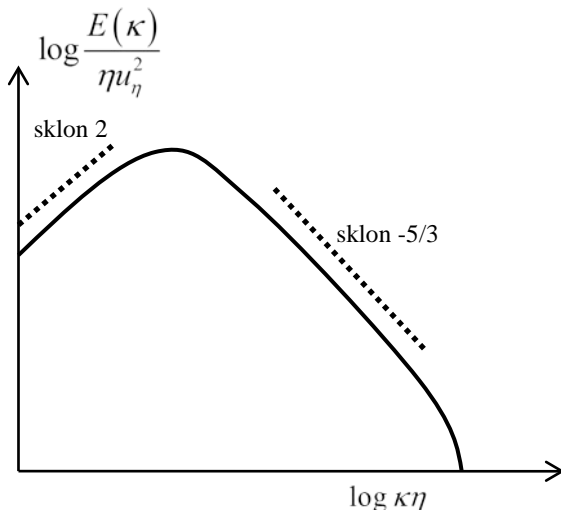
$$E(\kappa) = C\varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad (7.47)$$

kde  $\kappa$  je vlnové číslo a  $C$  je univerzální konstanta ( $\approx 1.5$ ).

### 7.3.1. Spektra izotropní turbulence

Topologie izotropního turbulentního proudění může být ve statistickém smyslu popsána pomocí energetického spektra  $E(\kappa)$ , což je v podstatě výkonová spektrální hustota fluktuací rychlosti. Toto spektrum nám ukazuje rozložení kinetické energie na jednotlivých vlnových číslech. Na obr. 7.3 je tzv. modelové energetické spektrum, které ukazuje typický tvar energie-

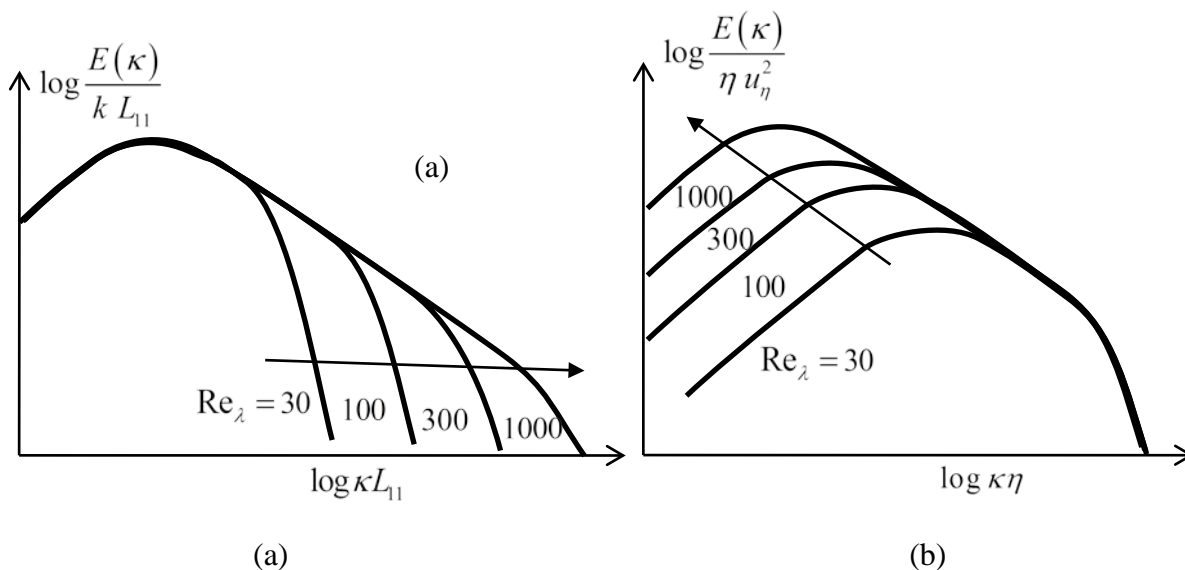
tického spektra získaného z experimentu. V grafu jsou použity bezrozměrné proměnné definované pomocí Kolmogorovových měřítek. Energetické spektrum v log-log souřadnicích je charakterizováno sklonem 2 v energetické oblasti a sklonem  $-5/3$  v inerciální podoblasti. V oblasti disipace dochází k rychlejšímu útlumu spektra. Sklon spektra v energetické oblasti není zcela jednoznačný, jeho skutečná hodnota závisí na konkrétních okrajových podmínkách. Uvedená hodnota předpokládá isotropii.



Obr. 7.3 – Modelové spektrum

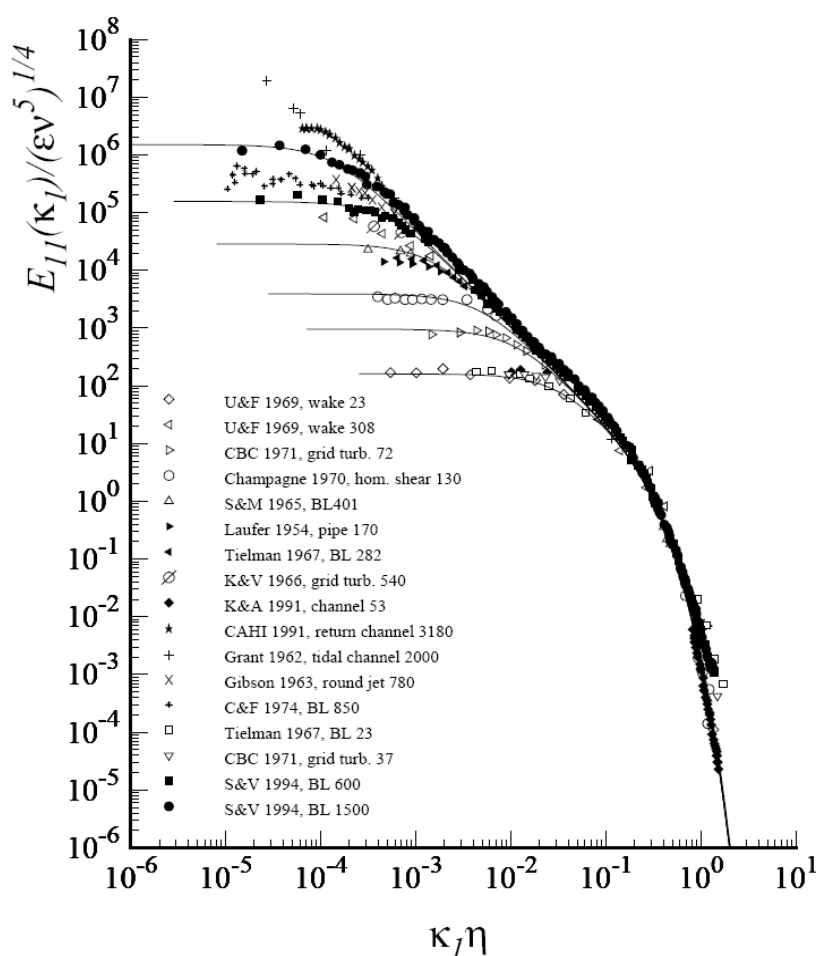
Tvar energetického spektra na obr. 7.3 je do značné míry univerzální, pouze velikost inerciální podoblasti je funkcí Reynoldsova čísla. Tuto závislost ukážeme na dvou příkladech, kdy bylo zvoleno poněkud odlišné škálování proměnných. Na obr. 7.4 (a) je použito pro bezrozměrné vyjádření integrální měřítko charakterizující největší víry, na obr. 7.4 (b) je potom použito Kolmogorovovo měřítko podobně jako na obr. 7.3. Proměnnou je Reynoldsovo číslo vztažené v Taylorovu mikroměřítku.

Z obr. 7.4 je vidět, že definice proměnných pomocí rozměru velkých vírů způsobí univerzální reprezentaci energetické oblasti, zatímco použití Kolmogorovových měřítek způsobí univerzální zobrazení oblasti disipace.



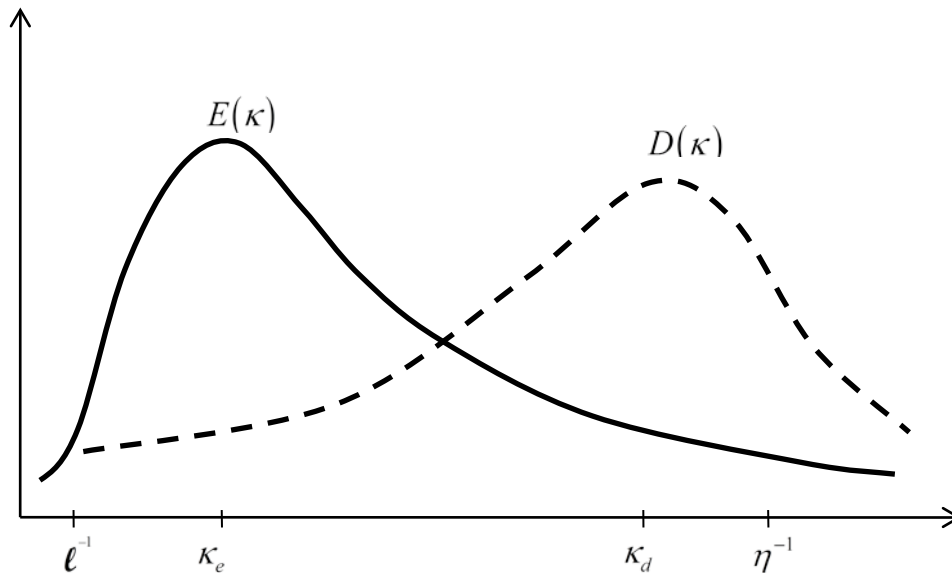
Obr. 7.4 – Modelová spektra pro různá Reynoldsova čísla normalizace pomocí integrálního (a) a Kolmogorova (b) měřítka

Na obr. 7.5 jsou uvedena jednorozměrná energetická spektra získaná při experimentech v různých laboratořích, proudění bylo různých typů (mezní vrstva, kanál trubka, mříž) a jsou charakterizovány různými hodnotami  $Re_\lambda$  (poslední hodnota v legendě). Experimentální data jsou znázorněna bodovými značkami, souvislé čáry znázorňují modelová spektra pro hodnoty  $Re_\lambda = 30, 70, 130, 300, 600$  a  $1500$ . Pro zobrazení byly použity Kolmogorovy bezrozměrné souřadnice. Spektrum bylo normalizováno ve tvaru  $E_{11}(\kappa_1)/(\varepsilon\nu^5)^{1/4}$  a vlnové číslo  $\kappa_1\eta$ . Vidíme, že tyto souřadnice umožňují splynutí spekter pro  $\kappa_1 > \kappa_{EI}$ , tedy v inerciální podoblasti a v oblasti disipace. Jednotlivé případy se liší rozsahem inerciální podoblasti, obecně se její rozsah zvětšuje s rostoucím Reynoldsovým číslem  $Re_\lambda$ . Disipační oblast  $\kappa_1\eta > 0,1$  potom splývá pro všechny zkoumané případy.



Obr. 7.5 – Energetická jednorozměrná spektra pro různé typy proudění

Další důležitou statistickou charakteristikou je disipační spektrum, které znázorňuje disipaci energie na jednotlivých vlnových číslech. Schematicky je znázorněno disipační spektrum na obr. 7.6 spolu s energetickým spektrem pro konkrétní hodnotu Reynoldsova čísla, svislá osa je zde lineární.

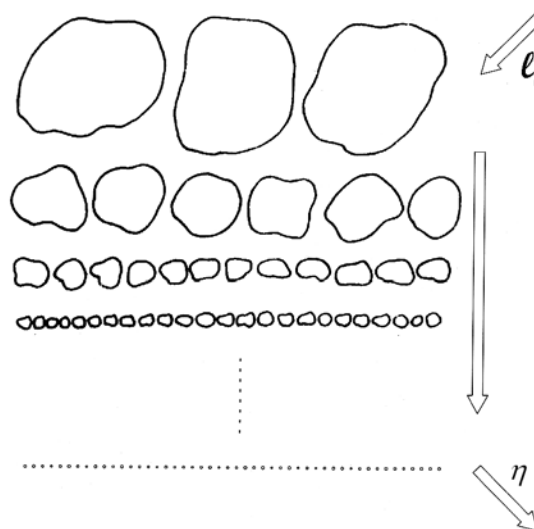


Obr. 7.6 – Energetické a disipační spektrum

### 7.3.2. Energetická kaskáda a inverzní energetická kaskáda

Podívejme se nyní blíže na tok energie ve vyvinutém izotropním proudění. Proudící tekutina představuje z energetického hlediska otevřený systém. Energie je do systému přiváděna z hlavního proudu, mechanismem ztráty stability vznikají velké vírové struktury. Jejich konkrétní podoba je dána okrajovými podmínkami daného případu. Tyto víry charakterizované měřítkem  $l_0$  a odpovídajícím vlnovým číslem  $\kappa_l$  stojí na vrcholu energetické kaskády a představují energetickou oblast vlnových čísel.

Následuje přenos energie od velkých měřítek směrem k menším rychlostí  $\varepsilon$  uvnitř inerciální podoblasti. Jedná se o energetickou kaskádu, při níž dochází k rychlému nárůstu isotropie topologie vírových struktur. Mechanismem přenosu energie je protahování vírů, jak bylo řečeno již dříve. Proces končí v oblasti disipace na Kolmogorově měřítku  $\eta$ . Schéma celého procesu je na obr. 7.7. Podle původní Kolmogorovy teorie víry na všech stupních kaskády rovnoměrně vyplňují celý prostor.

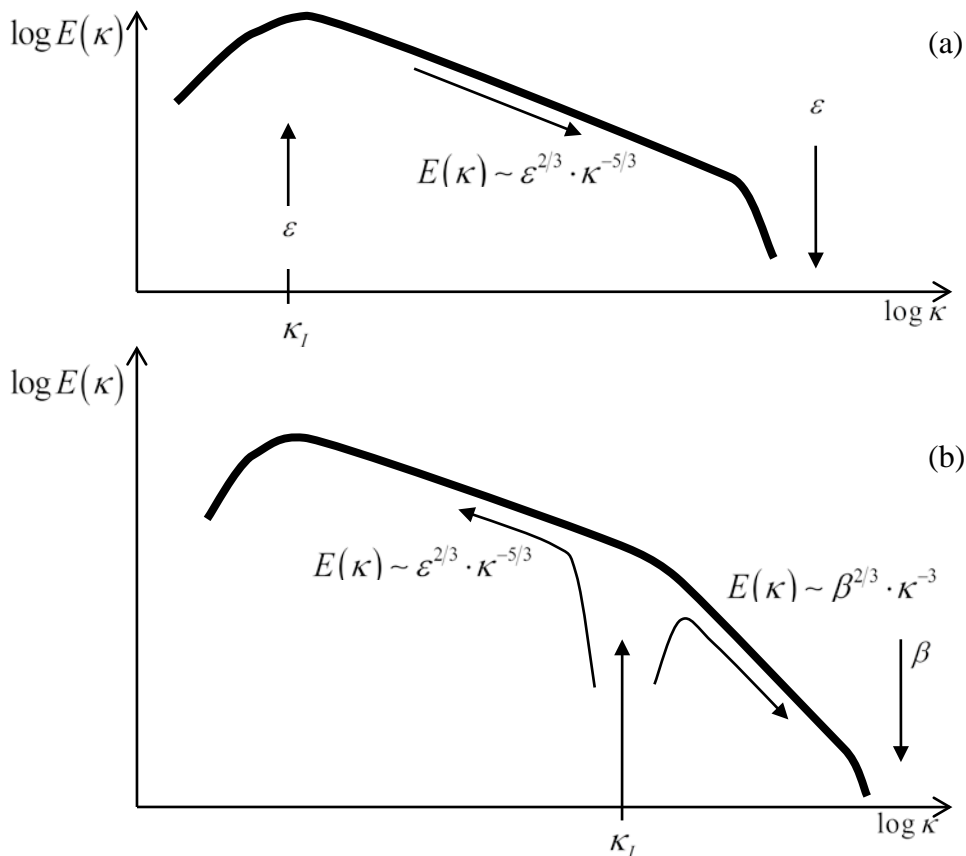


Obr. 7.7 – Energetická kaskáda

Mohou však nastat případy, kdy je pohyb tekutiny v jednom směru znemožněn okrajovými podmínkami a pohyb pak musí být na daných měřítkách dvourozměrný. Jedná se např. o pohyb v tenkých vrstvách tekutiny, tomuto případu se blíží i případ zemské atmosféry. Proudění za těchto podmínek může být prostorové jen pro určitá měřítka, která jsou menší než tloušťka vrstvy. Struktury větších měřítek mohou vzniknout pouze ve směrech bez omezujících vlivů, jejich vířivost je potom orientována ve směru nejmenšího rozměru – tloušťky vrstvy. Nemůže docházet k protahování těchto vírů a generování vířivosti, hodnota vířivosti je na těchto měřítkách zachovávána.

Pro dvourozměrnou turbulenci existuje teorie navržená v roce 1967 Kraichnanem, tato teorie je ekvivalentem Kolmogorovovy teorie pro prostorovou turbulenci. Energie je přiváděna na vlnových číslech  $\kappa_l$  s rychlostí  $\varepsilon$ , současně je přiváděna enstrofie rychlostí  $\beta$ , která je řádu  $\kappa_l^2 \varepsilon$ . Tato enstrofie přechází kaskádovitě směrem k malým měřítkům rychlostí  $\beta$  a nakonec při dosažení Kolmogorovova měřítka disipuje. Kinetická energie nemůže přecházet ve stejném smyslu jako enstrofie, která na ni působí jako zábrana. Proto vzniká obrácená kaskáda energie od vlnových čísel  $\kappa_l$  směrem k nižším hodnotám. Tento proces je charakterizován rychlostí  $\varepsilon$  a uplatňuje se při něm mechanismus párování vírů. Tato teorie uvažuje nejen zachování energie v inerciální oblasti, ale také zachování enstrofie, která platí pouze v oblasti dvourozměrné turbulence. Stejným způsobem, kterým Kolmogorov došel k energetické kaskádě, byla předpovězena Kraichnanem přímá kaskáda enstrofie od velkých měřítek po malá měřítka charakterizovaná  $\kappa^{-3}$  energetickým spektrem a inverzní energetickou kaskádou od malých měřítek po velká, která dává  $\kappa^{-5/3}$  energetické spektrum. Potvrzení této teorie experimentálními daty a výsledky přímé numerické simulace není však jednoznačné, často vychází sklon energetického spektra poněkud strmější než z teorie ( $\kappa^{-3}$ ).

Spektra odpovídající přímé i obrácené kaskádě jsou schematicky naznačena na obr. 7.8, jsou zde naznačeny toky energie v obou případech.



Obr. 7.8 – Energetické spektrum pro přímou (a) a obrácenou (b) energetickou kaskádu

### 7.3.3. Vnitřní intermitence

Kolmogorovova teorie K41 popsaná výše vychází z velmi přísných, a jak ukazují mnohé experimenty také nefyzikálních předpokladů, které byly posléze často kritizovány. Např. Landau kritizoval Kolmogorovův předpoklad konstantní hodnoty rychlosti přenosu mezi měřítky  $\epsilon$  nezávislou na velikosti měřítka s tím, že také pole disipace by mělo být považováno za náhodné. Dále na základě výsledků experimentů popsal Townsend v roce 1951 intermitenci malých měřítek. Na základě těchto argumentů provedl Kolmogorov revizi své teorie a v roce 1962 formuloval teorii označovanou jako K62. Tento model pracuje s energetickým spektrem ve tvaru

$$E(\kappa) = C \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \ln \left( \frac{\kappa}{\kappa_l} \right)^\beta, \quad (7.48)$$

kde  $\kappa_l$  je vlnové číslo na kterém je přiváděna energie z proudu (převrácená hodnota integrálního měřítka). Kolmogorov navrhl model pro přenos energie jako multiplikační náhodný děj, při kterém je přenášena pouze část energie charakterizovaná zlomkem  $\beta$  z jednoho měřítka na další. Dále předpokládal, že hustota pravděpodobnosti disipačního pole se mění náhodně v prostoru i v čase podle log-normálního rozdělení pravděpodobnosti.

Ze získaných experimentálních výsledků je zřejmé, že Kolmogorovův předpoklad isotropie malých měřítek ve skutečnosti není správný. Důkazem tohoto závěru je existence intermitence v oblasti malých měřítek, která je spíše pravidlem než výjimkou. Výsledkem jsou potom jistě nesrovnalosti při vyhodnocování statistických momentů a strukturních funkcí vyšších řádů.

Teorie K41 přináší přes svoji jednoduchost překvapivě dobrý souhlas s experimentem. Od začátku 60. let se však začalo ukazovat, že její platnost je pouze přibližná a že zjemňování experimentů k lepšímu souhlasu s teorií nevede. Vznikla tudíž snaha přinést k teorii další opravy. Jedním z nejznámějších problémů je to, že škálovací exponenty strukturních funkcí soustavně rostou pomaleji, než udává Kolmogorovův zákon (viz 7.3.4.). Opravená Kolmogorovova teorie K62 je značně složitější než teorie K41, shoda s experimentálními daty však není u nové teorie lepší.

Teorie K62 je založena na předpokladu, že míra disipace není konstantní, ale že závisí na měřítku, přičemž její logaritmus  $\ln(\varepsilon(r))$  je náhodná veličina charakterizovaná Gaussovým rozdělením. Vzniklý zákon výsledného rozdělení pravděpodobnosti se nazývá lognormální.

Postupně vznikly další modely (např. beta model, model log-Poisson) a vznikají dosud, aniž by se podařilo tento problém, zvaný vnitřní intermitence, definitivně vyřešit tak, aby predikce teorie byly experimentálně potvrzeny.

### 7.3.4. Formulace pro strukturní funkce

Účelem strukturních funkcí definovaných v kapitole 7.1.3 je měřit intenzitu fluktuací v závislosti na měřítku přímo v prostoru souřadnic.

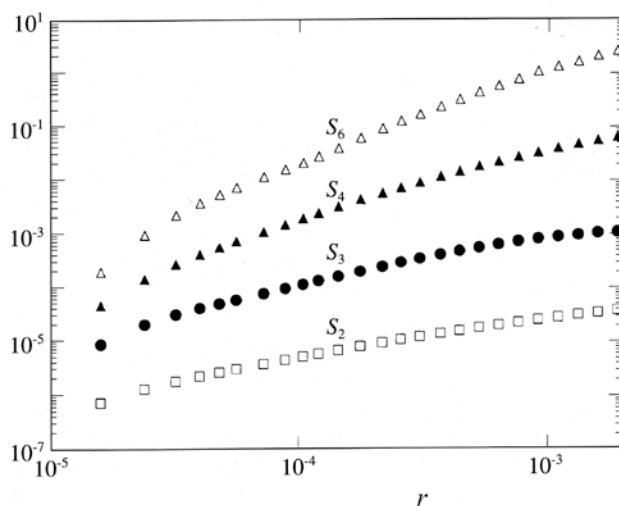
Kolmogorovova teorie předpokládá existenci inerciální oblasti, která je charakterizována známým zákonem  $-5/3$  pro spektrální hustotu kinetické energie. Ukazuje se, že podobný zákon platí také pro strukturní funkce.

Definiční vztah strukturní funkce (7.21) testuje mocniny průměrných přírůstků rychlosti mezi body prostorově vzdálenými o  $r$  (modul vektoru  $\mathbf{r}$ ). V inerciální oblasti tyto strukturní funkce musí záviset pouze na  $\varepsilon$  a na měřítku  $r$ . Odtud plyne škálování

$$S_n(r) \sim \varepsilon^{n/3} r^{n/3}, \quad (7.49)$$

což se za Kolmogorovova předpokladu, že  $\varepsilon$  nezávisí na  $r$  vyjadřuje stručně jako  $S_n(r) \sim r^{n/3}$ .

Asi jedna dekáda spektra se chová skutečně podle škálovací relace  $E(\kappa_i) \sim i^{-5/3} \sim \kappa_i^{-5/3}$ . Tato oblast vlnových čísel se pokládá za inerciální oblast. Prakticky dosažitelné jsou pouze hodnoty  $r_i = i\overline{U}\Delta t$ , kde  $\Delta t$  je převrácená hodnota vzorkovací frekvence záznamu. Není-li tato frekvence dostatečně vysoká, nedosáhne se malých měřítek. Ukazuje se, že lze obvykle nahradit rozdíl absolutní hodnotou rozdílu a škálování se nezmění. Na obr. 7.9 je znázorněno několik strukturních funkcí stále téhož signálu v závislosti na indexu  $i$ , který je úměrný  $r$ .



Jak je vidět na obr. 7.9, na rozdíl od energetického spektra, není ani na strukturních funkcích nejnižšího řádu jasně patrná oblast škálování  $\sim r^\zeta$ . Ukazuje se, že inerciální oblast je na strukturních funkcích mnohem méně zjevná, než na spektru. Z tohoto důvodu se používá hypotéza „rozšířené samopodobnosti“ (angl.: *extended self-similarity*) vycházející z toho, že strukturní funkce  $S_3(r)$  se škáluje teoreticky jako  $r$  a tudíž se k získání škálovacích exponentů používá vztah

$$S_n(r) \sim S_3^{\zeta_n}, \quad (7.50)$$

který se ukazuje téměř vždy splněn. Podle K41 závisí exponent  $\zeta_n$  lineárně na  $n$  podle vztahu  $\zeta_n = n/3$ , ve skutečnosti je nelineární funkcí  $n$ . Pro nízké řády strukturních funkcí je však tato odchylka velmi malá, významnější je až pro řád 3 a více. Tyto odchylky souvisí s intermitencí malých měřítek.

### 7.3.5. Turbulentní difúze

Difúze částic tekutiny charakterizuje způsob vzájemného vzdalování dvou částic tekutiny, jedná se tedy o typicky Lagrangeovskou úlohu. Klasická teorie difúze nabízí dva mechanismy – koherentní a nekoherentní.

Nekoherentní difúze je vlastně molekulární difúze, která souvisí s tepelným pohybem molekul. Pro nekoherentní difúzi existuje jednoduchý jednorozměrný model – model „vrávorajícího opilce“ (angl.: *drunken walk*). Představme si, že opilý člověk se na počátku pokusu nachází v počátku souřadného systému a je schopen udělat neomezené množství stejně dlouhých kroků, přičemž pravděpodobnost, že následující krok bude směrem dopředu či dozadu je stejná (0,5). Po velkém množství kroků je nejpravděpodobnější poloha opilce stejná jako na začátku pokusu. Pravděpodobnost jiných poloh podléhá normálnímu, Gaussovu rozdělení pravděpodobnosti s maximem v počátku. Takovýmto způsobem se chová každá částice plynu v 3 dimensionálním prostoru, výsledné rozložení částic je tedy v souladu s Gaussovým 3D rozdělením. Pro zkoumání difúze je však důležitějším údajem rozptyl vzdáleností částic, tedy hodnota  $\langle r^2 \rangle$ , ta je potom pro tento prostorový nekoherentní případ úměrná časovému intervalu  $t$ .

Naopak koherentní difúze je charakteristická rovnoměrným vzdalováním dvou částic konstantní rychlostí  $d\langle r \rangle/dt \sim konst$ , jejich vzdálenost je potom lineární funkcí času  $\langle r \rangle \sim t$ , tomu odpovídá závislost  $\langle r^2 \rangle \sim t^2$ .

Ukazuje se, že pro turbulenci v inerciálním režimu, která je charakterizována spektrem  $E(\kappa) \sim \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$ , je průměrná rychlost vzdalování dvou částic  $d\langle r \rangle/dt \sim r^{1/3}$  a pro časovou změnu směrodatné odchylky potom platí známý zákon 4/3 :

$$\frac{d\langle r^2 \rangle}{dt} \sim \left[ \langle r^2 \rangle^{1/2} \right]^{4/3}. \quad (7.51)$$

Ve vztahu k času tedy dostáváme vztah  $\langle r^2 \rangle \sim t^3$ . Turbulentní difúze je tak nejefektivnější ze všech uvedených případů.

Tyto vztahy publikoval poprvé Richardson 1926 na základě pozorování chování meteorologických balonů v atmosféře. Richardsonova difúze bývá nazývána „abnormální“ (angl.: *anomalous*), odlišuje se od obou výše popsaných klasických způsobů difúze, tedy koherentní a nekoherentní.

Richardsonův výsledek potvrdil Kolmogorov ve své teorii K41. V současné době se používají modernější postupy modelování turbulentní difúze založené na teorii Markovových procesů, základní myšlenka je však stejná.

## 7.4. Dynamické systémy

Proudění tekutiny je popsáno systémem parciálních diferenciálních rovnic (N-S rovnice). Je známo, že parciální diferenciální rovnice mohou být aproximovány soustavou obyčejných diferenciálních rovnic (například pomocí Galerkinovy metody). Pokud bychom chtěli systém popsat dostatečně přesně, museli bychom uvažovat velmi vysoký počet těchto rovnic, tak jak se to provádí při přímé numerické simulaci. Například pro zcela vyvinutou turbulenci je potřebný počet rovnic úměrný Reynoldsovu číslu v jisté mocnině (např.  $Re^{9/4}$ ). Avšak pokud je pozornost zaměřena pouze na pravidla škálování a základní mechanismy kaskádového přenosu energie v oblasti malých měřítek, potom je možné zachytit základní jevy pomocí omezeného počtu obyčejných diferenciálních rovnic. Jedná se o tzv. „vrstvé modely“ (angl.: *shell models*), základní myšlenka pochází od Obuchova (1971). N-S rovnice jsou nahrazeny dynamickým systémem s  $N$  proměnnými  $u_1, u_2, \dots, u_N$  z nichž každá představuje typickou amplitudu rychlostního pole příslušející určitému délkovému měřítku. Fourierův prostor je potom rozdělen do  $N$  vrstev. Každá „vrstva“ (angl.: *shell*)  $\kappa_n$  sestává ze sady vlnových vektorů  $\kappa$  takových, že  $\kappa_0 2^n < |\kappa| < \kappa_0 2^{n+1}$ . Proměnná  $u_n$  je diference rychlosti na délce  $\sim \kappa_n^{-1}$ , takže pro každou vrstvu máme jeden stupeň volnosti. Existují však modifikace s více stupni volnosti na každou vrstvu (Grossmann a Lose, 1992). Snahou bylo najít speciální schéma pro uzavření soustavy rovnic, které je schopno reprodukovat Kolmogorovovo spektrum ve smyslu určitého bodu vhodné diferenciální rovnice pro pole rychlostí průměrované v rámci vrstev ve Fourierově prostoru. Proměnná  $u_n$  je určena střední energií příslušející  $n$ -tému vlnovému číslu

$$u_n(t) = \left( \int_{\kappa_n}^{\kappa_{n+1}} 2E(q, t) dq \right)^{1/2}, \quad (7.52)$$

může být považována za přírůstek rychlosti  $|u(x) - u(x + \ell)|$  pro víry velikosti  $\ell \sim \kappa_n^{-1}$ . Potom vrstva o rozměru

$$\kappa_n = r^n \kappa_0 \text{ při } r > 1 \quad (7.53)$$

obsahuje vlnová čísla s modulem  $\kappa$  takovým, že  $\kappa_n < \kappa < \kappa_{n+1}$  a standardně se volí  $r = 2$ . Potom jsou vlnová čísla  $\kappa_n$  ekvidistantní na logaritmické stupnici.

Při konstrukci příslušné rovnice musí být splněna následující podmínky:

- lineární člen pro  $u_n$  je  $-\nu \kappa_n^2 u_n$ ;
- nelineární členy pro  $u_n$  jsou dány kvadratickou formou typu  $\kappa_n u_n u_{n'}$ ;
- budící a tlumící členy nejsou přítomny, proto musí být zachována energie  $\frac{1}{2} \sum_n |u_n|^2$ ;
- interakce mezi vrstvami jsou v  $\kappa$ -prostoru lokální, tj.  $n'$  a  $n''$  jsou blízké  $n$ .

Tyto podmínky vyplývají přímo z N-S rovnic, poslední je potom jednou z možností uzavření systému.

Desnyansky a Novikov (1974) zavedli model, ve kterém je zachována energie a interakce probíhají pouze mezi sousedními vrstvami. Tyto podmínky vedou k následující rovnici pro reálné proměnné  $u_n$ :

$$\left( \frac{d}{dt} + \nu \kappa_n^2 \right) u_n = \kappa_n \left[ u_{n-1}^2 - 2u_n u_{n+1} - 2^{1/3C} (u_{n-1} u_n - 2u_{n+1}^2) \right] + f_n, \quad (7.54)$$

kde  $n = 0, 1, \dots, \infty$ , okrajová podmínka:  $u_{-1} = 0$  a vnější buzení na první vrstvě nezávisí na čase:  $f_n = f \delta_{n,0}$ , dále parametr  $C$  není konstantní a je dán typem asymptotického škálování proměnných  $u_n$ .

Nezávisle na hodnotě  $C$  dostáváme pro limitní případ, kdy počet vrstev jde nade všechny meze následující spektrum

$$E(k_n) \sim \kappa_n^{-5/3} F(\kappa_n / l_D), \quad (7.55)$$

kde  $\kappa_D = (\varepsilon / \nu^3)^{1/4}$  je převrácená hodnota Kolmogorovova měřítka a disipace energie je

$$\varepsilon = \sum_n f_n u_n = f u_0. \quad (7.56)$$

Potom pro  $C < 1$  dostáváme pro  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F_0 \neq 0$  známý Kolmogorovův 5/3 zákon. Zatímco pro  $C > 1$  není funkce  $F(x)$  analytická v  $x$  pro  $x \rightarrow 0$ , potom dostáváme  $F(x) \sim x^{-\xi}$ , kde  $\xi = 2 \log_2 C$ . V limitě pro  $\nu \rightarrow 0$  je příslušné spektrum

$$E(\kappa) \sim \kappa^{-(5/3+\xi)} \quad (7.57)$$

a rychlost disipace potom je

$$\varepsilon \sim \nu^{9\xi/(8+3\xi)}. \quad (7.58)$$

Vidíme, že rychlost disipace se snižuje k nule se snižující se viskozitou a energie není disipována na malých měřítkách a naopak může být kaskádovitě přenášena k měřítkům větším. Toto odporuje pozorování, kdy se ukazuje, že pro  $Re \rightarrow \infty$  se rychlost disipace ustaluje na nenulové hodnotě. Tento jednoduchý model také nezachycuje vliv intermitence.

Dalším populárním modelem je „GOY model“ (podle autorů Gledzer, Ohkitani, Yamada), který je již schopen modelovat intermitenci. Tento model pracuje s komplexními proměnnými.

Prostorovost vírových struktur jsou schopny zachytit „hierarchické modely“, které zavádějí více proměnných na jednu vrstvu. Jsou to již výpočetně velmi složité modely, které si příliš nezadají s přímou numerickou simulací pomocí pseudospektrálních metod. Mají však výhodu, že lze pomocí nich modelovat proudění do značně vyšších hodnot Reynoldsových čísel než je reálné užitím přímé numerické simulace.

Vrstvové modely vlastně představují zkrácené N-S rovnice, hlavním rozdílem oproti plným rovnicím je fakt, že vlnové číslo  $\kappa$  je zde skalárem, tím je ztracena informace o prostorovosti vírových struktur. Zkoumáme potom dynamický systém s chaotickým chováním, který je charakterizován rozumným počtem stupňů volnosti (typicky nižším než 100). Výhodou je možnost studia příslušného „podivného atraktoru“ ve fázovém prostoru pomocí standardních analytických nástrojů používaných při analýza deterministického chaosu, jako jsou fraktální dimenze, Lyapunovovo spektrum, dynamická intermitence, multyfraktálnost. Tím je dáno propojení mezi ergodickými vlastnostmi dynamiky podivných atraktorů a skutečným třírozměrným prostorem s nekonečným počtem měřítek.

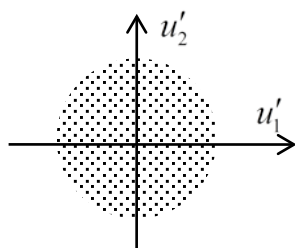
## 8. Příklady turbulentních proudů

V této kapitole uvedeme typické případy turbulentních proudů. Zaměříme se přitom na vlastnosti, které souvisejí s jejich turbulentní strukturou.

### 8.1. Mřížková turbulence

Podívejme se nejprve na mřížkovou turbulenci, která je poněkud netypickým případem turbulentního proudu, protože se nejedná o smykovou oblast ve smyslu pole středních rychlostí. Mřížková turbulence vzniká za rovinnou mříží, která je vyrobena z tyčí kruhového průřezu, která tvoří čtvercová oka v rovině mříže. Velikost oka mříže je  $M$ , průměr tyčí je  $d$ . Proudí-li tekutina oky mříže kolmo k její rovině střední rychlostí  $U_0$ , vzniká záhy (ve vzdálenosti  $x_1$  asi  $15 \cdot M$ ) homogenní izotropní turbulentní proudění (viz obr. 3.10). Za jednotlivými částmi mříže vznikají úplavy, které jsou orientovány ve dvou navzájem kolmých směrech. Ty pak spolu navzájem interagují tak, že poměrně záhy vzniká homogenní a izotropní turbulence. Homogenita je zde splněna ve směrech  $x_2$  a  $x_3$ , isotropie potom ve všech 3 směrech se týká fluktuálních složek rychlosti, střední rychlost je nenulová pouze ve směru  $x_1$ .

V případě izotropního pole fluktuací rychlosti se v souřadnicích  $(u'_1, u'_2, u'_3)$  pohybujeme uvnitř koule, dvojrozměrná analogie je na obr. 8.1. Pak lze předpokládat, že složky fluktuací rychlosti jsou nekorelované, tedy  $\overline{u'_i u'_j} = 0$  pro  $j \neq i$  a také platí, že  $\overline{u'^2_1} = \overline{u'^2_2} = \overline{u'^2_3}$ , potom tenzor Reynoldsových napětí je ve tvaru  $-\rho \overline{u'^2}$ . Toto je případ mřížkové turbulence, kdy nedochází k produkci Reynoldsových napětí.



Obr. 8.1 – Izotropní fluktuace

Energetická bilance má zde zjednodušený tvar, protože v proudovém poli je v důsledku platnosti rovnice kontinuity střední rychlost všude konstantní a tedy produkce je nulová. Musí tedy docházet k útlumu kinetické energie turbulence ve směru středního proudu  $x_1$ . Experimenty ukazují na mocninou závislost ve tvaru

$$\frac{k}{U_0^2} = K \left( \frac{x_1 - x_{10}}{M} \right)^{-n}, \quad (8.1)$$

kde  $k$  je kinetická energie turbulence,  $U_0$  je střední rychlost proudění,  $K$  je parametr, jehož hodnota závisí na geometrii mříže a na Reynoldsově čísle,  $x_{10}$  je poloha mříže,  $M$  je oko mříže a  $n$  je exponent, jehož hodnota je z experimentů v rozmezí  $1,15 < n < 1,45$ .

Na základě zákona útlumu volné izotropní turbulence lze definovat disipativní měřítko  $Le$  turbulence

$$Le = - \frac{(\overline{u_1'^2})^{3/2}}{u_1 \frac{d\overline{u_1'^2}}{dx_1}}. \quad (8.2)$$

Toto měřítko je významnou charakteristikou turbulentního proudění a hraje významnou roli v procesech, které ovlivňuje volná turbulence, jako je např. zkrácený přechod mezní vrstvy do turbulence způsobený turbulencí ve vnějším nabíhající proudě.

## 8.2. Smykové proudy

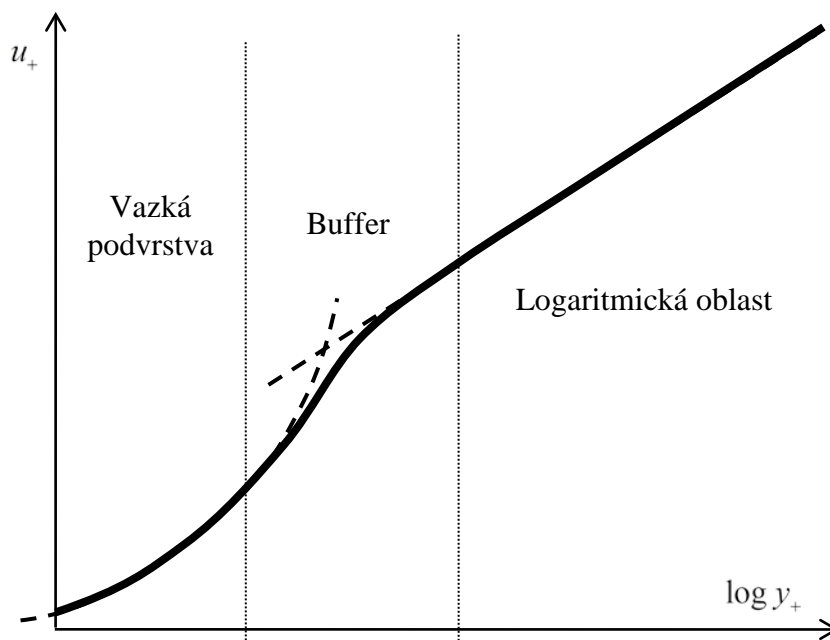
V kapitole 6 bylo ukázáno, že pro vznik nestabilního stavu v tekutině je nutnou podmínkou nehomogenní struktura proudící tekutiny, která je typická pro smykové oblasti, kdy dochází ke změnám rychlosti proudění napříč proudovým polem. Pokud by totiž k těmto změnám nedocházelo, potom z rovnice kontinuity pro nestlačitelnou tekutinu vyplývá, že rychlost tekutiny musí být v celé oblasti konstantní. Probereme nyní proto některé typické kanonické případy turbulentních smykových proudů.

Při proudění v blízkosti tuhých povrchů vzniká smyková oblast vlivem jevu ulpívání tekutiny na stěně, kdy na stěně je vektor rychlosti proudění tekutiny nulový. Základním typem stěnové smykové oblasti je mezní vrstva. „Mezní vrstva“ (angl.: *boundary layer*) vzniká v blízkosti stěny obtékané proudem tekutiny.

Profil střední rychlosti má v turbulentní mezní vrstvě typický tvar, který je schematicky ukázán na obr. 8.2, jsou zde zavedeny bezrozměrné souřadnice  $u_+$  a  $y_+$  pomocí tzv. „třecí rychlosti“ (angl.: *friction velocity*). Definice třecí rychlosti  $u_\tau$  a bezrozměrných souřadnic mezní vrstvy je následující

$$u_\tau \equiv \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad u_+ = \frac{\overline{u_1}}{u_\tau}, \quad y_+ = \frac{x_2 u_\tau}{\nu}, \quad (8.3)$$

kde  $\tau_0$  je časově střední hodnota smykového tření na stěně,  $\rho$  je hustota a  $\nu$  je kinematická vazkost tekutiny. Vodorovná osa v grafu na obr. 8.2 je logaritmická.



Obr. 8.2 – Rychlostní profil turbulentní mezní vrstvy

V blízkosti stěny vzniká „vazká podvrstva“ (angl.: *viscous sublayer*), kde je lineární závislost mezi parametry mezní vrstvy. Dále od stěny je „logaritmická oblast“ (angl.: *logarithmic region*), mezi těmito dvěma oblastmi je vložena tzv. „buffer layer“ (v angličtině, český termín není zaveden, jedná se o vrstvu „přechodu“ či „náravníku“ mezi vazkou podvrstvou a logaritmickou oblastí). Oblast buffer je vymezena hodnotami bezrozměrné vzdálenosti od stěny  $5 < y_+ < 30$ , přičemž celková tloušťka bezrozměrná turbulentní mezní vrstvy může být řádu  $10^3$ .

Předpokládejme, že statistické veličiny mají v turbulentním proudu rovinné rozložení nezávislé na hodnotě souřadnice  $x_3$ , přičemž pole jsou symetrická podle této osy. Pro rozložení pravděpodobnosti rychlosti  $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$  potom platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \quad (8.4)$$

$$f(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3; t) = f(u_1, u_2, -u_3; x_1, x_2, -x_3; t). \quad (8.5)$$

Tyto dvě rovnice dávají pro  $x_3 = 0$  rovnost středovaných rychlostí  $\overline{u_3} = -\overline{u_3}$ , tato rovnost může být splněna pouze pro  $\overline{u_3} = 0$ . Podobně lze odvodit vztahy pro složky Reynoldsových napětí  $\overline{u'_1 u'_3} = 0$  a  $\overline{u'_2 u'_3} = 0$ . Z rovnice (8.4) vyplývá, že tyto vztahy musí platit v celé oblasti.

Pro nominálně rovinné proudění tedy dostáváme nulovou střední rychlost ve směru  $x_3$  a tenzor Reynoldsových napětí bude ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \overline{u_1'^2} & \overline{u_1' u_2'} & 0 \\ \overline{u_1' u_2'} & \overline{u_2'^2} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{u_3'^2} \end{bmatrix}. \quad (8.6)$$

Korelace složky flukтуаční rychlosti  $u'_3$  se zbylými složkami jsou nulové.

Podívejme se nyní blíže na případ rovinné mezní vrstvy na desce. Hlavní proud je zde směřován podél desky ve směru osy  $x_1$ . Pro stacionární proudění potom můžeme předpokládat, že platí

$$\overline{u_1} \gg \overline{u_2} \text{ a } \frac{\partial}{\partial x_1} \ll \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (8.7)$$

Reynoldsovy rovnice se zredukuje na jedinou rovnici pro směr  $x_1$

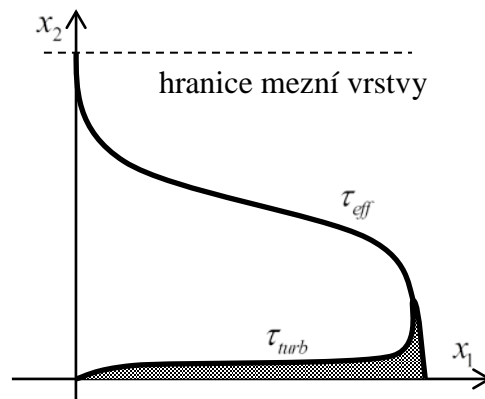
$$\frac{\partial \overline{u_1} \overline{u_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{u_1} \overline{u_2}}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \mu \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2} - \rho \overline{u_1' u_2'} \right]. \quad (8.8)$$

Gradient tlaku ve směru hlavního proudu je často nulový. Výraz ve hranaté závorce na pravé straně představuje celkové smykové napětí  $\tau_{eff}$ , které se skládá z vazké složky  $\tau_v$  a složky turbulentní  $\tau_t$

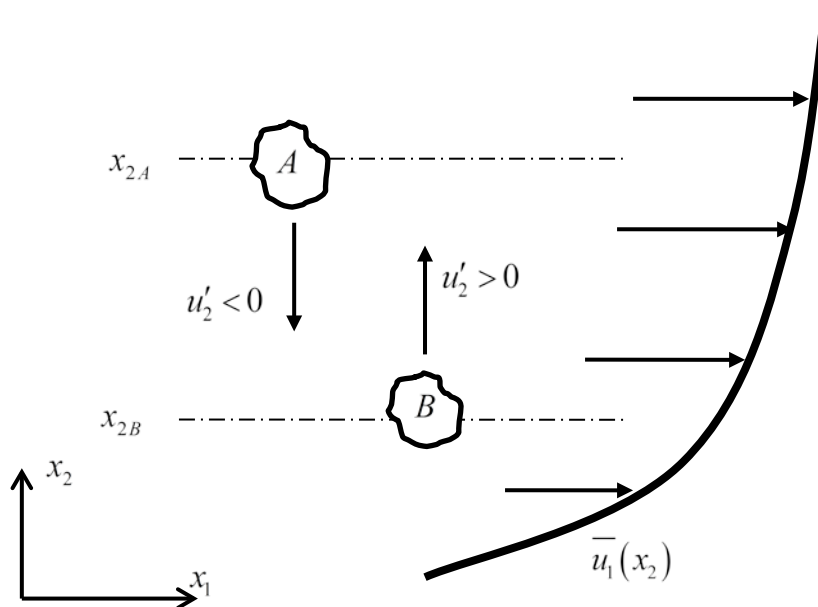
$$\tau_{eff} = \tau_v + \tau_{turb} = \mu \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2} - \rho \overline{u_1' u_2'}. \quad (8.9)$$

V blízkosti stěny, tedy ve vazké podvrstvě, bufferu a logaritmické oblasti má celkové smykové napětí přibližně konstantní hodnotu, která je rovna velikosti smykového tření na stěně  $\tau_w$ , dále od stěny jeho hodnota téměř lineárně klesá. Na stěně je turbulentní složka smykového tření  $\tau_{turb}$  nulová (protože fluktuace rychlosti jsou nulové), vazká složka  $\tau_v$  je zde tedy rovna povrchovému tření. Postupujeme-li nyní od stěny, vazká složka klesá a turbulentní naopak roste, až v logaritmické oblasti má vazká složka zanedbatelnou velikost oproti turbulentní. Situace v turbulentní mezní vrstvě je schematicky naznačena na obr. 8.3, osa  $x_1$  leží na stěně,

vazká složka smykového napětí  $\tau_v$  je znázorněna šedou barvou. Z obrázku je zřejmé, že vazkost tekutiny ovlivňuje turbulentní mezní pouze v bezprostřední blízkosti stěny ve vazké podvrstvě, tento vliv doznívá v bufferu a v logaritmické oblasti téměř vymizí.

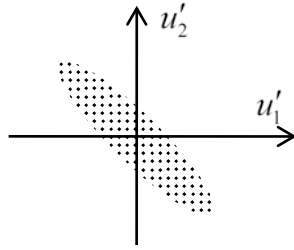


Obr. 8.3 – Smykové napětí v turbulentní mezní vrstvě



Obr. 8.4 – Příčný pohyb částic v mezní vrstvě

V mezní vrstvě má turbulentní složka smykového napětí  $-\rho \overline{u_1' u_2'}$  a gradient střední rychlosti  $\partial \overline{u_1} / \partial x_2$  v příčném směru téměř vždy opačné znaménko. Situace je znázorněna na obr. 8.4. Částice tekutiny A se pohybuje směrem dolů z pozice  $x_{2A}$  do pozice  $x_{2B}$ , vzniká tak fluktuace složky rychlosti  $u_2' < 0$ . Tím vznikne v místě B fluktuace složky rychlosti  $u_1' > 0$ , protože platí  $\overline{u_{1A}} > \overline{u_{1B}}$ . Proto korelace  $u_1'$  a  $u_2'$  musí být záporná a hodnota odpovídající složky Reynoldsova napětí je kladná. Pro částici tekutiny v místě B, která se pohybuje naopak do A je situace přesně opačná: fluktuace složky rychlosti  $u_2' > 0$  a fluktuace složky  $u_1' < 0$ . Výsledek je tedy stejný – korelace  $u_1'$  a  $u_2'$  musí být záporná a hodnota odpovídající složky Reynoldsova napětí je tedy kladná. Dochází tedy ke generování Reynoldsova napětí, situace je schematicky znázorněna na obr. 8.5. Podobná situace je i ve volné smykové vrstvě.



Obr. 8.5 – Fluktuační ve smykové vrstvě

Obdobná situace je také v případě rovinného proudění v kanále, v trubce nebo ve volném paprsku či úplavu, tam ovšem nevzniká vazká podvrstva.

Nyní se zaměříme na energetickou bilanci při Reynoldsově popisu, která byla podrobně formulována v oddíle 5.2.3. Obecně rovnice bilance turbulentní energie vyjadřuje ve stacionárním případě rovnováhu 4 členů

$$A + P + T + D = 0, \quad (8.10)$$

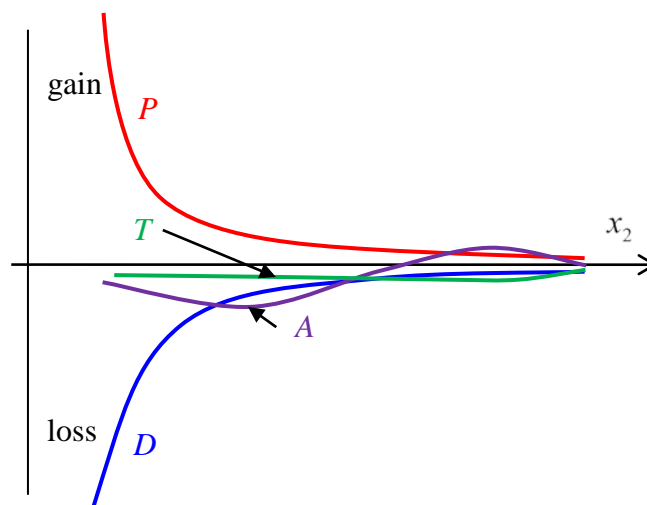
kde  $A$  je advekce (angl.: *advection*), unášení středním proudem, tento člen má obecně tvar  $-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}$ ,  $P$  je produkce (angl.: *production*) turbulentní energie v souvislosti se středním

proudem, bývá ve tvaru  $-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}$ ,  $T$  je turbulentní transport (angl.: *transport*), který souvisí

s fluktuacemi tlaku  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{u'_j \left( \frac{1}{2} \overline{q'^2} + \frac{p'}{\rho} \right)} \right]$  a  $D$  je disipace (angl.: *dissipation*) turbulentní

energie v souvislosti s vazkými efekty a je charakterizována rychlostí disipace  $\varepsilon$ . Podrobnosti související s bilancí energie byly ukázány v kapitole 5.

U turbulentní mezní vrstvy je tato bilance kvalitativně znázorněna na obr. 8.6. Produkce je největší v bufferu, stejně jako disipace, obojí se snižuje směrem k hranici mezní vrstvy. Transport působí v mezní vrstvě ztráty, advekce potom uvnitř mezní vrstvy způsobuje ztráty, u jejího okraje však zisk.

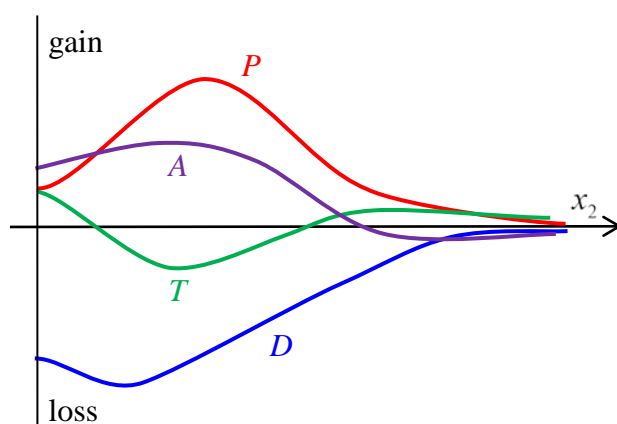


Obr. 8.6 – Bilance energie v turbulentní mezní vrstvě

Volné smykové oblasti vznikají při interakci dvou nebo více proudů ve volném prostoru, přímo neinteragují s omezujícími stěnami. Základními typy volných smykových oblastí jsou paprsky, směšovací vrstvy a úplavy. Paprsek je v podstatě kombinace směšovacích vrstev kolem jádra paprsku.

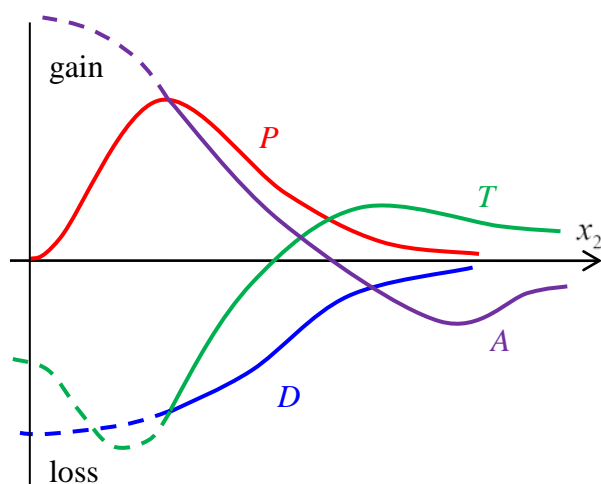
Paprsek (angl.: *jet*) vzniká při interakci proudící tekutiny, která vytéká z nějakého otvoru (trysky), s okolní tekutinou, která může být v klidovém stavu. Na hranicích paprsku vznikají volné smykové vrstvy, které jsou zpravidla nestabilní, rychle se rozšiřují v příčném směru, až se spojí. Potom vzniká typický rychlostní profil střední rychlosti zvonovitého tvaru. Ukazuje se, že dále po proudu má tento profil, jakož i profily turbulentních charakteristik vlastnost samopodobnosti. To znamená, že tvar profilů těchto veličin nezávisí na souřadnici  $x_1$ , je však třeba provést transformaci těchto profilů. Ve vhodných bezrozměrných souřadnicích dostaneme univerzální tvar těchto profilů.

Podívejme se zde opět na energetickou bilanci napříč proudem. Na obr. 8.7 je schematicky naznačen vývoj jednotlivých členů energetické rovnice pro rovinný turbulentní paprsek v příčném směru  $x_2$ , případ je symetrický pro záporné hodnoty souřadnice.



Obr. 8.7 – Bilance energie v turbulentním paprsku

Úplav (angl.: *wake*) či oblast recirkulačního proudění vzniká v souvislosti s odtržením mezní vrstvy od stěny. Tvar energetické bilance je v případě úplavu velmi podobný případu paprsku, je zobrazen na obr. 8.8.



Obr. 8.8 – Bilance energie v turbulentním úplavu

Produkční člen má v případě paprsku i úplavu maximum pro jistou hodnotu  $x_2$ . Dá se ukázat, že poloha tohoto maxima je v blízkosti maximálního smyku na profilu střední rychlosti  $|\partial \bar{u}_1 / \partial x_2|$ . Toto samozřejmě není náhoda, lze podat dvojí interpretaci tohoto jevu. Jednak produkční člen v sobě obsahuje tuto derivaci a lze předpokládat, že jeho maximum je v blízkosti maxima této derivace. Dále, v blízkosti maximální derivace je poloha inflexního bodu na profilu rychlosti  $\bar{u}_1$ , podle nevazké teorie stability je potom proudění nestabilní a dochází k produkci turbulentní energie tímto mechanismem.

## 9. Modelování turbulence

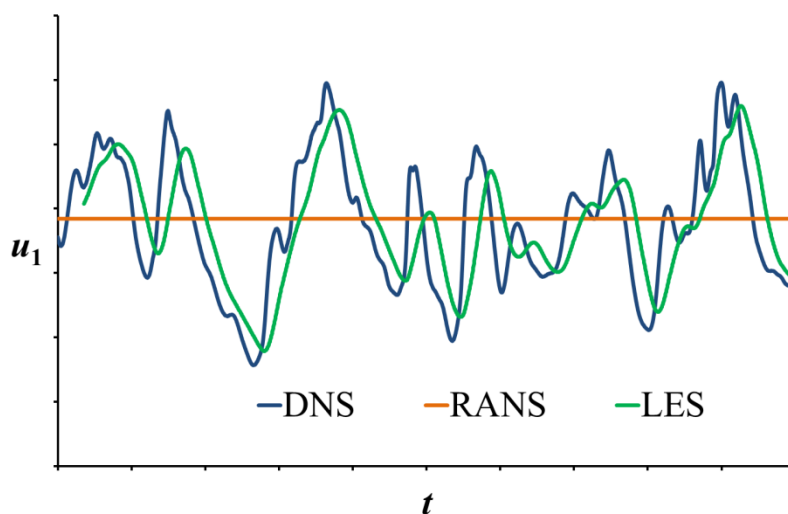
Metody matematického modelování většinou využívají metody konečných objemů a vhodných numerických schémat, tato problematika není obsahem tohoto pojednání, detaily čtenář nalezne v příslušné literatuře.

Implementace všech metod používaných v turbulenci je založena na použití metod numerické matematiky – provádí se diskretizace problému v prostoru i v čase. Obecně každá metoda matematického modelování vyžaduje takovou prostorovou i časovou diskretizaci, aby byla schopna modelovat hodnoty gradientů všech veličin, které v daném případě přicházejí v úvahu. Maximální hodnoty těchto gradientů jsou dány minimální velikostí struktur. Jejich velikost závisí na podmínkách proudění (geometrie oblasti, rychlost a vlastnosti tekutiny) a dále na požadavku na výsledky. Např. při použití metody DNS je třeba volit diskretizaci tak, aby byly zachyceny vírové struktury všech velikostí až po Kolmogorovovu délku, resp. Kolmogorovovo časové měřítko. U metody LES diskretizace vlastně definuje filtr pro prostorové struktury. Nejméně náročné na počet diskretizovaných elementů jsou potom metody RANS, protože prostorové gradienty středovaných veličin mají v turbulentním proudění řádově menší hodnoty než gradienty okamžité.

Diskretizace problému v prostorové a časové oblasti je úzce provázána. Časová diskretizace musí být taková, aby model byl schopen zachytit dynamické chování struktur, které jsou modelovány na prostorové síti. To znamená, čím menší prvek diskretizační sítě, tím menší struktury simulujeme a tím kratší časový krok musíme použít. Ten přímo souvisí s rychlostí změn těchto nejmenších struktur.

K numerickému řešení diferenčních rovnic používáme běžné počítače, které jsou však von Neumannova typu, tedy pracují na sekvenčním principu. Obecně lze tvrdit, že N-S rovnice jsou eliptické, obsahují jak prostorové tak i časové vazby. Úloha jejich řešení je vhodná pro masivně paralelní algoritmy a velmi nevhodná pro sekvenční algoritmy. Pro jejich řešení, které je v současnosti extrémně náročné na výkon a rychlost sekvenčních počítačů, je velkým příslibem vývoj paralelních algoritmů a hlavně paralelních počítačů.

V současnosti máme k dispozici pro řešení N-S rovnic tři metody. Je to jednak přímá numerická simulace N-S rovnic (DNS), kdy řešíme problém v prostoru i v čase, Reynoldsova formulace pro řešení středních polí v prostoru (RANS) a kombinace obou přístupů, kdy simulujeme velké víry a malé struktury modelujeme pomocí Reynoldsových rovnic (LES). Výsledek získaný pomocí jednotlivých přístupů v daném bodě prostoru je znázorněn na obr. 9.1. Metoda DNS poskytne přesný časový průběh sledované veličiny, metoda RANS pouze střední hodnotu v čase a výsledkem metody LES je vyhlazený signál.



Obr. 9.1 – Výsledek řešení N-S rovnic

V praxi není hranice mezi výše uvedenými metodami ostrá, existují různé varianty, např. označení „*Very Large Eddy Simulation*“ (VLES) a „*Unsteady RANS*“ (URANS) představují přechodné stádium mezi metodou RANS a LES.

Výběr metody matematického řešení pro konkrétní úlohu je obvykle předurčen praktickými hledisky. DNS přichází v úvahu pouze v případě, že úloha je charakterizována jednoduchou geometrií, Reynoldsovo číslo je velmi nízké a současně máme k dispozici potřebné hardwarové vybavení. Při řešení naprosté většiny praktických inženýrských úloh se musíme spokojit s přístupem RANS, pouze ve výjimečných případech lze aplikovat metodu LES, metoda DNS je rezervována pro speciální úlohy výzkumného charakteru.

Přes zcela principiální teoretické problémy, které jsou spojeny s metodami typu RANS, lze při zachování správného postupu získat pomocí těchto metod velmi dobré výsledky použitelné v praxi. Tyto výpočty by však měly být vždy doplněny ověřovacími experimenty provedenými nejlépe pro stejnou úlohu, nebo alespoň kvalitativní srovnání s publikovanými výsledky experimentů na podobných úlohách. Pro řešení úloh se zcela neznámým řešením nejsou obecně tyto metody vhodné. V této souvislosti je třeba zdůraznit, že metody typu RANS principiálně nelze použít pro modelování nestabilit jakéhokoli druhu, důvodem je neschopnost těchto metod modelovat vývoj malých poruch v čase a prostoru. Metodami RANS tedy nelze spolehlivě předpovědět ani přechod do turbulence, ani odtržení mezní vrstvy. Tyto jevy je nutno modelovat jinými, specializovanými modely, nebo dodat údaje o nich z experimentu. Naopak, v oblastech, kde jsou splněny podmínky pro správné fungování vybraného RANS modelu, pracují tyto metody velmi spolehlivě.

## 9.1. Přímá numerická simulace (DNS)

Přímá numerická simulace (angl.: *Direct Numeric Simulation – DNS*) představuje modelování N-S rovnic pomocí postupů numerické matematiky. Prostorovou a časovou diskretizaci je nutno volit tak, aby bylo pokryto celé spektrum vírových struktur, které se vyskytují v reálném proudění. To znamená, že na diskretizační síti musíme být schopni zachytit víry o rozměru Kolmogorovova měřítko.

V této souvislosti bývá definován pojem počtu stupňů volnosti  $n$  daného problému, který souvisí s počtem prvků diskretizační sítě. Ten je dán poměrem mezi velikostí největších  $\ell_0$  a nejmenších  $\eta$  struktur v proudovém poli (viz 7.3). Z Kolmogorovovy teorie pro izotropní turbulenci vyplývá závislost tohoto poměru na Reynoldsově číslu ve tvaru  $\ell_0/\eta \sim Re^{3/4}$ . Počet stupňů volnosti problému  $n$  souvisí s počtem prvků v 3-rozměrném prostoru. Platí tedy následující úměra

$$n \sim (\ell_0/\eta)^3 \sim Re^{9/4}. \quad (9.1)$$

Je zřejmé, že nemá smysl provádět simulaci ve zmenšeném počtu rozměrů (tedy v rovině), ale vždy v 3-rozměrném prostoru, protože turbulentní proudění je vždy prostorového charakteru.

Při implementaci výpočtů pomocí DNS se používají spektrální nebo pseudospektrální metody. Řešení se předpokládá ve tvaru Fourierovy řady v prostoru. Tento přístup rozpracoval již v roce 1972 Orszag s Pattersonem, vlivem omezené kapacity výpočetní techniky je metoda DNS používána doposud pouze pro výpočty geometricky jednoduchých oblastí proudění při extrémně malých Reynoldsových číslech. Při zvyšování Reynoldsova čísla prudce roste počet diskretizovaných prvků v oblasti a současně klesá potřebný časový krok. Výpočty proudění pomocí DNS jsou obecně extrémně náročné na výkon výpočetní techniky a trvají velmi dlouho.

Lze dokázat, že výpočetní náročnost s ohledem na diskretizaci v prostoru i v čase roste se šestou mocninou Reynoldsova čísla. Dnešní nejvýkonnější počítače s výkonem řádu desítek gigaflop jsou schopny řešit úlohy pomocí DNS charakterizované Reynoldsovým číslem řádu maximálně  $10^3$ , aplikačně zajímavé úlohy turbulentního proudění ve strojích jsou charakteri-

zovány Reynoldsovými čísly řádu  $10^5$  a více, proudění v atmosféře a hydrosféře potom ještě o několik řádů většími. Pro dosažení desetkrát vyššího Reynoldsova čísla bude nutno milionkrát zvýšit výkon počítačů.

Metoda DNS je v současnosti a zřejmě bude ještě dlouhou dobu i v budoucnosti, využívána k řešení fundamentálních úloh z oblasti teorie turbulence. Omezuje se na geometricky jednoduché oblasti a velmi nízká Reynoldsova čísla. Poskytuje nám však dokonalý obraz fyziky proudící tekutiny. Ze správně provedené simulace DNS lze získat libovolné veličiny v libovolném místě i čase. Výsledky takovéto simulace jsou všeobecně považovány za ekvivalentní výsledkům experimentů, co se týče věrohodnosti, komplexnosti informace však experimenty daleko předčí.

## 9.2. Metoda simulace velkých vírů (LES)

Metoda simulace velkých vírů (angl.: *Large Eddy Simulation – LES*) je založena na myšlence filtrování N-S rovnic. Problém je rozdělen na dvě části, struktury větší než jistá mezní velikost jsou modelovány odděleně od struktur menších. Oba problémy jsou však vzájemně provázány, nelze je řešit odděleně.

Stručně můžeme říci, že velké struktury (víry) jsou simulovány přímo jako při DNS, malé struktury jsou modelovány podobně jako u metody RANS. Model malých turbulentních struktur je však poněkud modifikován s ohledem na omezenou velikost modelovaných struktur, jedná se o tzv. „*subgrid model*“ – modelující struktury menší než je rozměr buňky sítě.

## 9.3. Metody modelování Reynoldsových rovnic (RANS)

Tyto metody vycházejí z Reynoldsových středovaných Navier-Stokesových rovnic (angl.: *Reynolds Average Navier-Stokes – RANS*). Jak již bylo řečeno při odvození Reynoldsových rovnic, jejich problémem je neuzavřenost systému rovnic, kdy počet rovnic je menší než počet neznámých, který se oproti N-S rovnicím zvýšil o Reynoldsova napětí. Proto se metody modelování soustředí právě na uzavření systému rovnic.

Metody modelování turbulentního proudění pomocí RANS lze rozdělit do dvou podskupin. Jsou to jednak metody využívající myšlenky turbulentní vazkosti a dále metody modelování Reynoldsových napětí. Výpočty lze úspěšně provádět i ve zmenšené dimenzi – např. pro rovinné či rotačně-symetrické proudění.

### 9.3.1. Modely založené na turbulentní vazkosti

Tyto modely jsou velmi zjednodušené. Zachycují pouze vliv izotropní turbulentní vazkosti. Obecně nepracují dobře pro proudění s neizotropní turbulentní strukturou. Kupodivu mezní vrstvy, které jsou neizotropní, zvládají poměrně dobře, selhávají však při modelování zrychlujícího se nebo zpomalovaného proudění nebo vlivu zakřivení stěny. Chyby se projevují hlavně v hodnotách normálových napětí (intenzita turbulence). Jsou numericky stabilní (gradienty druhého řádu v rovnicích středního proudu stabilizují). Pracují s rozumnou přesností pro inženýrské úlohy.

Reynoldsovy rovnice, které získáme aplikací operace středování na N-S rovnice

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = \nu \nabla^2 \bar{u}_i - \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}, \quad (9.2)$$

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ -\bar{p} \delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_k} \right]. \quad (9.3)$$

Jednou z klasických metod modelování Reynoldsových napětí je „hypotéza turbulentní vazkosti“ (angl.: *turbulent-viscosity hypothesis*), kterou roku 1877 zavedl Boussinesq. Tato metoda využívá analogii s Newtonovým zákonem pro vyjádření napětí v tekutině.

Podle této hypotézy je napětí v tekutině, které přísluší deviační anizotropní části Reynoldsových napětí, úměrné střední rychlosti deformace částice tekutiny analogickým způso-

bem jako je tomu u vazkých sil. Konstantou úměrnosti je „turbulentní vazkost“  $\nu_T$  (angl.: *turbulent viscosity* nebo *eddy viscosity*):

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = \rho \nu_T \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (9.4)$$

Reynoldsovy rovnice potom přecházejí do tvaru

$$\frac{D \overline{u}_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \nu_{eff} \left( \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{p} + \frac{2}{3} \rho k \right), \quad (9.5)$$

kde  $\nu_{eff}(\mathbf{x}, t) = \nu + \nu_T(\mathbf{x}, t)$  je součinitel efektivní vazkosti. Povšimněme si, že tyto rovnice mají formálně stejný tvar jako N-S rovnice v nichž figurují časově střední rychlosti, součinitel molekulární vazkosti je nahrazen efektivním součinitelem a tlak potom modifikovaným středním tlakem  $\overline{p} + 2/3 \rho k$ .

Problémem zůstává určení turbulentní vazkosti, která je obecně funkcí polohy a času. Při praktické aplikaci se předpokládá, že změny turbulentní vazkosti v čase lze zanedbat, pro hodnoty turbulentní vazkosti v prostoru existují doporučení platná pro určitou třídu úloh. Molekulová vazkost je oproti turbulentní zanedbatelná.

Koncepce turbulentní vazkosti implicitně předpokládá rovnost normálových složek Reynoldsových napětí, tedy jejich isotropii. Tato podmínka je dobře splněna u vyvinutého turbulentního proudění, které je dobře isotropní nebo v případech, kdy silně převažují smykové složky Reynoldsových napětí a normálové složky jsou zanedbatelné. V případě rovinné struktury fluktuujícího proudového pole (hydrodynamická nestabilita) tato podmínka zřejmě splněna není.

### 9.3.1.1. Algebraické modely

Podle teorie směřovací délky, kterou poprvé formuloval Prandtl, je součinitel turbulentní viskozity dán součinem charakteristické délky turbulence, která bývá nazývána „směřovací délka“, a rychlosti charakterizující turbulentní pohyby. Prandtl dále předpokládá, že směřovací délka je úměrná tloušťce turbulentní oblasti  $\ell$  a dále že rychlost turbulentních směřovacích pohybů  $\mathbf{u}$  je úměrná typické hodnotě rozdílu středních rychlostí v oblasti:

$$\nu_t \sim \mathbf{u} \ell \approx \ell^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (9.6)$$

Směřovací délka je určována z jednoduchého algebraického vztahu, proto tyto modely jsou nazývány „algebraické“ nebo také „nularovnicové“.

Postupy založené na algebraických modelech dávají dobré výsledky v jednoduchých smykových proudech, jako jsou mezní vrstvy nebo jednoduché úplavy. Pro komplexní proudy jsou tyto metody obecně nepoužitelné. Matematický model sice popisuje exaktně chování tekutiny, problémem však je určení součinitele turbulentní vazkosti, kdy pro každý bod proudového pole může být značně odlišná. Řešení tohoto problému je ekvivalentní vyřešení turbulentního rychlostního pole, pro něž musíme použít jinou metodu. Přesto se pro jistou třídu problémů tyto modely používají i dnes. Jedná se např. o obtékání leteckých profilů, kde se používají např. algebraické modely Baldwin-Lomax, Cebeci-Smithe nebo Wilcoxe.

### 9.3.1.2. Modely obsahující transportní rovnice

Složitější modely pracují s transportními rovnicemi pro různé turbulentní veličiny. I v těchto modelech je však používán koncept turbulentní vazkosti podle Bussinesqova předpokladu.

Transportní rovnice pro turbulentní veličiny jsou odvozovány z N-S rovnic. Např. pro kinetickou energii dostaneme transportní rovnici ve tvaru

$$\underbrace{\frac{\partial(\overline{\rho u_k k})}{\partial x_k}}_I = -\underbrace{\overline{\rho u'_i u'_k}}_{II} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \underbrace{\overline{u'_k p} + \frac{1}{2} \overline{\rho u'_k u'_i u'_i} - \mu \frac{\partial k}{\partial x_k}}_{III} \right] - \underbrace{\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}}_{IV}. \quad (9.7)$$

Člen *I* je konvekce. Člen *II* představuje produkci, víry velkých měřítek získávají energii z hlavního proudu. Tento člen bývá modelován pomocí rovnice (9.4). První 2 sčítance ve členu *III* představují turbulentní difúzi vlivem fluktuací tlaku a rychlosti, poslední potom představuje vazkou difúzi. První tlakový sčítanec je zpravidla velmi malý, proto je zanedbáván. Prostřední sčítanec s trojitou korelací bývá modelován pomocí předpokladu, že dochází k difúzi kinetické energie k proti směru gradientu, tedy z míst s vysokou kinetickou energií do míst s energií nižší. Dostáváme tedy

$$\frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_i} = -\frac{\mu_i}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial x_i}, \quad (9.8)$$

kde  $Pr_k$  je turbulentní Prandtlovo číslo pro  $k$ .

Člen *IV* představuje disipaci kinetické energie, která se přeměňuje v teplo. Odhad disipačního členu bývá vyjádřen jako podíl

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{U}^3}{\ell}, \quad (9.9)$$

kde  $\mathcal{U}$  je typická rychlost turbulentních pohybů a  $\ell$  je rozměr vírů. Hodnotu rychlosti odhadneme z kinetické energie

$$\mathcal{U} = \sqrt{k}, \quad (9.10)$$

disipační člen *IV* z rovnice (9.7) potom bude

$$-\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} = -\varepsilon \rho = -\frac{k^{2/3}}{\ell}. \quad (9.11)$$

Podobným způsobem bývá modelována transportní rovnice pro rychlost disipace nebo pro enstrofii. Odvození a výsledný tvar lze nalézt v literatuře.

Nejjednoduššími modely využívajícími transportní rovnice jsou „jednorovnicové modely“. V těchto modelech je řešena transportní rovnice pro jistou turbulentní veličinu (obvykle kinetickou energii), další turbulentní veličina (obvykle měřítko turbulence) je získáno z algebraického vztahu.

Složitější modely jsou „dvourovnicové modely“. Zde jsou řešeny dvě transportní rovnice pro dva skaláry charakterizující turbulentní proudění. Těmito skaláry může být např. kinetická energie, enstrofie nebo rychlost disipace. Tensor Reynoldsových napětí je potom zpravidla počítán při použití Boussinesquovy hypotézy z gradientů rychlosti a turbulentní viskozity. Ta je vyhodnocena z hodnot dvou skalárů získaných z transportních rovnic. Jedním z nejznámějších a v inženýrské praxi hojně používaným modelem je  $k - \varepsilon$  model.

Proudění v blízkosti stěny může být modelováno na zjemňující se síti takové, aby byly správně modelovány velké gradienty v této oblasti. Tento přístup je dosti náročný na výpočetní kapacitu. Jinou možností je použití tzv. „stěnových funkcí“ (angl. *wall functions*). Potom předpokládáme, že proudění v blízkosti stěny může být charakterizováno jako zcela vyvinutá turbulentní mezní vrstva. Stěnové funkce se používají ve spojení s dvourovnicovými modely.

### 9.3.2. Modelování Reynoldsových napětí

Nejsložitějšími modely modelují přímo Reynoldsova napětí (angl.: *Reynolds Stress Models – RSM*). Z jejich složitosti také vyplývá nejvyšší výpočtová náročnost. V těchto modelech je řešena transportní rovnice pro tensor Reynoldsových napětí  $\overline{u'_i u'_j}$ , další transportní rovnice bývá pro měřítko turbulence a pro rychlost disipace  $\varepsilon$ . Tyto modely nejsou založeny na Boussinesquově hypotéze, rovnice pro Reynoldsova napětí jsou odvozeny z N-S rovnic (viz 5.5.1.).

## 10. Fenomenologie turbulence

V této kapitole se podíváme blíže na strukturu turbulentního proudění. Základním prvkem turbulentního proudového pole je vír.

### 10.1. Kinematika

Sledujme chování dvou částic tekutiny, které se nacházejí v proudovém poli blízko sebe. Jejich rychlosti budou pro první bod  $u_i(x_1, x_2, x_3, t) \equiv u_i(x_j, t)$  a pro druhý  $u_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*, t) \equiv u_i(x_j^*, t)$ . Použijme nyní Taylorův rozvoj a zanedbejme členy vyšších řádů, pak můžeme psát

$$u_i(x_j^*, t) = u_i(x_j + (x_j^* - x_j), t) \doteq u_i(x_j, t) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x_j^* - x_j), \quad (10.1)$$

provedme nyní rozklad tenzoru druhého řádu  $\partial u_i / \partial x_j$  na část symetrickou a antisymetrickou, potom dostáváme

$$u_i(x_j^*, t) = u_i(x_j, t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) (x_j^* - x_j) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) (x_j^* - x_j). \quad (10.2)$$

Zavedme nyní obvyklá označení pro tenzor rychlosti deformace  $S_{ij}$  a tenzor rychlosti rotace  $\Omega_{ij}$

$$S_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (10.3)$$

Antisymetrický tenzor  $\Omega_{ij}$  lze interpretovat jako pseudovektor  $\omega_{ri}$  úhlové rotace

$$-\omega_{ri} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}. \quad (10.4)$$

Vektor úhlové rotace  $\omega$ , souvisí jednoduchým způsobem s již dříve definovanou vířivostí  $\omega$ :

$$\omega = 2\omega_r = \nabla \times u \quad (10.5)$$

Dosadíme-li nyní definice (10.3) do rovnice (10.2), dostáváme rovnici vyjadřující obecný pohyb elementárního objemu tekutiny

$$u_i(x_j^*, t) = u_i(x_j, t) + \varepsilon_{ijk} \omega_{rk} (x_k^* - x_k) + S_{ij} (x_j^* - x_j). \quad (10.6)$$

První člen na pravé straně rovnice (10.6) představuje rychlost **translace** elementárního objemu, druhý člen rychlost **rotace**, třetí potom rychlost **deformace** tekutiny. První dva členy charakterizují pohyb elementárního objemu tekutiny, jakoby šlo o tuhé těleso.

Výše naznačený rozklad je matematickou formulací **první Helmholtzovy věty**, která říká, že *každý pohyb tekutiny v okolí určitého bodu můžeme rozložit na pohyb translační (posuvný), pohyb rotační (otáčivý) kolem daného bodu a pohyb deformační.*

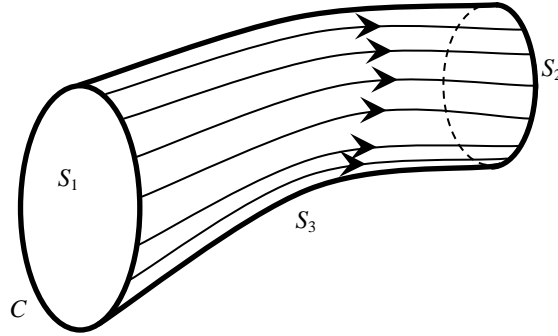
Podívejme se nyní podrobněji na vlastnosti pole vířivosti  $\omega$ . Předně již z definice vířivosti je zřejmé, že pole vířivosti je v neviskózní tekutině nezářidlové, tedy že

$$\nabla \cdot \omega = \text{div } \omega = 0. \quad (10.7)$$

Pole vířivosti můžeme charakterizovat soustavou křivek analogickou k proudnicím v případě pole rychlosti. Tyto křivky se nazývají „vířivé čáry“ (angl.: *vortex line*). Jsou definovány jako křivky v tekutině vedené v určitém okamžiku, které mají tu vlastnost, že v každém jejich bodě je vektor vířivosti jejich tečnou. Matematicky je můžeme popsat parametrickými rovnicemi (parametrem je čas):

$$\frac{dx_1}{\omega_1} = \frac{dx_2}{\omega_2} = \frac{dx_3}{\omega_3}. \quad (10.8)$$

Předpokládejme nyní, že každým bodem proudového pole prochází pouze jediná vírová čára. Máme-li potom uvnitř proudící tekutiny definovanou uzavřenou křivku, prochází každým jejím bodem jedna vírová čára (pokud křivka nesplývá s proudovou čarou). Je-li křivka zvolena tak, že ji každá z vírových čar protíná pouze jednou, potom vírové čáry procházející uzavřenou křivkou tvoří „vírovou trubici“ (angl.: *vortex tube*). Tekutý obsah vírové trubice nazýváme „vírové vlákno“ (angl.: *vortex filament*).



Obr. 10.1 – Vírová trubice

Dále, tok vektoru vířivosti  $\boldsymbol{\omega}$  průřezem vírové trubice nazveme „intenzitou vírové trubice“ nebo také „intenzitou víru“. Uvažujme nyní výsek vírové trubice omezený dvěma řezy  $S_1$  a  $S_2$  – viz obr. 10.1. S ohledem na (10.7) lze podle Gauss-Ostrogradského věty psát:

$$\iint_{S_1+S_2+S_3} \boldsymbol{\omega}_\perp dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} dV = 0, \quad (10.9)$$

kde  $\boldsymbol{\omega}_\perp$  je složka vířivosti kolmá k dané ploše  $S$ . Integrál přes stěnu trubice  $S_3$  musí být nulový, protože hodnota složky vířivosti je ve všech bodech této plochy nulová. Z toho vyplývá, že tok vektoru vířivosti průřezy  $S_1$  a  $S_2$  je stejný.

Tento výsledek formuluje **druhá Helmholtzova věta**, která říká, že *pro libovolný řez danou vírovou trubicí je v daném okamžiku její intenzita konstantní*. Z této věty přímo plyne, že vírová trubice nemůže v tekutině vzniknout ani vymizet. To znamená, že buďto musí sahat až k hranici oblasti proudění (ke stěně) nebo musí být uzavřená (prstenec). Platí exaktně pro neviskózní tekutinu.

Intenzitu vírové trubice nelze měřit přímo, je nutné ji vypočítat z pole rychlostí. Pro snazší vyjádření zavádíme pojem „cirkulace rychlosti“ (angl.: *velocity circulation*). Jedná se o výpočet toku vektoru rychlosti podél uzavřené křivky ohraničující průřez vírové trubice  $C$

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}, \quad (10.10)$$

kde  $\mathbf{s}$  je element křivky  $C$ .

Hodnota cirkulace je totožná s hodnotou intenzity vírové trubice, přesvědčíme se o tom snadno aplikací Greenovy (Stokesovy) věty

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} ds = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (10.11)$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový normálový vektor elementární plochy  $dS$ .

Pro jednoduše souvislé oblasti plynou z rovnice (10.11) následující závěry:

- Je-li proudění tekutiny v celé uvažované oblasti nevířivé, je cirkulace rychlosti podél libovolné uzavřené křivky, která leží celá v tekutině, nulová.
- Cirkulace podél uzavřené křivky je nenulová, pokud obepíná alespoň jedno vírové vlákno.

- V nevířivém proudění nemohou tvořit proudnice uzavřené křivky.
- Je-li proudění v některé části oblasti vířivé, potom se cirkulace rychlosti podél libovolné uvnitř tekutiny uzavřené myšlené uzavřené křivky rovná součtu intenzit vírových trubíc, které protínají plochu ohraničenou křivkou. Přitom průniky vírových trubíc s touto plochou musí pokrývat celou plochu a nesmí se překrývat. Vírové trubice, které plochu protínají dvakrát, představují nulový příspěvek.
- Vírové trubice (nebo vlákna) se pohybují jako materiálové plochy s tekutinou, tj. skládají se ze stále stejných částic.

Následující úvahy platí přesně pro tekutinu, jež je nestlačitelná, nevazká a barotropní (tj. taková, že její hustota je funkcí pouze tlaku). Uvažujme nyní časovou derivaci cirkulace podél „tekuté křivky“. Tekutou křivkou je taková křivka, která se při pohybu tekutiny skládá ze stále stejných částic. Tuto derivaci můžeme vyjádřit

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint u_k dx_k = \oint \frac{du_k}{dt} dx_k + \oint u_k \frac{d}{dt} (dx_k). \quad (10.12)$$

Druhý člen na pravé straně rovnice (10.12) můžeme zřejmě dále vyjádřit jako

$$\oint u_k \frac{d}{dt} (dx_k) = \oint u_k du_k = \oint \frac{1}{2} d(u_k u_k) = 0, \quad (10.13)$$

Platí tedy výsledný vztah

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint u_k dx_k = \oint \frac{du_k}{dt} dx_k \quad (10.14)$$

Který je matematickou formulací Kelvinovy (Thomsonovy) věty: *Časová derivace cirkulace rychlosti podél uzavřené křivky se rovná cirkulaci zrychlení podél téže křivky.* Kelvinova věta platí i pro reálnou vazkou tekutinu. Důsledkem Kelvinovy věty je platnost následujícího tvrzení pro proudění nestlačitelné, nevazké tekutiny v poli konzervativních sil: *byl-li pohyb nevazké tekutiny v určitém okamžiku nevířivý, zůstane jím nadále.* To znamená, že vířivost je za těchto podmínek nezničitelná a nestvořitelná.

Věty o vírech nebo o chování vířivosti v ideální nevazké tekutině byly odvozeny již dávno. I když se jedná o idealizaci, která při aplikaci na chování tekutiny v delším časovém úseku dává nesprávné výsledky, jejich význam je v pochopení chování vírových struktur větších měřítek, kde vazkost není dominantní veličinou a při zkoumání tendencí a pohybů vírů v relativně krátkých časových úsecích.

## 10.2. Víry

Víry jsou základním stavebním prvkem turbulentního proudového pole, proto se jimi budeme nyní zabývat podrobněji.

### 10.2.1. Matematické modely vírů

Budeme se nyní zabývat matematickým popisem proudového pole při vířivém proudění, definujeme model vírů.

Zavedme pro účely zkoumání rotačního proudění válcový souřadný systém, který lze charakterizovat souřadnicemi  $(r, \Theta, z)$ , kde  $r$  je poloměr,  $\Theta$  je úhel a  $z$  je souřadnice podél osy víru. Příslušné jednotkové vektory potom jsou  $e_r$ ,  $e_\Theta$  a  $e_z$  a vířivost je definována vztahem

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\Theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_r & ru_\Theta & u_z \end{vmatrix}. \quad (10.15)$$

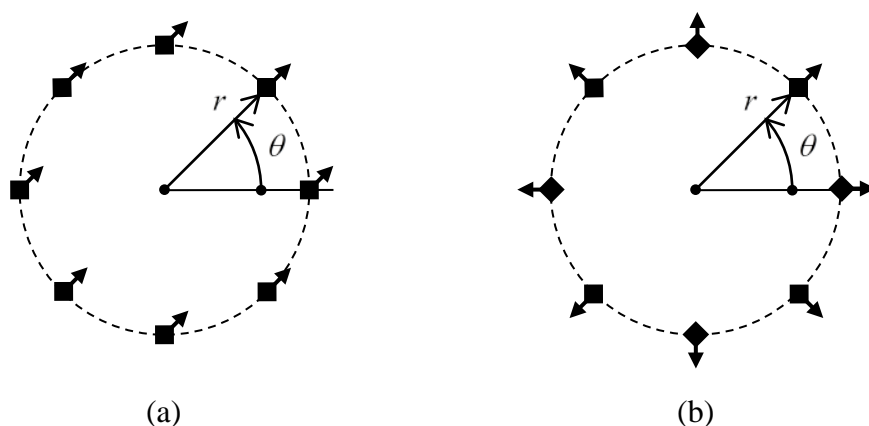
Vířivost jakožto fyzikální veličina však nemá přímou souvislost s rotací oblasti tekutiny jakožto celku, může být vyvolána čistým smykem elementu tekutiny.

Předpokládejme rovinné proudění nevazké tekutiny, kdy rozložení rychlostí je funkcí pouze souřadnic  $r$  a  $\theta$  a nezávisí na  $z$ . Potom můžeme definovat tzv. „potenciální“ nebo také „liniový vír“ vztahem

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta, \quad (10.16)$$

kde  $\mathbf{u}$  je vektor rychlosti a  $\Gamma_0$  je cirkulace vírového vlákna. Tato závislost vyplývá z Biotova-Savartova zákona, viz následující kapitola.

Po dosažení tohoto vztahu do definičního vztahu pro vířivost (10.15) vidíme, že vířivost je přes fakt, že dochází ke globální rotaci tekutiny, v celé oblasti nulová kromě bodu  $r = 0$ , kde ani vířivost ani rychlost není definována ( $u_\theta$  zde roste nade všechny meze). Můžeme tedy tvrdit, že ačkoli tekutina rotuje, je proudění nevířivé v celé oblasti kromě osy rotace. Elementární částice tekutiny se pohybují po kruhových drahách, nedochází však k jejich natáčení podle vlastní osy, částice se pohybují rovnoměrným kruhovým **posuvným** pohybem.



Obr. 10.6 – Indukovaná rychlost podle Biotova-Savartova zákona

Na obr. 10.2 (a) je naznačen případ potenciálního víru, kdy  $u_\theta \sim 1/r$ . Na obr. 10.2 (b) je potom případ rovnoměrné rotace tekutiny jako tuhého tělesa, kdy  $u_\theta \sim r$ . Máme-li úhlovou rychlost otáčení tekutiny rovnu  $\Omega$ , potom pro rychlost proudění tekutiny v daném bodě platí

$$\mathbf{u} = \Omega r \mathbf{e}_\theta. \quad (10.17)$$

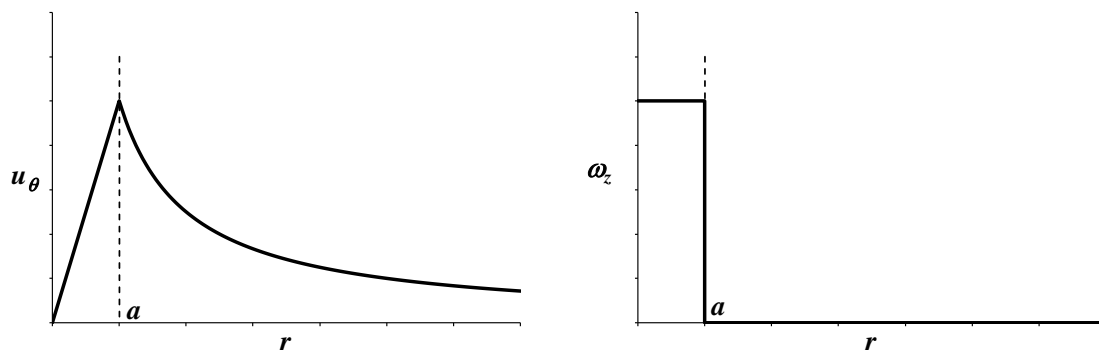
Provedeme-li výpočet vířivosti, potom dostáváme složku ve směru osy  $z$  rovnu  $2\Omega$ , ostatní složky jsou nulové.

Spojíme-li dva případy rotace znázorněné na obr. 10.2 (a) a (b), potom dostaneme tzv. „Rankinův vír“, který představuje nejjednodušší model skutečného víru. U tohoto víru je vířivost koncentrována v jeho jádře poměrně malých rozměrů, mimo toto jádro je prakticky nulová. U Rankinova víru předpokládáme, že jádro o poloměru  $a$  se otáčí jako tuhé těleso, zbytek proudového pole je modelován potenciálním vírem. Průběh rychlosti je tedy charakterizován předpisem

$$u_\theta = \begin{cases} \Omega r, & r < a, \\ \frac{\Omega a^2}{r}, & r > a, \end{cases} \quad (10.18)$$

$$u_r = u_z = 0.$$

Průběh obvodové složky rychlosti a vířivosti pro Rankinův vír je znázorněn na obr. 10.3. Vířivost  $\omega_z$  je v jádře víru nenulová a konstantní, mimo jádro je potom rovna nule.



Obr.10.3 – Rankinův vír – průběh obvodové rychlosti a vířivosti

Toto vše platí pouze pro proudění nevazké tekutiny. Věnujme se nyní procesu difúze vírů a vířivosti v reálné, vazké tekutině. Uvažujme vírové vlákno charakterizované cirkulací  $\Gamma_0$  v čase  $t_0$  ve vazké tekutině s kinematickou vazkostí  $\nu$ . Z N-S rovnice pro vířivost pro tento typ proudění vyplývá vztah pro cirkulaci  $\Gamma(r,t) = 2\pi r u_\theta(r,t)$  ve válcových souřadnicích

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) \quad (10.19)$$

s počáteční podmínkou

$$\Gamma(r,0) = \Gamma_0. \quad (10.20)$$

Požadujeme omezené hodnoty  $u_\theta$  pro libovolný čas, tedy musí platit

$$\Gamma(0,t) = 0, \quad t > 0. \quad (10.21)$$

Řešení rovnice (10.19) lze nalézt ve tvaru

$$\Gamma = \Gamma_0 \left( 1 - e^{-r^2/4\nu t} \right) \quad (10.22)$$

a tedy také

$$u_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left( 1 - e^{-r^2/4\nu t} \right). \quad (10.23)$$

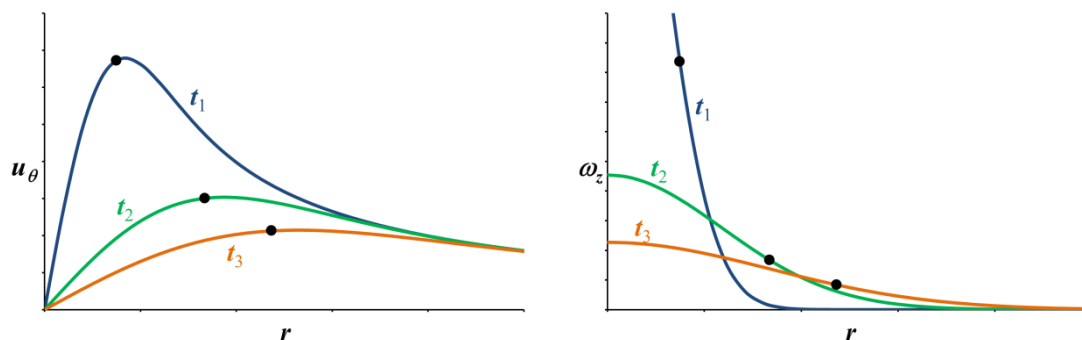
Pro vířivost potom platí následující vztah:

$$\omega_z = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} e^{-r^2/4\nu t}. \quad (10.24)$$

Rozborem těchto výsledků lze ukázat, že pro vzdálenosti od osy  $r$  větší než  $\sqrt{4\nu t}$  nelze očekávat významné ovlivnění hodnoty cirkulace, protože do této oblasti již nedifundovala téměř žádná vířivost. Naopak, pro hodnoty  $r$  značně menší nelze již proudění považovat za nevířivé, neboť platí

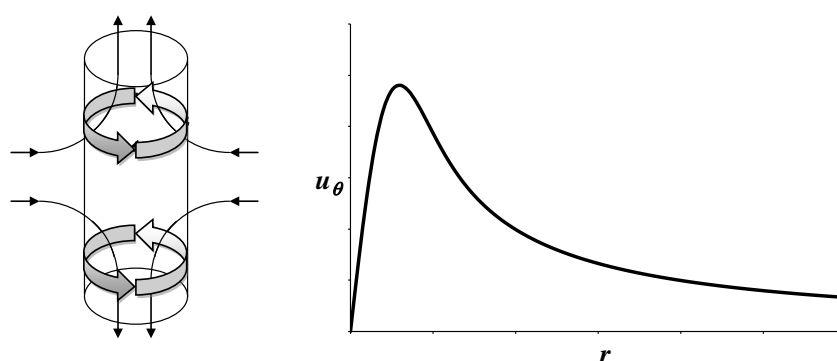
$$u_\theta \doteq \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} r \quad \text{pro } r \ll \sqrt{4\nu t}, \quad (10.25)$$

tento vztah odpovídá rotaci tekutiny jako tuhého tělesa úhlovou rychlostí  $\Gamma_0/8\pi\nu t$ . Intenzita víru se tedy v čase zmenšuje, zatímco se průměr jádra víru zvětšuje. Tím je definován „Lambův-Oseenův model“ víru. Na obr. 10.4 jsou naznačeny průběhy vířivosti a obvodové rychlosti v závislosti na poloměru  $r$  a čase  $t$ . Pro časové údaje na grafech platí relace  $t_1 < t_2 < t_3$ , body na křivkách vyznačují hodnotu  $r = \sqrt{4\nu t}$ .



Obr. 10.4 – Lambův-Oseenův vír – průběh obvodové rychlosti a vířivosti

Pro studium procesu protahování vírů je nutno uvažovat prostorovost proudění, nestačí víry modelovat pomocí rovinného modelu.



Obr. 10.5 – Schéma Burgersova víru, průběh obvodové rychlosti

Uvažujme tedy prostorový model víru, kdy je jeho jádro natahováno v podélném směru, jak je znázorněno na obr. 10.5. Jedná se o tzv. „Burgersův vír“, který modeluje konvekci víru, jeho difúzi i protahování. Analytickým řešením N-S rovnice dostáváme vztahy pro složky rychlosti ve válcových souřadnicích

$$\begin{aligned} u_r &= -1/2 \alpha r, \\ u_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\alpha r^2/4\nu}\right), \\ u_z &= \alpha z, \end{aligned} \quad (10.26)$$

kde  $\alpha > 0$  a  $\Gamma$  jsou konstanty. Závislost obvodové složky rychlosti je kvalitativně naznačena na obr. 10.5 (srovnej obr. 10.2 pro nevazký rovinný případ).

Pro vířivost platí

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\alpha\Gamma}{4\pi\nu} e^{-\alpha r^2/4\nu} \mathbf{e}_z, \quad (10.27)$$

Je zřejmé, že vířivost je koncentrována v jádře víru o průměru řádově  $\sqrt{\alpha/\nu}$ .

Burgersův model víru dobře reprezentuje skutečný vír v neomezeném prostoru, kdy neexistuje vazba mezi sekundárním prouděním (natahováním víru) a jeho intenzitou.

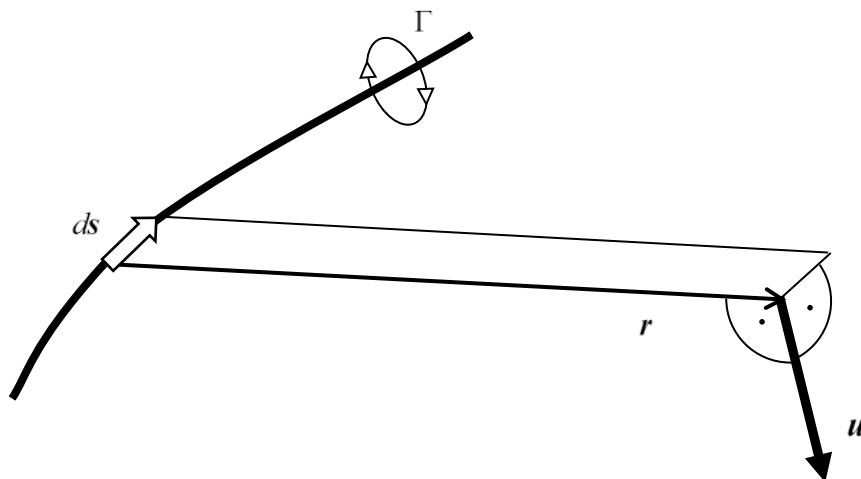
### 10.2.2. Biotův-Savartův zákon

Uvažujme nyní přímkové vírové vlákno v tekutině. Přítomnost vírového vlákna indukuje v tekutině rychlostní pole, podobně jako v případě potenciálního víru (viz výše).

V prostorovém případě je podle Biotova-Savartova zákona<sup>11</sup> vektor rychlosti  $u_i$  indukované v daném bodě prostoru kolmý k rovině definované elementem vírového vlákna  $ds$  a polohovým vektorem  $r$  určujícím vzájemnou polohu elementu vírového vlákna a bodu v prostoru. Její velikost je dána intenzitou vírového vlákna vyjádřenou pomocí cirkulace  $\Gamma$  a je nepřímo úměrná kvadrátu<sup>12</sup> vzdálenosti bodu od přímky proložené elementem vlákna.

$$u_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{1}{r^3} ds \times r . \quad (10.28)$$

Situace je schematicky znázorněna na obr. 10.6.



Obr. 10.6 – Indukovaná rychlost podle Biotova-Savartova zákona

Povšimněme si, že se v rovnici (10.28) nevyskytuje vazkost. Mechanismus vzniku indukované rychlosti v okolí vírového vlákna tedy nesouvisí s vazkými efekty, potenciální vír tak teoreticky může vzniknout i v hypotetické nevazké tekutině.

Jsou známy jednoduché příklady interakce rovinných vírů, kdy např. dva víry stejného smyslu rotace rotují podle těžiště jejich spojnice a víry opačné orientace a shodné intenzity se pohybují rovnoměrně přímočaře ve směru osy jejich spojnice. Takovéto triviální případy se bohužel v našem třírozměrném světě prakticky nevyskytují.

Přímkové vlákno v prostorové tekutině indukuje v místech po jeho délce nulovou rychlost. Je to dáno tím, že vektory všech elementů vlákna jsou rovnoběžné se všemi polohovými vektory bodů vlákna. V případě zakřiveného nebo jinak deformovaného vírového vlákna v prostoru anebo v případě přítomnosti více vírových vláken dochází k indukování rychlosti pohybu jednotlivých elementů vlákna a tím k jeho pohybu a deformaci. Vírové vlákno přímkového tvaru v prostorové oblasti je zřejmě nestabilní konfigurace. Sebemenší porucha jeho tvaru způsobí nenulovou hodnotu indukované rychlosti a tím další deformaci.

Interakce prostorových vírových vláken je silně dynamický a komplexní proces. Každý element vírového vlákna indukuje rychlost v místě všech ostatních elementů, které s ním nejsou kolineární a tím mění tvar vlákna.

### 10.2.3. Interakce vírů

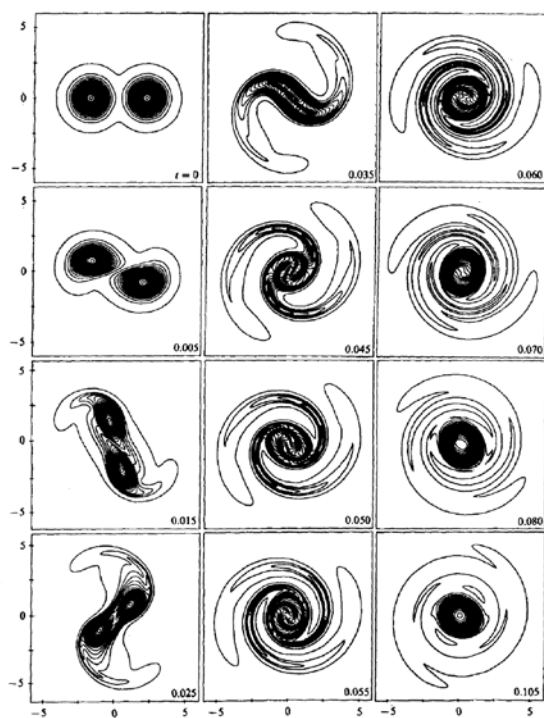
S ohledem na Thomsonovy věty o vírech není pro případ nevazkého proudění možná modifikace vírových vláken při jejich vzájemné interakci, ve skutečnosti však vlivem vazkosti

<sup>11</sup> Biotův-Savartův zákon je znám spíše z elektrofyziky, kdy určuje sílu působící na vodič v magnetickém poli, jeho tvar je potom stejný jako zde, jen význam jednotlivých veličin je odlišný.

<sup>12</sup> Ve vztahu (10.28) se jedno  $r$  krátí.

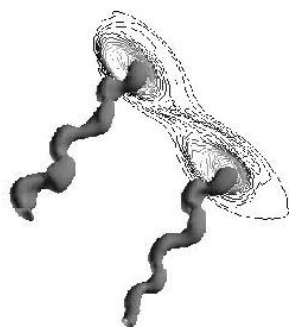
k jejich modifikaci dochází. Mohou nastat dva případy podle toho, zda jsou interagující víry souhlasné či opačné orientace.

„Spojování“ (angl.: *merging*) nebo také „párování“ (angl.: *pairing*) vírů můžeme pozorovat v případě rovinných vírů souhlasné orientace. V praxi může nastat jednak při proudění v silně neizotropních oblastech (např. v tenkých vrstvách tekutiny) nebo v oblastech, kde byly uměle generovány rovnoběžné víry – např. v rovinných smykových vrstvách. Oba víry musí mít stejný smysl otáčení. Pro nastartování celého procesu je třeba, aby víry měly dostatečnou intenzitu a jejich vzdálenost byla menší než kritická. Potom dojde ke splynutí obou vírů, prolnutí tekutiny obsažené v jednotlivých vírech. Časová posloupnost tohoto procesu je pro rovinný případ naznačena na obr. 10.7.



Obr. 10.7 – Spojování vírů stejné orientace

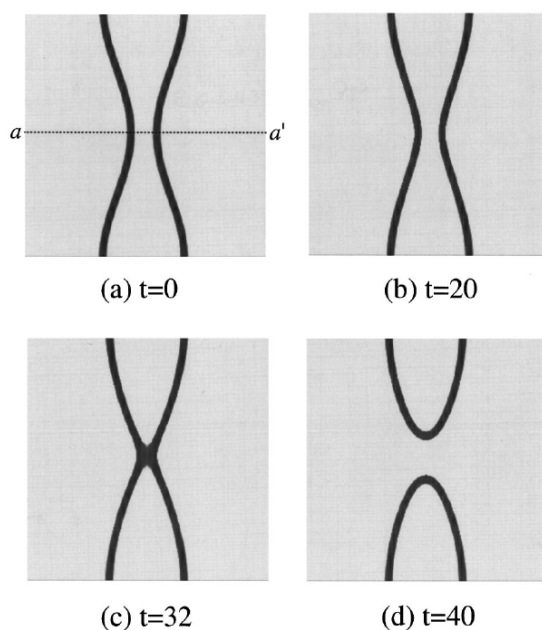
Jedná-li se o interakci dvou rovnoběžných vláken, potom tento proces neprobíhá stejně ve všech řezech kolmých na směr vírů, zaznamenáváme významné prostorové efekty, které souvisejí s nestabilitou přímého tvaru vírového vlákna. Na obr. 10.8 je naznačena deformace vírových tubic během úvodní fáze spojování, jsou patrné pseudoperiodické prostorové poruchy, celý proces se dále komplikuje poruchami stále vyšších řádů.



Obr. 10.8 – Prostorové efekty při spojování vírů

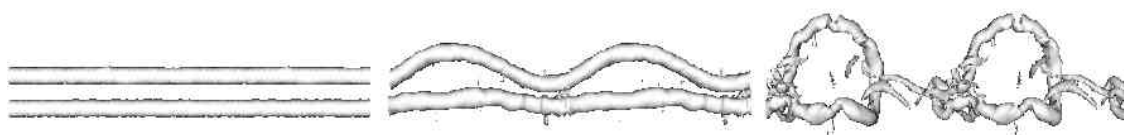
Tento jev je pozoruhodný zejména s přihlédnutím ke skutečnosti, že v tomto případě je tok energie zcela opačný než při klasickém kaskádovém přenosu energie, kdy dochází k přenosu energie od velkých vírů směrem k malým vírům. Mechanismus párování je základním mechanismem obrácené kaskády (viz 7.3.2), kdy je energie malých vírů jejich spojováním předávána vírům větším.

Při prostorové konfiguraci vírových vláken může vlivem vazkosti dojít k jejich interakci, kdy dochází k jejich rozpojení a opětnému spojení. Tento jev se nazývá „opětné spojení“ (angl.: *reconnection*) nebo také „přemostění“ (angl.: *bridging*). Proces probíhá v několika fázích a je ze své podstaty prostorový. Nejprve dojde vlivem nestability k místnímu přiblížení části vláken, až se vlákna v určitém bodě dotknou. Nyní dojde vlivem vazkých efektů k přerušení vláken v místě dotyku. V poslední fázi se vlákna opět propojí, ovšem v jiném pořadí. Vznikají tak vírové smyčky. Jednotlivé fáze jsou ukázány na obr. 10.9 v časové posloupnosti.



Obr. 10.9 – rozpojení a opětné propojení vírů

Proces je v případě dostatečně dlouhých vírů téměř periodický v prostoru podél nich. Paralelní přímkové víry tak přecházejí v systém vírových kroužků, jak je naznačeno na obr. 10.10, kde jsou jednotlivé fáze znázorněny chronologicky zleva doprava.



Obr. 10.10 – Prostorová interakce paralelních proti sobě rotujících vírů

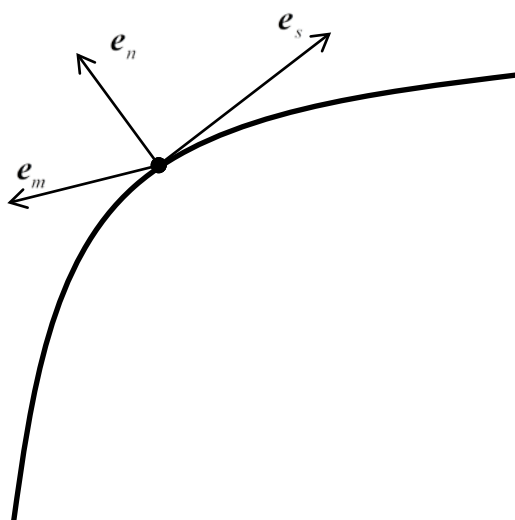
#### 10.2.4. Mechanismus generování vířivosti

V Kolmogorovově teorii vyvinuté izotropní turbulence je zakotven kaskádový přenos energie směrem od velkých vírů k menším. Kolmogorov fyzikální podstatu tohoto jevu nero-

zebírá. Pro vířivost máme k dispozici Helmholtzovu rovnici, která byla v kapitole 4 odvozena z N-S rovnic:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (10.29)$$

Fyzikální význam jednotlivých členů této rovnice je jasný – člen na levé straně představuje časovou změnu vířivosti, první člen na pravé straně je vazká difúze a druhý potom produkce vířivosti.



Obr. 10.11 – Vířivá čára

Podívejme se nyní blíže na člen představující produkci vířivosti  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ . Na obr. 10.11 je nakreslena vířivá čára, tedy vektorová čára pole vířivosti. Ve zkoumaném bodě vířivé čáry jsme zavedli pravoúhlý souřadný systém s jednotkovými vektory  $\mathbf{e}_s$  ve směru vířivé čáry a s vektory  $\mathbf{e}_n$  a  $\mathbf{e}_m$  kolmými, vířivost do těchto směrů nemá složku. Produkční člen z rovnice (4.40) potom můžeme vyjádřit

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \left[ \boldsymbol{\omega} \cdot \left( \mathbf{e}_s \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{e}_m \frac{\partial}{\partial m} + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial n} \right) \right] \mathbf{u} = \omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s}, \quad (10.30)$$

kde  $\omega$  je modul vektoru vířivosti. Zanedbáme-li pro tuto chvíli vliv vazkosti, potom další vývoj víru charakterizovaného vířivou čarou na obr. 10.11 se bude odehrávat podle rovnice

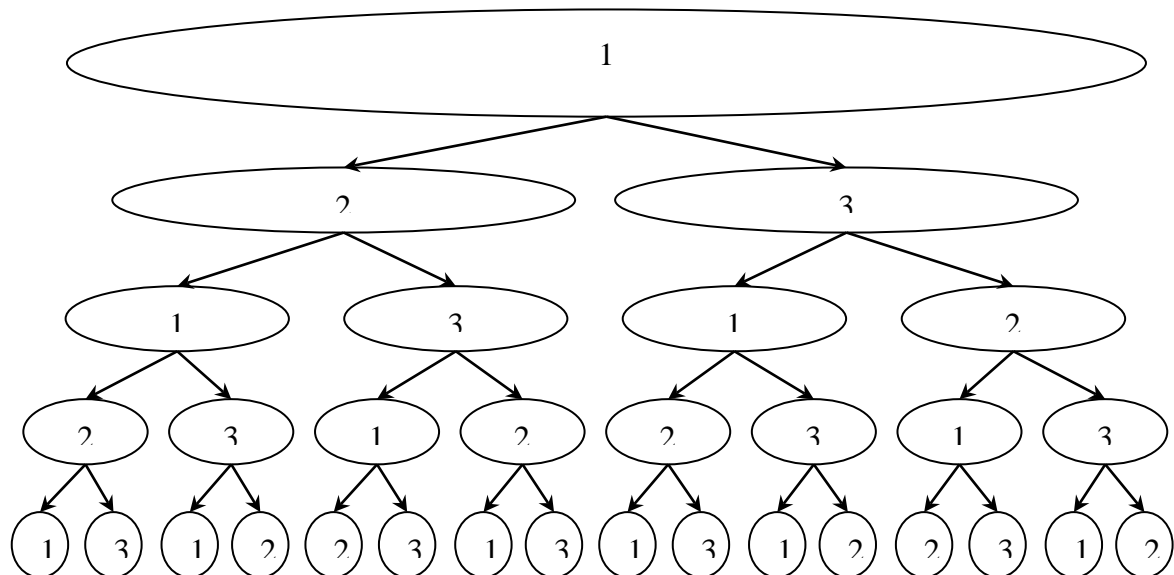
$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s}. \quad (10.31)$$

Tuto rovnici lze rozdělit na 3 složky. Složka do směru  $\mathbf{e}_s$ :  $\frac{D\omega_s}{Dt} = \omega \frac{\partial u_s}{\partial s}$  představuje **protahování** vířivého vlákna a složky  $\frac{D\omega_m}{Dt} = \omega \frac{\partial u_m}{\partial s}$  a  $\frac{D\omega_n}{Dt} = \omega \frac{\partial u_n}{\partial s}$  představují jeho **naklápění** do stran.

Zabývejme se nyní speciálním případem rovinného pole rychlostí, kdy máme v celé oblasti jednu složku rychlosti nulovou:  $u_3 = 0$  a složky  $u_1$ ,  $u_2$  jsou obecně nenulové. Potom zřejmě platí, že vektor vířivosti může mít nenulovou pouze jedinou složku  $\omega_3$ , ostatní složky jsou vždy nulové:  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Za těchto podmínek však platí identita  $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla = 0$ , produkce vířivosti je tedy nulová. Vidíme, že v rovinném proudění nemůže fungovat mechanismus pro-

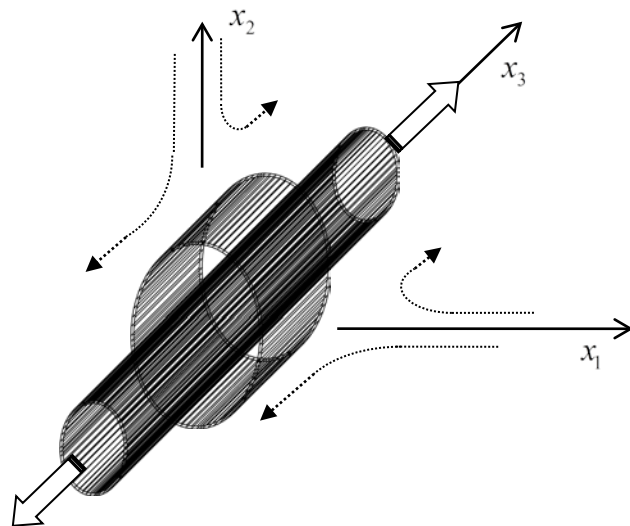
dukce vířivosti, který je typický pro turbulentní proudění. Z toho můžeme učinit obecný závěr, že turbulentní proudění musí být vždy prostorové.

Protahování a naklápění vířů popisuje proces interakce gradientů vířivosti a rychlosti v prostoru. Tento proces začíná strukturou definovanou v jednom směru v prostoru, protahováním a naklápěním víru v rovině kolmé k jeho ose je pak generována vířivost, která znovu interaguje s polem rychlostí a tak vytváří novou vířivost. Pole vířivosti a rychlosti se postupně stává chaotickým a náhodným, vzniká tak turbulence, která je tímto procesem udržována. Jsou generovány stále menší a menší víry, jejich rozložení se stále více blíží k isotropii, je tedy ztracena informace o orientaci prvotní struktury velkého rozměru. Situace je schematicky zobrazena na obr. 10.12. Vycházíme z jediného energetického víru orientovaného ve směru osy  $x_1$ . Při rotaci tohoto víru dojde podle Biotova-Savartova zákona v jeho okolí k indukovaní rychlosti v rovině kolmé k jeho ose ( $x_2, x_3$ ), energie tedy může být předána menším vírům například ve směrech  $x_2$  a  $x_3$ . Proces takto pokračuje směrem ke stále menším vírům, po 4 úrovních již máme téměř homogenní rozložení orientace vírů: směr  $x_1$  6x, směr  $x_2$  5x a směr  $x_3$  5x. Orientace jednotlivých vírů nemusí být ve skutečnosti samozřejmě ve směru souřadných os, navíc jsou víry prostorově deformované, takže proces homogenizace je ještě rychlejší, než ve schématu na obr. 10.12.



Obr. 10.12 – Orientace vírů při kaskádovém přenosu energie

Podívejme se nyní na vírovou trubici a zkoumejme její vývoj v čase. Podle druhé Helmholtzovy věty (viz kapitola 10.1) se vírová trubice pohybuje s tekutinou jako materiálový útvar. Dále, podle Kelvinovy věty se její intenzita v čase nemění. Tekutina je nestlačitelná, její objem mezi dvěma příčnými průřezy je tedy konstantní (situace je schematicky naznačena na obr. 10.13). Proto při protahování vírové trubice dochází ke zmenšování jejího příčného průřezu a tím také k proporcionálnímu zvyšování hodnoty vířivosti, protože hodnota cirkulace je zachována. Lze tedy říci, že protahováním vírové trubice dochází ke zvýšení absolutní hodnoty vířivosti vírového vlákna v jejím jádru. Tento mechanismus generace vířivosti se nazývá „protahování vírů“ (angl.: *vortex stretching*).



Obr. 10.13 – Protahování vírů

Podobné úvahy jako pro vírovou trubici platí i pro izolovanou vírovou čáru. Vírová čára se může také protahovat, nemění však přitom svůj průřez (ten se blíží 0 – jedná se o jedno-rozměrný útvar). Zde je hodnota vířivosti vázána s elementem délky vírového vlákna tak, že vířivost je k tomuto elementu tečná a její velikost je úměrná délce elementu. Tato konstanta úměrnosti je dána pro určité vírové vlákno a v čase se nemění.

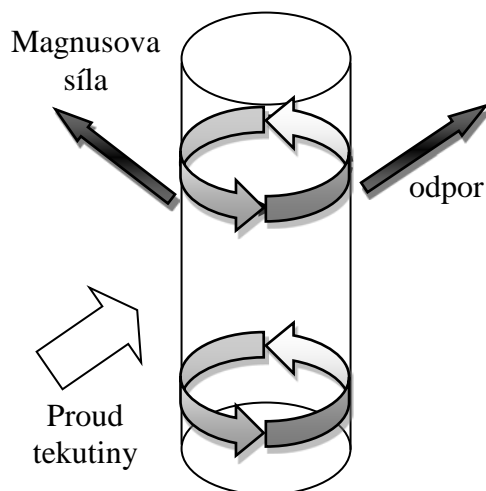
Protahování vírových vláken je jedním ze základních mechanismů generování vířivosti a Reynoldsových napětí a tedy i turbulence.

### 10.2.5. Další síly působící na vírové struktury

Víry v proudící tekutině se chovají do značné míry jako těleso válcového tvaru obecně se zakřivenou osou, které stále mění svůj tvar i polohu v proudící tekutině. Je to dáno tím, že se podle Helmholtzovy věty vírová vlákna a vírové trubice pohybují jako materiálové útvary.

Na části vírů tak působí odporová síla, její místní velikost závisí na rychlosti proudění a tvaru víru. Dalším silovým účinkem, který působí na rotující tekutinu je Magnusova síla. Tato síla vzniká při rotaci v proudu tekutiny, její směr je kolmý na směr rotace i směr proudění, má tedy charakter vztlačové síly.

Tyto síly mohou způsobit jednak deformaci vírové trubice a dále její pohyb. Ten potom směřuje šikmo vzhledem k hlavnímu proudu tekutiny. Trajektorie rotujícího objektu je ve tvaru oblouku. Tento efekt zná každý hráč míčových her, kdy rotací míče dává jeho pohyb „faleš“. Situace je schematicky znázorněna na obr. 10.14.



Obr. 10.14 – Magnusova síla

### 10.3. Mechanismy samoudržování turbulentního proudění

Vyvinuté turbulentní proudění má schopnost udržovat svou strukturu stálou v čase, aspoň ve statistickém smyslu. Podíváme se nyní blíže na mechanismy tohoto procesu „samoudržování“ (angl.: *self-sustaining*).

#### 10.3.1. Koherentní struktury ve stěnových proudech

V mezních vrstvách je proces produkce turbulence určován třemi druhy kvaziperiodických (či kvazináhodných) vírových struktur, jsou to velké vnější struktury, Falcovy události střední velikosti a události v blízkosti stěny.

Velikost velkých prostorových vnějších struktur je dána velikostí celé smykové oblasti, tedy tloušťkou mezní vrstvy. Tyto víry řídí dynamiku mezní vrstvy v její vnější oblasti, jedná se o proces strhávání a produkce turbulence. Objevují se náhodně v prostoru a čase a pro nízká Reynoldsova čísla jde v podstatě o pozůstatky Emmonsových skvrn turbulence vznikajících při přechodu do turbulence.

Falcovy víry jsou také vysoce koherentní a prostorové. Jsou to víry, které typicky vznikají v úplavech, paprscích, Emmonsových skvrnách turbulence, mřížkové turbulenci a v mezních vrstvách. Tyto víry jsou typické svou střední velikostí okolo 100 stěnových jednotek. Falcovy víry jsou spojovacím článkem mezi velkými strukturami a strukturami v blízkosti stěny.

Třetí druh vírů existuje v oblasti v blízkosti stěny a je odpovědný za produkci asi poloviny Reynoldsových napětí.

#### 10.3.2. Vlasečnicové víry

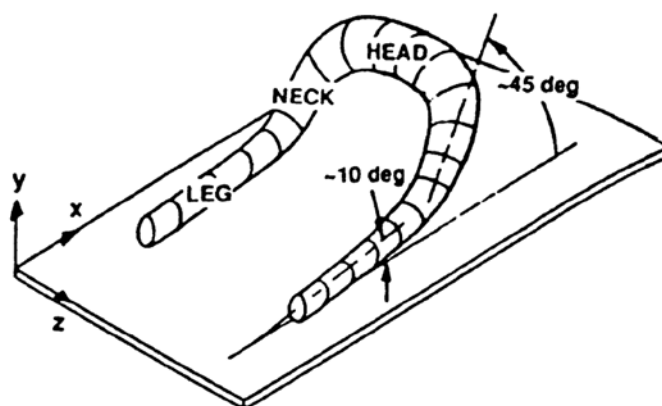
Vlasečnicové víry jsou obecně považovány za struktury, které se uplatňují při přechodu mezní vrstvy do turbulence – viz 6.3.1. Ukazuje se však, že tyto útvary hrají stejně důležitou roli v procesu samoudržování či regenerace již zcela vyvinuté turbulentní mezní vrstvy. Poprvé na přítomnost vlasečnicových vírů různých velikostí ve vyvinuté mezní vrstvě upozornil Theodorsen 1952.

Na stěně ulpívá tekutina a při nenulové rychlosti vnějšího proudu vzniká smyková oblast v blízkosti stěny. V bezprostřední blízkosti stěny vzniká vírové vlákno rovnoběžné se stěnou a kolmé na směr rychlosti hlavního proudu v důsledku Tollmienovy-Schlichtingovy nestability. Tento útvar podléhá následnému bouřlivému vývoji. Postupně se přeměňuje ve „vlasečnicový vír“, který bývá nazýván také „podkovovitý vlasečnicový vír“ (angl.: *hairpin horseshoe vor-*

tex). Vírové struktury jsou unášeny proudem. Můžeme si představit, že podkovovitý vír vzniká z malé poruchy proudění v mezní vrstvě ve tvaru víru po rozpětí. Vrchní část vznikajícího podkovovitého víru je tažena po proudu, ramena jsou protahována, tím potom rotují rychleji. Rychlosti indukované touto rotací ramen způsobuje odtlačování vrchní části směrem nahoru do oblasti vyšší rychlosti. Tak vznikají protažená ramena tvořící dvojice „podélných struktur“ (angl.: *streaks*).

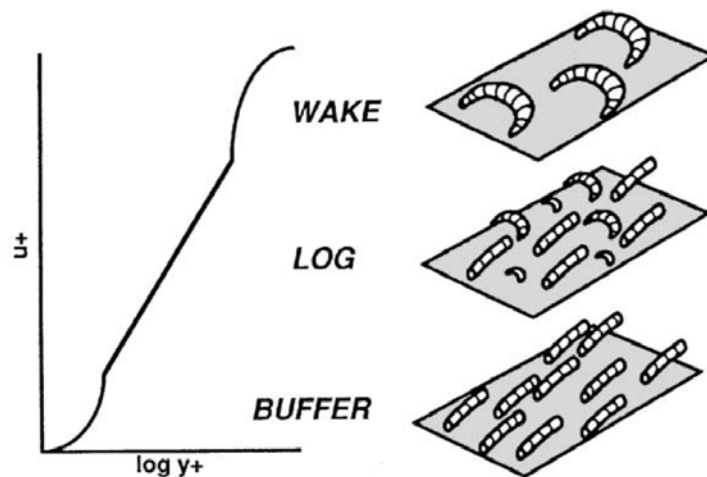
Výzkum koherentních struktur v turbulentním proudění je obecně velmi obtížná úloha, protože je nutno sledovat změny topologie v čase. Dlouhou dobu byli výzkumníci odkázáni pouze na kvalitativní vizualizační metody, dnes máme k dispozici rovinné případně i prostorové experimentální metody (varianty PIV). Nejeftektivnější metodou pro zkoumání struktury turbulence se však stala metoda přímé numerické simulace DNS. Většina výsledků, které dále ukážeme, byla získána právě touto metodou.

Robinson (1991) podrobně zkoumal výsledky DNS získané Spalardem (1988). Na obr. 10.15 je schematicky znázorněn typický tvar podkovovitého víru podle Robinsona, skládá se z „čela, krku a ramen“ (angl.: *head, neck, leg*). Vlasečnicový vír na obrázku je v ideálním stavu, v proudu se však mohou vyskytovat různě deformované nebo i nekompletní struktury. Pravidelný tvar, který vzniká při přirozeném přechodu do turbulence (viz 6.3.1), je však spíše výjimkou. Podkovovitý vír je dynamickým útvarem s bouřlivým vývojem, který je dán interakcí se smykovým proudem vzniklým vlivem vnějšího proudu, jakož i interakcí se sousedními strukturami. Vlivem konvekce dochází k protahování ramen, které potom tvoří podélné víry. Tyto víry hrají významnou roli v mechanismu vzniku a udržování turbulentní struktury v mezní vrstvě. Výše popsany mechanismus vzniku podélných vírů je pouze jednou z více možností.



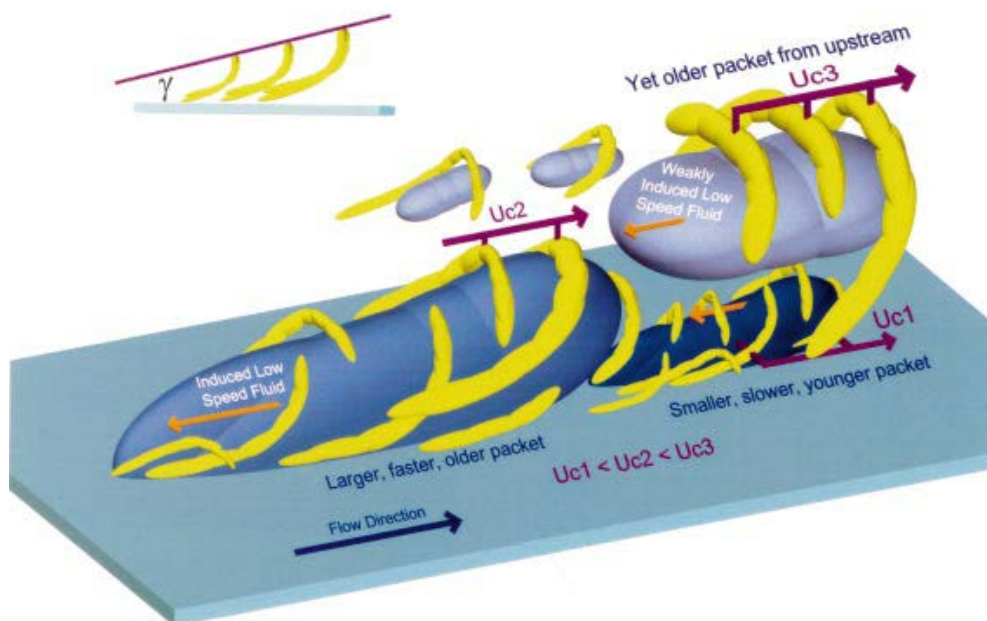
Obr. 10.15 – Vlasečnicový podkovovitý vír

Z tvaru vlasečnicového víru je zřejmé, že podélné víry se vyskytují převážně ve vnitřní části mezní vrstvy v blízkosti stěny (angl.: *buffer layer*), zatímco v blízkosti vnějšího okraje (angl.: *wake*) jsou převážně příčné vírové struktury. V oblasti mezi výše jmenovanými (oblast logaritmického zákona) můžeme pozorovat směs obou typů vírových struktur. Situace v turbulentní mezní vrstvě je znázorněna na obr. 10.16.



Obr. 10.16 – Typy koherentních vírů v turbulentní mezní vrstvě

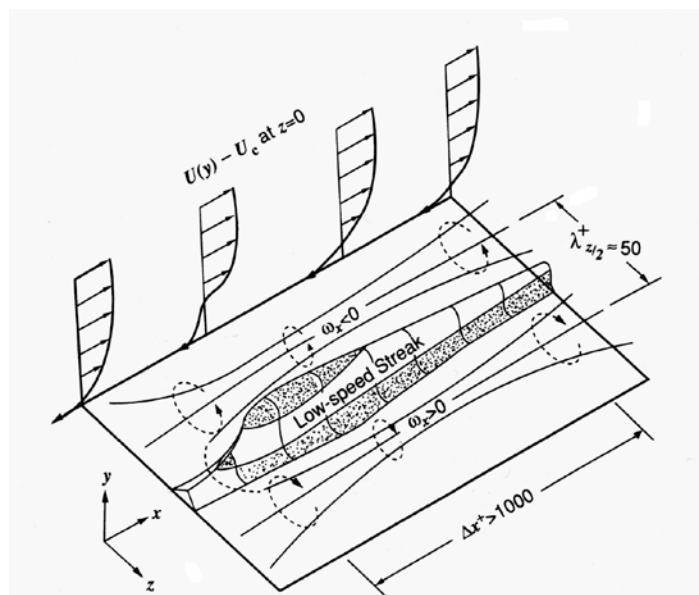
Vlásečnicové víry se mohou sdružovat do „balíků“ (angl.: *packets*). Koncepce balíků vlásečnicových vírů byla navržena Adrianem (1999). Na obr 10.17 jsou schematicky zobrazeny 3 balíky vlásečnicových vírů. Světlou barvou je naznačena vířivost vlásečnicových vírů, zatímco velké tmavé struktury představují oblasti nízké rychlosti. Vlasečnicové víry jsou generovány v balíku, v první fázi jsou drženy dohromady během růstu, později se přesouvají do oblasti vnějšího proudění. Adrian dále pozoroval výskyt poměrně velkých oblastí téměř konstantní rychlosti v příčném směru a soudí, že jsou tvořeny balíky organizovaných vírů, přičemž počet vírů v jednotlivém balíku je funkcí Reynoldsova čísla. Struktura těchto balíků je složitá, fraktální – uvnitř velkých balíků se vyskytují menší. Výsledky na obr. 10.17 odpovídají Reynoldsovu číslu  $Re_\theta = 6845$ , tato hodnota je všeobecně považována za dostatečně vysokou, aby turbulentní proudění v mezní vrstvě bylo zcela vyvinuté. Velikost balíku vlásečnicových vírů je asi  $0,8 \delta$  na výšku a  $2 \delta$  podélně ve směru proudění ( $\delta$  je tloušťka mezní vrstvy).



Obr. 10.17 – Balíky vlásečnicových vírů

### 10.3.3. Podélné pruhy nízké rychlosti a „bursting phenomenon“

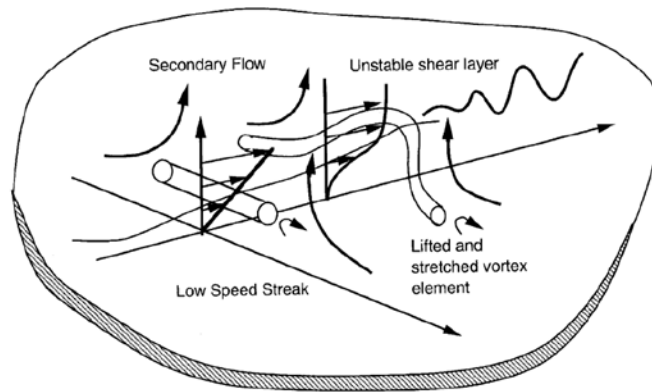
Pruhy nízké rychlosti hrají velmi důležitou roli v procesu generování turbulence. Byly pozorovány v oblasti blízko stěny, mají orientaci ve směru proudu – viz obr. 10.18.



Obr. 10.18 – Pruh nízké rychlosti dle Blackweldera

Produkce Reynoldsových napětí má intermitentní povahu. Asi polovina celkové produkce turbulentní kinetické energie probíhá v blízkosti stěny, v prvních 5 % mezní vrstvy při typických Reynoldsových číslech dosažitelných v laboratorních experimentech. Tento proces produkce se nazývá „bursting phenomenon“. Proces začíná protaženou vírovou dvojicí proti sobě rotujícími víry, které jsou orientovány ve směru hlavního proudu s průměrem asi  $40\nu/u_\tau$ . Tyto víry jsou ovlivněny silným smykem a indukují oblasti nízké a vysoké rychlosti mezi nimi – viz obr. 10.18. Víry a další struktury se vyskytují náhodně v prostoru i v čase, avšak pseudoperiodicky, střední vlnová délka v příčném směru je asi 80 až  $100\nu/u_\tau$ , jak poprvé pozoroval Kline (1967). Kline také zaznamenal, že oblasti nízké rychlosti se po proudu vyvíjejí, vznikají profily střední rychlosti s inflexním bodem, které jsou nestabilní i podle nevazkové teorie. V této oblasti dochází k oscilacím mezi oblastmi nízké a vysoké rychlosti, toto je znakem vznik sekundární nestability. Oblasti nízké rychlosti jsou potom odtlačovány směrem od stěny při zvyšující se amplitudě oscilací, následuje náhlý přechod do turbulence. Tento proces je velmi rychlý, Kline jej proto nazývá „burst“. Corino a Brodkey (1969) ukázali, že oblasti nízké rychlosti jsou poměrně úzké (asi  $20\nu/u_\tau$ ) a mohou mít i nezanedbatelnou složku v příčném směru. Prakticky veškerá produkce turbulentní kinetické energie v oblasti blízko stěny probíhá pomocí tohoto mechanismu.

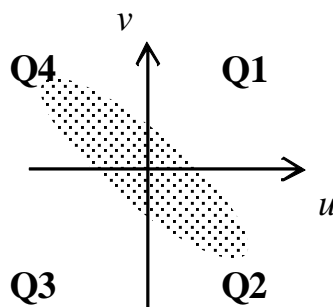
Na význam pruhů nízké rychlosti již poukázal Kline (1967). Termín „pruh“ (angl.: *streak*) souvisí s vizualizací proudění pomocí kouře, kouř se shromažďuje právě v oblastech s nízkou rychlostí. Obecněji jsou pruhy chápány jako oblast proudění s oscilacemi rychlosti v příčném směru, složka vířivosti ve směru hlavního proudu je zde zanedbatelně malá. Výskyt „pruhů“ má důležité důsledky pro stabilitu proudění v mezní vrstvě. Kline pozoroval, že kouř se postupně oddaluje od stěny, začíná oscilovat a náhle „exploduje“, tento jev nazval *bursting phenomenon* – viz obr. 10.19 (bursting phenomenon poprvé popsal Klebanoff (1962)).



Obr. 10.19 – Klinova představa mechanismu bursting phenomenon

Corino, Brodkey (1969) doplnili Klinovu představu o poslední fázi, totiž proniknutí tekutiny z vnějšku. Tak byla dopracována představa bursting phenomenon jako dvojice koherentních událostí „vypuzení“ a „proniknutí“ (angl.: *sweep and ejection*). Podle odhadů bursting proces je mechanismem, který představuje produkci Reynoldsových napětí až z 80%. Bogard a Tiederman (1987) později ukázali, že jeden „burst“ typicky obsahuje více fází vypuzení. Jednotlivé vlásečnicové víry mohou generovat jednotlivé události typu „vypuzení“, zatímco balík vlásečnicových vírů (viz obr. 10.17) generuje celou sérii těchto událostí, která je typická pro bursting phenomenon.

Fluktuace rychlosti ve směru hlavního proudu  $u$  a kolmo ke stěně  $v$  můžeme zobrazit v grafu na obr. 10.20 rozděleném na 4 kvadranty. Stavů znázorněných v kvadrantech Q2 a Q4 představují produkci Reynoldsova napětí. Q2 lze interpretovat jako událost proniknutí a Q4 potom jako vypuzení.



Obr. 10.20 – Definice kvadrantů „událostí“

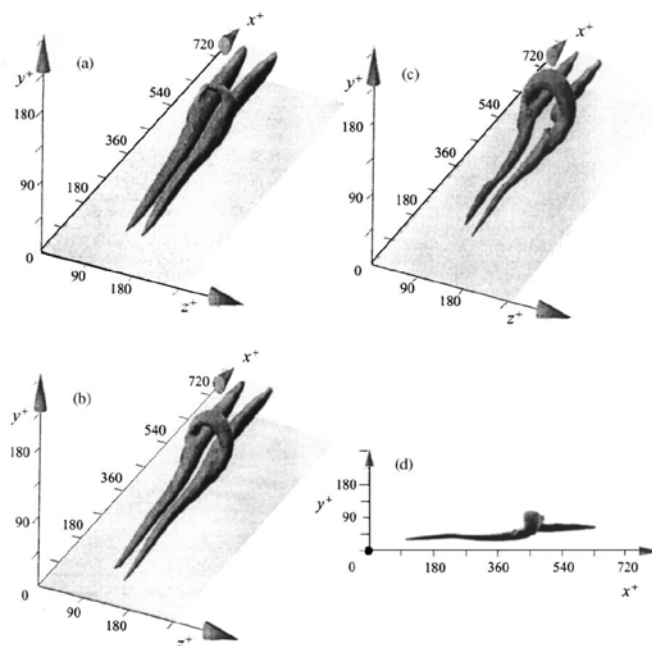
Až v poslední době byl bursting phenomenon podrobněji prozkoumán. Falco (1991) ukázal, že typický vír vzniklý vytlačěním tekutiny od stěny, který se pohybuje proti stěně, indukují silnou událost „proniknutí“ charakteristickou vysokou hodnotou  $\overline{uv}$  ( $u$  kladné,  $v$  záporné). Oblast u stěny je neustále bombardována takovými balíky tekutiny s vysokou rychlostí, které mají svůj původ v logaritmické nebo vnější oblasti. To má za následek tendenci ke vzniku a dalšímu zesilování inflexního charakteru profilu rychlosti zesilováním okamžitého smyku, tím se podporuje vznik a zesilování nestabilit.

#### 10.4. Dynamika koherentních struktur

Koherentní struktury jsou ze své podstaty dynamické objekty, které vznikají, vyvíjejí se, vzájemně interagují a opět zanikají či se přeměňují.

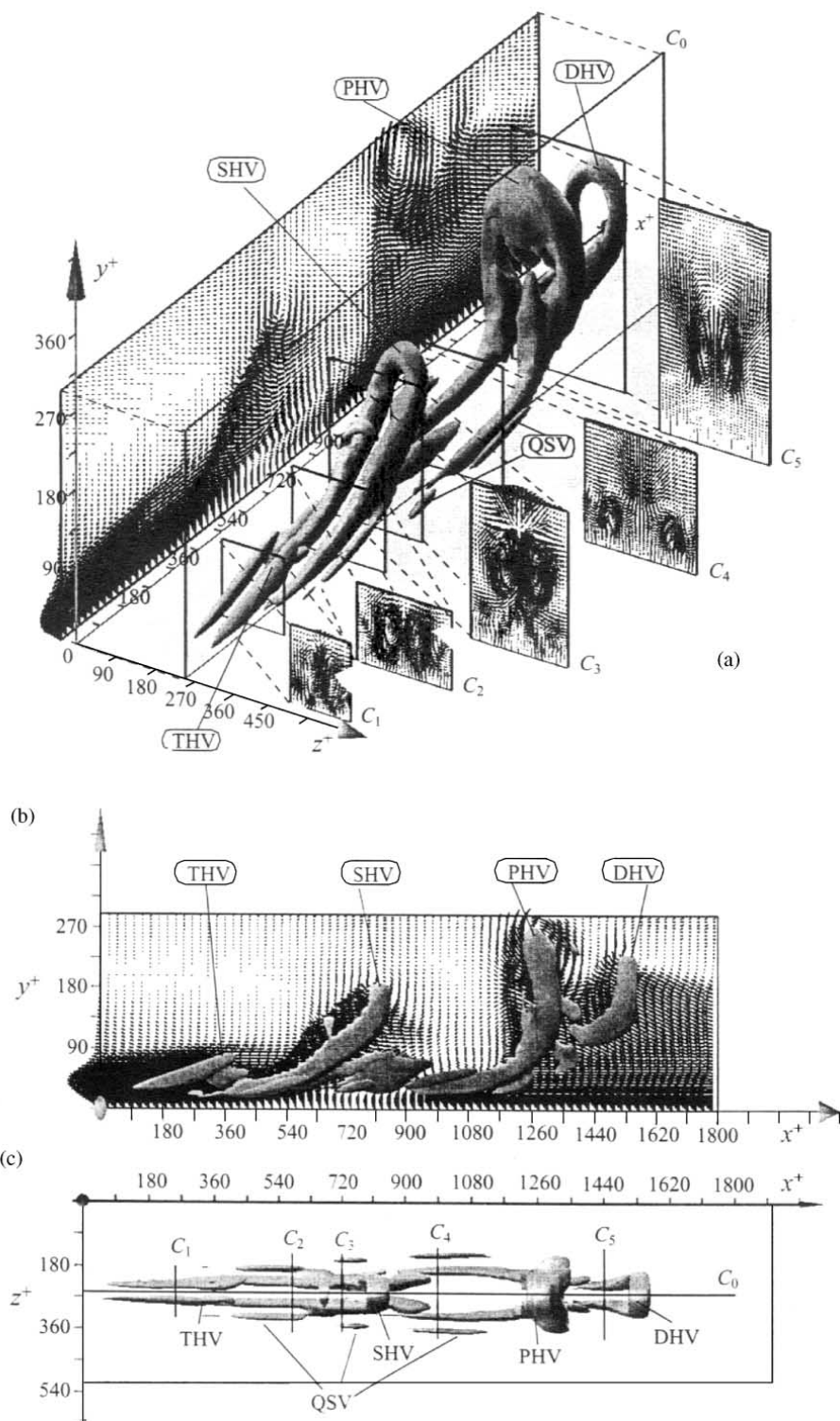
### 10.4.1. Vznik koherentních struktur

Proces vzniku koherentních struktur pomocí DNS zkoumali Adrian a Zhou v sérii prací (1988 – 1999). Jako výchozí podmínky použili typický turbulentní rychlostní profil, do kterého umístili typický vír Q2 (ten experimentálně určil Kim et al. (1987)), jedná se vlastně o vírovou dvojici – viz obr. 10.21 (a). Víry jsou asi 200 stěnových jednotek dlouhé, vzdálenost konců od stěny je 12 u konců namířených proti proudu a 65 u konců po proudu. V příčném směru je typická vzdálenost těchto struktur 100 jednotek – je to typická vzdálenost pruhů. Na obr. 10.21 (a)-(d) je znázorněn typický vývoj této struktury, kdy asi ve 2/3 její délky vzniká „přemostění“ a nakonec vzniká typický vlásečnicový vír. Tento scénář však platí jen při dostatečné intenzitě počátečních vírů, pro slabší víry dochází naopak k útlumu a postupně úplné disipaci.



Obr. 10.21 – Vznik vlásečnicového víru

Na dalším obr. 10.22 je znázorněn následný vývoj vlásečnicového víru v pozdějším čase, kdy z původního primárního vlásečnicového víru vznikají sekundární a terciární víry proti proudu od čela původního vlásečnicového víru. Dochází dále k propojení zadních ramen namířených po proudu a ke vzniku dalšího čela vlásečnicového víru po proudu (DHV). Vznikají i další menší a méně intenzivní struktury, které však rychle disipují. Celý proces nakonec vyústí ve vznik balíku vlásečnicových vírů – viz obr. 10.17.



Obr. 10.22 – Vznik sekundárních (SHV) a terciálních (THV) vlásečnicových vírů z primárního (PHV), dále jsou znázorněny víry po proudu (DHV) a quasi-podélné víry (QSV)

Výše popsané mechanismy fungují i v případě, že jeden vír z dvojice má podstatně odlišnou intenzitu od druhého, potom ovšem všechny výsledné struktury jsou silně nesymetrické. Nesymetrie se může zvětšovat, až dojde k úplné degeneraci jednoho z ramen vlásečnicového víru.

Můžeme pozorovat dva základní mechanismy vzniku nových vírů. Je to jednak „přemostění“ dvou rovnoběžných podélných vírů, kdy vzniká nový vír orientovaný napříč proudem a dále generování nových podélných vírů vlivem dostatečně silných již existujících podélných vírů – regenerace vírů.

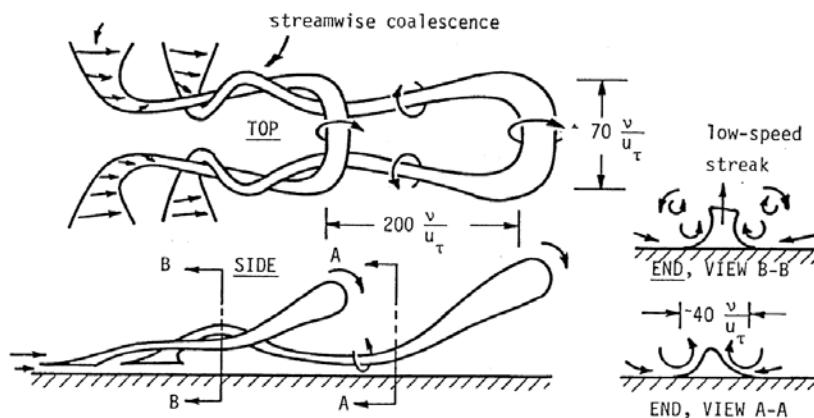
## 10.4.2. Regenerace koherentních struktur

Koherentní struktury mají schopnost regenerace, kdy během vývoje „rodičovské“ generace vlásečnicových vírů dochází ke vzniku nové počáteční podélné vírové dvojice typu Q2, která je potom základem nové generace „potomků“. Mechanismus vzniku nové Q2 události souvisí s interakcí „rodičovské“ generace vlásečnicových vírů s proudem a se stěnou.

Proces regenerace studovali Brooke a Hanratty (1993). Zjistili, že nový vír vzniká v oblasti pod koncem rodičovského víru směřujícím po proudu. Konec rodičovského víru se oddálí od stěny a vzniká tak lokální odtržení. Orientace vířivosti v nově vzniklém víru je opačná než u víru původního. Celý proces se odehrává ve vnitřní oblasti v blízkosti stěny a není příliš ovlivněn událostmi ve vnější oblasti. Tento scénář byl potvrzen mnohými studiemi na bázi DNS.

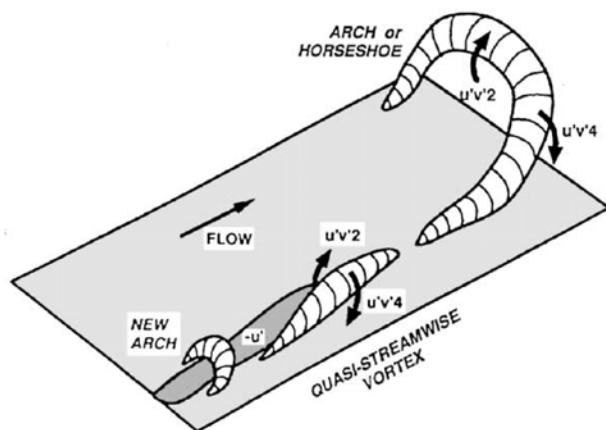
Podmínkou pro úspěšný proces regenerace podélného víru je, aby byl dostatečně silný a aby se nalézal dostatečně blízko stěny. Nový vír se objevuje na té straně starého víru, kde proudění směřuje ke stěně (*sweep*), postupně se podsouvá pod rodičovský vír, někdy jej tak oddaluje od stěny. Nový vír má dosti silnou složku vířivosti ve směru kolmém ke stěně, působením smyku je napřimován a orientován ve směru proudu, přitom se protahuje a sílí.

Proces regenerace vlásečnicových vírů je podle Smithe (1984) úzce spojen s jejich propojováním (angl.: *nesting*), jak je naznačeno na obr. 10.23. Při propojování se ramena za sebou řazených vírů prolétají a vzájemně splývají.



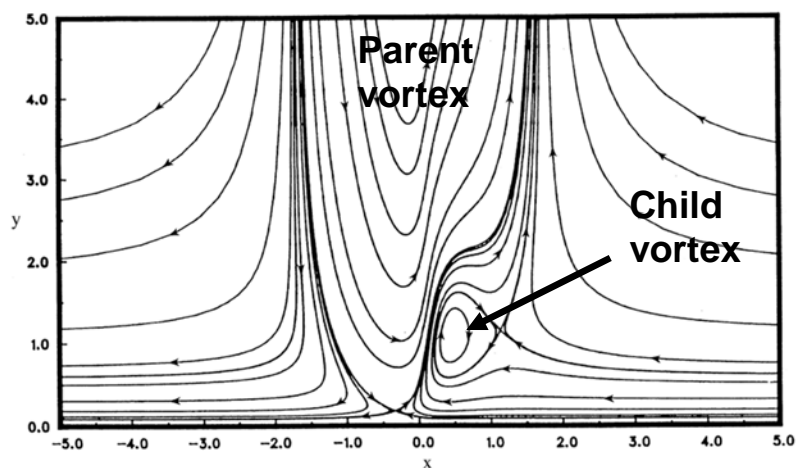
Obr. 10.23 – Propojování vlásečnicových vírů

Poněkud odlišnou koncepcí procesu regenerace navrhl Robinson (1991). Ten předpokládá neúplný vlásečnicový vír s pouze jedním vyvinutým ramenem. Čelo nového malého vlásečnicového víru („*new arch*“) vzniká v oblasti podélného pruhu nízké rychlosti, který byl vytvořen za vyvinutým ramenem vlásečnicového víru. Nový vlásečnicový vír tak může vzniknout i za osamělým podélným vírem jiného původu – viz obr. 10.24.



Obr. 10.24 – Regenerace neúplného vlásečnicového víru

Byly popsány další mechanismy vzniku vlásečnicových vírů. Smith (1984) např. pozoroval vznik nového víru působením části čela vlásečnicového víru, tedy z vířivosti orientované kolmo k hlavnímu proudu. Jedná se o velmi důležitý mechanismus, kterým je tzv. „vazká – nevazká interakce“ (angl.: *viscous – inviscid interaction*). Tento jev byl podrobně popsán např. v Doligalski, Walker (1984). Jedná se o interakci příčného víru kolmého ke směru hlavního proudu a rovnoběžného se stěnou, který je dostatečně intenzivní aby v něm bylo možno zanedbat vliv vazkosti, se smykovou vrstvou v blízkosti stěny. Vír se pohybuje rovnoběžně se stěnou. Vlivem rychlosti indukované vírem dochází k lokálnímu snížení rychlosti v blízkosti stěny, v oblasti těsně za pohybujícím se vírem se tato rychlost může snížit až k 0, potom vznikne odtržení mezní vrstvy a dochází tak ke generaci nového víru s opačnou orientací vířivosti než má vír původní. Tento proces bývá též označován jako „erupce“ (angl.: *eruption process*). Situace je znázorněna na obr. 10.25, původní vír (angl.: *parent vortex*) a nový vír (angl.: *child vortex*), hlavní proud zprava doleva.



Obr. 10.25 – Vznik nového víru při vazké-nevazké interakci

# 11. Literatura

## 11.1. Literatura doporučená pro další studium

- Achelson, D.J., 1990, Elementary Fluid Dynamics. Cambridge University Press.
- Brdička, M., Samek, L., Sopko, B., 2000, Mechanika kontinua. Academia.
- Jonáš, P., 1998, O turbulenci. Inženýrská mechanika, roč.5, č.2, 89-106.
- Pope, S.B., 2000, Turbulent Flows. Cambridge University Press.
- Tennekes, H., Lumley, J.L., 1971, A First Course in Turbulence. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Uruba, V. 2006, Metody analýzy signálů při studiu nestacionárních jevů v proudících tekutinách. Habilitační práce, ČVUT FSI.
- Davidson, L., 2003, An Introduction to Turbulence Models. Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden.

## 11.2. Použitá literatura

(zkrácený seznam)

- Batchelor, G.K., 1994, An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press.
- Bohr, T., Jensen, M.H., Paladin, G., Vuliani, A., 1998, Dynamical Systems Approach to Turbulence. Cambridge University Press.
- Bendat, J., Piersol, A., 1971, Random Data: Analysis Measurement Procedures. John Willey & Sons, Inc.
- Bernard, P.S., Wallace, J.M., 2002, Turbulent Flow – Analysis, Measurement a Prediction. John Willey & Sons, Inc.
- Erazim, P.G., Reid, W.H., 1997, Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press.
- Frish, U., 1995, Turbulence. Cambridge University Press.
- Gad-el-Hak, M., 2000, Flow Control; passive, active, and reactive flow management. Cambridge University Press.
- George, K.W., 2001, Lecturec in Turbulence for the 21st Century. Chalmers University of Technology, Gothenburg.
- Holmes, P., Lumley, J.L., Berlioz, G., 1996, Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry. Cambridge University Press.
- Lesieur, M., 1997, Turbulence in Fluids. Kluwer Academic Publishers.
- Mandelbrot, B., 2000, Les objets fractals. Forme, hasard et dimension. Flammarion, Paris.
- Mathieu, J., Scott, J., 2000, An Introduction to Turbulent Flow. Cambridge University Press.
- Pope, S.B., 2000, Turbulent Flows. Cambridge University Press.
- Příhoda, J., Louda, P., 2007, Matematické modelování turbulentního proudění. ČVUT v Praze, skripta.
- Reynolds, O., 1883, Phil.Trans.R.Soc.Lond., 174, 935-982.
- Saffman, P.G., 1992, Vortex Dynamics. Cambridge University Press.
- Schetz, J.A., Fuchs, A.E., 1996, Handbook of Fluid Dynamics and Fluid Machinery. John Wiley & Sons, Inc.
- Schlichting, H., Gersten, K., 2000, Boundary Layer Theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Schmid, J.P., Henningson, D.S., 2001, Stability and Transition in Shear Flows. Springer-Verlag New York, Inc.

- Sprott, J.C., 2003, *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford University Press.
- Tsinober, A., 2001, *An Informal Introduction to Turbulence*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Uruba, V., 2005, *Náhoda v exaktní vědě*. Essentia, <http://www.essentia.cz>.
- Uruba, V., 2006, *Pořádek, nepořádek, chaos a turbulence*. Essentia, <http://www.essentia.cz>.

### 11.3. Zdroje obrazových materiálů

- Obr. 3.11 Dimotakis, P.E. Miake-Lye, R.C. and Papantoniou, D.A., 1983, Structure and dynamics of round turbulent jets. *Phys. Fluids.*, 26 (11), 3185-3192.
- Obr. 6.9 Brown, G.L., Roshko, A., 1974, On Density Effects and Large Structure in Turbulent Mixing Layers. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.64, 775-816.
- Obr. 6.18 Saric, W, 1994, Gortler Vortices. *Ann. Rev. Fluid Mech*, 26, 379-409.
- Obr. 6.19 Smith, C.R., Walker, J.D.A., Haidari, A.H., Sobrun, U, 1991, On the Dynamics of Near-Wall Turbulence. *Phis.Trans.Roy.Soc.London A*, 336, 131-175.
- Obr. 6.20 Krishnan, L. and Sandham, N.D., 2006, On the merging of turbulent spots in a supersonic boundary-layer flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 27, (4), 542-550.
- Obr. 7.5 Saddoughi, S. G., S. V. Veeravalli, 1994, Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number. *J.Fluid Mech.* 268, 333-372.
- Obr. 10.7 Buntine, J.D., Pullin, D.I., 1989, Marger and cancellation of strained vortices. *J.Fluid Mech.*, vol.205, 263-295.
- Obr. 10.8 Gabbay, M., Ott, E. and Guzdar, P.N., 1998, Reconnection of vortex filaments in the complex Ginzburg-Landau equation. *Physical Review E* Vol. 58, 2576-2579.
- Obr. 10.15, 10.16, 10.24 Robinson, S.K., 1991, Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annu Rev Fluid Mech*, 23, 601.
- Obr. 10.17 Adrian, R.J., Meinhart, C.D., Tomkins, C.D., 1999, Vortex organization in the outer region of the turbulent boundary layer. *J Fluid Mech*; 422, 1-54.
- Obr. 10.18 Blackwelder, R.F., 1978, The bursting process in turbulent boundary layers. eds.C.R.Smith and D.E.Abbott, 211-227, Lehigh University, Bethlehem.
- Obr. 10.19 Kline, S.J., 1967, Observed structure features in turbulent and transitional boundary layers. In: *Fluid Mechanics of Internal Flow*, ed. G.Sovran, 27-79, Elsevier.
- Obr. 10.21 Zhou, J., Adrian, R.J., Balachandar S, Kendall TM., 1999, Mechanisms for generating coherent packets in wall turbulence. *J Fluid Mech*, vol.387, 353-96.
- Obr. 10.22 Zhou, J., Adrian, R.J., Balachandar, S., 1996, Autogeneration of near-wall vortical structures in a channel flow. *Phys Fluids*, vol8, 288.
- Obr. 10.23 Smith, C.R., 1984, A synthesized model of the near-wall behaviour in turbulent boundary layers. In: Patterson GK, Zakin JK, editors. *Proceedings of the Eighth Symposium on Turbulence*, University of Missouri Rolla.
- Obr. 10.25 Panton, R.L., 2001, Overview of the self-sustaining mechanisms of wall turbulence. *Progress in Aerospace Sciences* 382 37, 341-383.
- Obr. 12.3 Lewalle, J., Ashpis, D.E.; Sohn, K-H, 1977, Demonstration of Wavelet Techniques in the Spectral Analysis of Bypass Transition Data. NASA-TP-3555.
- Obr. 12.6 Sigurdson, L.W., 1997, Flow visualization in turbulent large-scale structure research. in *Atlas of Visualization III*, edited by The Visualization Society of Japan, 99-113, CRC Press.

Ostatní obrazové materiály jsou z archivu autora a z volných zdrojů na internetu.

## 12. Dodatky

### 12.1. Vektorový počet

Ve skriptech používáme dvojí vyjádření vektorových veličin – jednak vektorový tvar, dále složkový tvar. Oba tvary jsou vzájemně ekvivalentní. Při složkovém zápisu platí Einsteino-vo sumační pravidlo, které říká, že opakující se index je sčítací.

Nechť  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  ( $a_i$  a  $b_i$ ) jsou libovolné vektory,  $c$  a  $d$  jsou skaláry.

Dále je definován skalární a vektorový součin dvou vektorů obvyklým způsobem. Skalární součin vektorů je definován:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_k b_k = \delta_{kl} a_k b_l, \quad (12.1)$$

kde  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$  je Kroneckerovo delta.

Vektorový součin je potom

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \mathbf{e}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \mathbf{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) = \\ &= \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \equiv \varepsilon_{ikl} a_k b_l, \end{aligned} \quad (12.2)$$

kde  $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{pro } (i, j, k) \text{ rovno } (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ nebo } (2, 3, 1) \\ -1 & \text{pro } (i, j, k) \text{ rovno } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ nebo } (2, 1, 3) \\ 0 & \text{jindy: } i = j, j = k \text{ nebo } k = i \end{cases}$  je Levi-Civitův alternující tenzor a

$\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  a  $\mathbf{e}_3$  jsou jednotkové vektory ve směrech 1, 2 a 3. V prvním řádku výrazu (12.2) je uveden vektorový tvar, ve druhém řádku je potom tvar složkový.

Dále definujeme  $\nabla$  vektorový Laplaceův operátor parciálních derivací „nabla“ ve tvaru

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{bmatrix}. \quad (12.3)$$

Divergence vektoru je potom definována

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_k}{\partial x_k} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}. \quad (12.4)$$

Divergence vektoru se liší od gradientu vektoru, ten je

$$\operatorname{grad} \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \partial a_1 / \partial x_1 & \partial a_2 / \partial x_1 & \partial a_3 / \partial x_1 \\ \partial a_1 / \partial x_2 & \partial a_2 / \partial x_2 & \partial a_3 / \partial x_2 \\ \partial a_1 / \partial x_3 & \partial a_2 / \partial x_3 & \partial a_3 / \partial x_3 \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial a_j}{\partial x_i}. \quad (12.5)$$

Konečně rotace vektoru

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \operatorname{curl} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{e}_1 (\partial a_3 / \partial x_2 - \partial a_2 / \partial x_3) + \mathbf{e}_2 (\partial a_1 / \partial x_3 - \partial a_3 / \partial x_1) + \mathbf{e}_3 (\partial a_2 / \partial x_1 - \partial a_1 / \partial x_2) = \\ &= \begin{bmatrix} \partial a_3 / \partial x_2 - \partial a_2 / \partial x_3 \\ \partial a_1 / \partial x_3 - \partial a_3 / \partial x_1 \\ \partial a_2 / \partial x_1 - \partial a_1 / \partial x_2 \end{bmatrix} \equiv \varepsilon_{ikl} \frac{\partial a_l}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Z teorie tenzorového počtu známe vektorové identity, které platí obecně. Některé, které využíváme v dynamice tekutin, zde uvedeme

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}, \quad (12.7)$$

$$\nabla \times \nabla c = \mathbf{0}, \quad (12.8)$$

$$(d\nabla c) \times \nabla c = \mathbf{0}, \quad (12.9)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0, \quad (12.10)$$

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a} = (\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a} + 1/2 \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}), \quad (12.11)$$

$$\nabla \times \nabla^2 \mathbf{a} = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{a}), \quad (12.12)$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}. \quad (12.13)$$

## 12.2. Veličiny zaváděné v teorii turbulence

Na tomto místě uvedeme přehled hlavních veličin, které jsou zaváděny a používány v turbulenci. Jedná se vesměs o „měrné“ veličiny, tedy vztažené na jednotku hmotnosti tekutiny.

„Kinetická energie“ (angl.: *kinetic energy*) je definována vztahem

$$k = 1/2 \overline{u_k u_k}. \quad (12.14)$$

Dále, „rychlost disipace“ (angl.: *rate of dissipation*)

$$\varepsilon = 2\nu \overline{s_{kl} s_{kl}}, \quad (12.15)$$

kde

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (12.16)$$

je rychlost deformace částice tekutiny.

Bývá také zaváděna „specifická rychlost disipace“

$$\omega = \varepsilon/k. \quad (12.17)$$

„Vířivost“ (angl.: *vorticity*) je vektor

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}, \quad (12.18)$$

je měřítkem obsahu cirkulace či rotace (přesněji řečeno místní úhlové rychlosti) tekutiny. Její modul je vázán s cirkulací  $\Gamma$ :  $|\boldsymbol{\omega}| = d\Gamma/dS$ , kde  $S$  je plocha kolmá k vektoru vířivosti.

Další důležitou veličinou je „enstrofie“ (angl.: *enstrophy*)

$$\zeta = 1/2 \langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle. \quad (12.19)$$

Enstrofie je formálně podobná kinetické energii, místo rychlosti zde vystupuje vířivost.

„Helicita“ (angl.: *helicity*)

$$H = 1/2 \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle \quad (12.20)$$

kvantifikuje „šroubovitost“ pohybu, pro čistě kruhový nebo posuvný pohyb tekutiny je nulová.

## 12.3. Symetrie turbulentního proudění

V teorii turbulence jsou zaváděny mnohé předpoklady, které formálně zjednodušují matematický popis. Uvedeme nyní některé takové vlastnosti s příslušnými definicemi.

„Homogenita“ (angl.: *homogeneity*)

Def.: Turbulence je **homogenní**, jestliže všechny středované veličiny v libovolných  $n$  bodech  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  (v časových okamžicích  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ) jsou invariantní vůči jakémukoli **posunutí** těchto bodů nebo souřadné soustavy v **prostoru** o vektor  $\mathbf{r}$ .

Důsledky:  $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle$ , může být i jen homogenita fluktuací a ne středních hodnot; homogenitu okamžitých hodnot neuvažujeme.

„Stacionarita“ (angl.: *stationarity*)

Def.: Turbulence je **stacionární**, jestliže všechny střední veličiny středované v libovolných  $n$  časových okamžicích  $t_1, t_2, \dots, t_n$  jsou invariantní vůči jakémukoli **posunutí** těchto **časů**  $t_1, t_2, \dots, t_n \circ \tau$ .

Důsledky:  $\langle u_{\alpha 1}(\mathbf{x}_1, t_1) \dots u_{\alpha n}(\mathbf{x}_n, t_n) \rangle = \langle u_{\alpha 1}(\mathbf{x}_1, t_1 + \tau) \dots u_{\alpha n}(\mathbf{x}_n, t_n + \tau) \rangle$ , je nutný přísun energie, jinak útlum způsobený disipací.

„Izotropie“ (angl.: *isotropy*)

Def.: Homogenní turbulence je **izotropní**, jestliže všechny střední veličiny v libovolných  $n$  bodech  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  (v časových okamžicích  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ) jsou invariantní vůči jakékoli **rotaci** těchto bodů nebo souřadné soustavy.

Důsledky:  $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle = \mathbf{0} \Rightarrow \langle \mathcal{G}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle = \mathbf{0}$  pro libovolný skalár  $\mathcal{G}(\mathbf{x}, t)$ .

Je možné uvažovat izotropii vzhledem k vyšším statistickým momentům a nikoli k momentu 1. řádu (střední hodnota).

„Ergodičnost“ (angl.: *ergodicity*)

Průměrná realizace ve smyslu středování souboru hodnot je nahrazena **prostorovým** nebo **časovým** průměrem.

## 12.4. Statistické nástroje

Na veličiny charakterizující turbulentní proudové pole v daném místě a čase lze nahlížet jako na náhodné veličiny. Aplikujeme potom na ně statistické nástroje.

### 12.4.1. Středování

Operaci středování, kterou definoval Reynolds, chápeme jako „středování souboru hodnot“ (angl.: *ensemble average*) získaných při opakované realizaci procesu. Střední hodnotu souboru hodnot proměnné  $a$  budeme značit lomenými závorkami  $\langle a \rangle$ . Přijmeme-li hypotézu o ergodičnosti procesu, potom můžeme nahradit operaci středování souboru hodnot operací středování v čase, střední hodnotu v čase  $\bar{a}$ . Střední hodnotu veličiny v čase průměrem jejích realizací v jistém omezeném časovém úseku  $T$ , který je potom jejím estimátorem  $a_T(t)$

$$a_T(t) = \frac{1}{T} \int_0^T a(t + \tau) d\tau. \quad (12.21)$$

Povšimněme si, že estimátor je obecně funkcí času. Střední hodnota je potom definována jako

$$\bar{a} = \lim_{T \rightarrow \infty} a_T(t), \quad (12.22)$$

ta už potom není na čase závislá.

V praxi však pracujeme vždy s estimátory, jejichž hodnota se blíží střední hodnotě. Naopak při teoretických úvahách nejčastěji pracujeme se středními hodnotami souboru hodnot. Klíčová je volba časového úseku  $T$  přes který integrujeme. Obecně musí být značně delší, než je perioda nejpomalejší kvaziperiodické složky daného procesu.

Operace středování má některé více či méně triviální vlastnosti, které jsou určující pro její použití.

Operace středování je lineární. Pro libovolné dvě funkce  $a(x, t)$  a  $b(x, t)$  a konstantu  $\lambda$  platí

$$\overline{a + \lambda b} = \bar{a} + \lambda \bar{b}, \quad (12.23)$$

komutativnost s derivací

$$\frac{\overline{\partial a}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{a}}{\partial x} \quad (12.24)$$

a také komutativnost s integrací

$$\overline{\int a dx} = \int \overline{a} dx, \quad (12.25)$$

pravidlo o dvojím středování

$$\overline{\overline{a}} = \overline{a} \quad (12.26)$$

a konečně průměrování násobení

$$\overline{a b} = \overline{a} \overline{b}. \quad (12.27)$$

Obvykle přijímáme předpoklad o ergodicitě procesu, který nás opravňuje k nahrazení středování souboru středování v čase či v prostoru. Prakticky jej lze určit např. pomocí filtrování signálu příslušným filtrem. Platí pouze pro homogenní a stacionární turbulenci.

### 12.4.2. Charakteristiky náhodného procesu

Mějme fyzikální veličinu  $u$ , která může nabývat náhodných hodnot  $v$ . Budeme nyní definovat statistické charakteristiky, které mohou popsat způsob chování této veličiny.

### 12.4.3. Distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti

Charakter náhodného procesu může být zkoumán pomocí různých nástrojů. Jednou ze základních charakteristik náhodného procesu je „distribuční funkce“ (angl.: *cumulative distribution function – CDF*)  $F$ . Je definována jako pravděpodobnost, že konkrétní realizace náhodného procesu  $u$  bude menší než hodnota  $v$

$$F(v) \equiv P\{u < v\}. \quad (12.28)$$

Z definice distribuční funkce je zřejmé, že se jedná o neklesající funkci, pro niž platí:

$$F(-\infty) = 0 \text{ a } F(\infty) = 1. \quad (12.29)$$

Dále definujeme „hustotu pravděpodobnosti“ (angl.: *probability density function – PDF*)  $f$ , podle Radon-Nikodynova teorému platí:

$$f(v) \equiv \frac{dF(v)}{dv}. \quad (12.30)$$

Z definice hustoty pravděpodobnosti plynou následující triviální vlastnosti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv = 1, \quad f(-\infty) = f(\infty) = 0. \quad (12.31)$$

Pravděpodobnost, že veličina  $u$  nabývá hodnot z intervalu  $[v_a, v_b)$  je možno vyjádřit pomocí distribuční funkce nebo hustoty pravděpodobnosti následujícím způsobem:

$$P\{v_a \leq u < v_b\} = F(v_b) - F(v_a) = \int_{v_a}^{v_b} f(v) dv. \quad (12.32)$$

Proměnnost náhodné veličiny je úplným způsobem charakterizována distribuční funkcí anebo hustotou pravděpodobnosti, jejich informační obsah je stejný. Tyto funkce ovšem neobsahují časové charakteristiky procesu.

Experimentální určení hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce je poněkud problematické, protože se obecně jedná o spojité funkce. Hustotu pravděpodobnosti nejčastěji určujeme v diskretizované podobě jako „histogram“ (angl.: *histogram*). Volba diskretizačního kroku histogramu není libovolná, je třeba vzít v úvahu průměrný počet vzorků, které připadnou na jeden interval. Pokud je tento počet příliš malý, potom dostáváme příliš rozházený průběh.

### 12.4.4. Některé typy náhodných rozdělání

Rovnoměrné rozdělání je definováno

$$f(v) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{pro } a \leq v < b, \\ 0, & \text{pro } v < a \text{ a } v \geq b. \end{cases} \quad (12.33)$$

Jedná se o základní statistické rozdělání.

Normální, Gaussovo rozdělání je charakterizováno střední hodnotou  $\mu$  a rozptylem  $\sigma^2$

$$f(v) = N(v, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (12.34)$$

Normální rozdělání je typické pro čistě náhodný proces. Je výhodné pro analytickou práci (snadno se vyjádří derivace a integrály). Součinitel šikmosti je  $S = 0$  a součinitel špičatosti  $F = 3$ .

Pro mnoho náhodných veličin vystupujících v turbulenci je typické log-normální rozdělání. Uvažujeme náhodnou proměnnou  $\tilde{v}$  s normálním rozděláním. Potom proměnná  $v = e^{\tilde{v}}$  je charakterizována log-normálním rozděláním.

$$f(v) = \frac{1}{v\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln v - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (12.35)$$

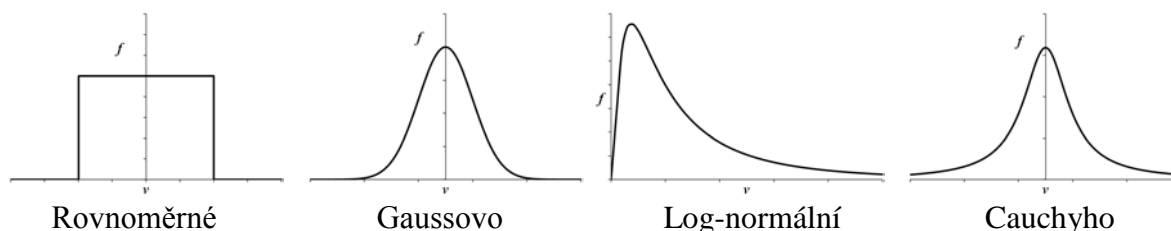
Log-normální rozdělání je definováno pouze pro kladné hodnoty náhodné veličiny, může jít např. o délky určitých oblastí. Toto rozdělání je teoreticky odvozeno pro náhodnou veličinu, která se vyskytuje intermitentně.

Cauchyho rozdělání je charakterizováno střední hodnotou  $c$  a pološířkou  $w$

$$f(v) = \frac{w/\pi}{(v-c)^2 + w^2}, \quad F(v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{v-c}{w}\right). \quad (12.36)$$

Cauchyho rozdělání se blíží náhodné rozdělání modulu rychlosti v proudu za přítomnosti koherentních struktur.

Tvary distribuční funkce pro probrané případy jsou schematicky znázorněny na obr. 12.1.



Obr. 12.1 – Rozdělání pravděpodobnosti

### 12.4.5. Statistické momenty

Dalšími nástroji pro popis a analýzu náhodného signálu jsou statistické momenty. Můžeme je vyjádřit pomocí hustoty pravděpodobnosti. Mějme náhodnou skalární veličinu  $u$  a její realizaci  $v$ , potom střední hodnota  $\bar{u}$  náhodné veličiny  $u$  bude

$$\bar{u} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} v f(v) dv. \quad (12.37)$$

Podobný vztah platí pro střední hodnotu libovolné funkce náhodné proměnné  $Q(u)$

$$\overline{Q(u)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} Q(v) f(v) dv. \quad (12.38)$$

V praxi často pracujeme s fluktuacemi náhodné veličiny  $u'$ , které jsou definovány vztahem

$$u' = u - \bar{u}. \quad (12.39)$$

Pomocí fluktuací jsou definovány centrální statistické momenty  $n$ -tého řádu

$$\mu_n \equiv \overline{u'^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (v - \bar{u})^n f(v) dv. \quad (12.40)$$

Pro řád 0 a 1 platí identicky  $\mu_0 = 1$  a  $\mu_1 = 0$ . Dále, centrální statistický moment druhého řádu představuje rozptyl náhodné veličiny (angl. *variance*)

$$\mu_2 \equiv \overline{u'^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (v - \bar{u})^2 f(v) dv. \quad (12.41)$$

Rozptyl se často uvádí ve formě odmocniny, tato veličina, která má stejný fyzikální rozměr jako náhodná proměnná, se nazývá „směrodatná odchylka“ (angl. *standard deviation* či *root mean square – r.m.s.*)

$$\text{std}(u) = \sqrt{\mu_2} \equiv \sqrt{\overline{u'^2}}. \quad (12.42)$$

Základní charakteristikou fluktuací složky rychlosti proudění v daném bodě je intenzita fluktuací  $Iu$  či intenzita turbulence  $Tu$ . Pro obecný případ je definována jako

$$Iu = Tu = \sqrt{\frac{\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}}{3|u|^2}}, \quad (12.43)$$

její hodnota se často uvádí v procentech. Povšimněme si, že pro izotropní případ, kdy  $\overline{u_1'^2} = \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2} = \overline{u'^2}$ , potom platí vztah  $Tu = \sqrt{\overline{u'^2}}/|u|$ .

Běžně se vyhodnocují centrální statistické momenty 3. a 4. řádu, které charakterizují rozdělení náhodné veličiny. Z praktických důvodů se tyto momenty normalizují pomocí dělení příslušnou mocninou rozptylu tak, aby výslední součinitelé byli bezrozměrní. Jedná se o „součinitel šikmosti“ (angl. *skewness factor*)  $S$  a „součinitel špičatosti“ (angl. *flatness factor*)  $F$ :

$$S = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \quad \text{a} \quad F = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}. \quad (12.44)$$

Tyto součinitele se používají pro charakteristiku zkoumaného náhodného procesu a jeho rychlé srovnání s normálním Gaussovým rozdělením. Pro normální rozdělení platí, že  $S = 0$  a  $F = 3$ .

### 12.4.6. Korelační funkce

Pro stacionární náhodný proces je definována autokorelační funkce

$$R(\tau) = \overline{u(t)u(t+\tau)}, \quad (12.45)$$

kde  $u(t)$  je vyhodnocovaný signál a  $\tau$  je časový posuv.

Autokorelační funkce má fyzikální rozměr kvadrátu náhodné veličiny, což může být nepraktické. Často se zavádí autokorelační koeficient, který je bezrozměrný a nabývá hodnot v intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ . Autokorelační koeficient je definován

$$\rho(\tau) = \frac{\overline{u(t)u(t+\tau)}}{\overline{u^2(t)}}. \quad (12.46)$$

Dále definujeme vzájemnou korelační funkci  $R_{uv}$  a vzájemný korelační koeficient  $\rho_{uv}$  pro dvě náhodné veličiny, které mají nulovou střední hodnotu

$$R_{uv} = \overline{u(t)v(t)}, \quad \rho_{uv} = \frac{\overline{u(t)v(t)}}{\sqrt{\overline{u^2(t)} \overline{v^2(t)}}}. \quad (12.47)$$

Hodnota vzájemného korelačního koeficientu je ukazatelem, který kvantifikuje lineární závislost zkoumaných signálů. Skutečnost, že jeho hodnota se blíží k 0 je **nutnou** podmínkou pro statistickou nezávislost obou signálů, není však podmínkou postačující. Naopak hodnoty 1 nebo -1 je **postačující** podmínkou pro lineární závislost obou signálů.

### 12.4.7. Spektra

Dále definujeme „autokorelaci“ (angl.: *autocovariance*) rychlosti, v časové oblasti bude

$$R(s) = \overline{u'(t)u'(t+\tau)}, \quad (12.48)$$

kde  $\tau$  je časový posuv.

„Autokorelační funkce“ (angl.: *autocorrelation function*) je potom normalizovaná autokorelace

$$\rho(\tau) = R(\tau) / \overline{u'^2(t)}. \quad (12.49)$$

Pro autokorelační funkci platí, že  $|\rho(\tau)| \leq 1$  a  $\rho(0) = 1$ , dále  $\rho(\tau)$  je sudá funkce, to znamená, že platí  $\rho(\tau) = \rho(-\tau)$ .

Pro stacionární proces není autokorelace ani autokorelační funkce funkcí času.

Na základě autokorelace můžeme definovat některé další důležité veličiny. Procesy spojené s turbulencí jsou náhodné povahy, absolutní hodnota jejich autokorelační funkce se s časem zmenšuje. Z toho vyplývá, že integrál autokorelační funkce pro  $\tau$  rostoucí k nekonečnu konverguje. Můžeme tedy definovat „integrální časové měřítko“ (angl.: *integral timescale*) vztahem

$$L = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau \quad (12.50)$$

Dále můžeme definovat „frekvenční spektrum“ (angl.: *frequency spectrum*) pomocí Fourierovy transformace

$$E(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (12.51)$$

Druhý výraz plyne ze skutečnosti, že  $R(\tau)$  je sudá funkce. Platí dále inverzní vztah

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = 2 \int_0^{\infty} E(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (12.52)$$

Veličiny  $R(\tau)$  a  $E(\omega)$  obsahují ekvivalentní informaci. Konstanty před integrály ve vztazích (12.51) a (12.52) mohou být odlišné, jedná se o definiční vztahy.

Základní vlastností  $E(\omega)$  je, že integrál  $\int_{\omega_1}^{\omega_2} E(\omega) d\omega$  představuje příspěvek frekvencí v rozsahu  $\omega_1 \leq \omega < \omega_2$  k hodnotě rozptylu  $\overline{u'^2(t)}$ . Dále platí, že rozptyl lze vyjádřit integrálem:  $\overline{u'^2(t)} = \int_0^{\infty} E(\omega) d\omega$ .

Pomocí Wiener-Chinčinoва teorému je definováno autospektrum. Oboustranná spektrální hustota je definována vztahem

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau, \quad -\infty < f < \infty. \quad (12.53)$$

Platí také inverzní vztah

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f\tau} df. \quad (12.54)$$

Praktičtější pro běžné použití je jednostranné spektrum, to je definováno pouze pro kladné frekvence

$$G(f) = 2S(f), \quad 0 \leq f < \infty. \quad (12.55)$$

Spektrum může být vztažené k jednomu signálu, pak se jedná o autospektrum, nebo ke dvěma signálům, pak jde o vzájemné spektrum. Podobně korelační funkce může být ve formě auto-korelační a vzájemně korelační.

Fourierovu transformaci používají po dlouhá léta vědci i inženýři pro analýzu a kvantifikaci signálů a to již v dobách, kdy nebyly počítače běžným vybavením laboratoří. Ač počítače podstatně zefektivnily práci a rozšířily možnosti při zpracování signálů, Fourierova transformace zůstává jedním z nejnáročnějších úkolů při analýze signálů vzhledem k velkým nárokům na objem výpočtů.

Ačkoli Fourierova transformace je podle své definice spojitou transformací, její praktický výpočet se provádí na počítačích numericky, jedná se pak o „digitální Fourierovu transformaci“ (angl.: *Digital Fourier Transform – DFT*).

Počátkem 60. let minulého století byla zavedena nová metoda, která podstatným způsobem zefektivnila výpočet a snížila objem nutných operací pro numerický výpočet Fourierovy transformace. Tato metoda byla nazvána „rychlá Fourierova transformace“ (angl.: *Fast Fourier Transform – FFT*), za její autory jsou tradičně považováni J.W. Cooley a J.W. Tukey. Při podrobnějším rozboru se však ukazuje, že autorství matematického postupu je nutno připsat již Gaussovi, který v roce 1805 de facto zavedl Fourierovy řady. Tímto postupem lze snížit náročnost klasické formy DFT, u níž počet operací nutný k jejímu výpočtu roste s  $N^2$ , kde  $N$  je délka signálu, na hodnotu  $N \cdot \log N$  u FFT. To znamená, že například u signálu délky 1024 bodů je FFT více než o dva řády rychlejší než klasická DFT.

Nebudeme se zde podrobně zabývat implementací numerických algoritmů. Spokojíme se na tomto místě s konstatováním, že pomocí těchto algoritmů lze dojít k žádaným výsledkům, které jsou definovány vzorci pro výpočet Fourierovy transformace, poněkud jiným, mnohem efektivnějším způsobem než přímou aplikací definičních vztahů. Tyto algoritmy jsou velmi spolehlivé a jsou implementovány ve všech programových balících určených pro analýzu signálů (např. MATLAB, LabVIEW, atd.).

Fourierova analýza je klasická metoda, kterou lze z důvodů interpretace výsledků aplikovat pouze stacionární signály. To znamená, že v případě nestacionárního signálu musíme volit délku integrace dostatečně krátkou, takovou, aby po dobu integrace bylo možno signál považovat za statisticky stacionární.

Pro analýzu je však vyžadován poměrně dlouhý záznam signálu. Nevýhodou je také zvýšená citlivost k širokopásmovému šumu v signálu.

Fourierova transformace je příkladem integrální transformace, je určena konvolučním součinem signálu se sadou harmonických analyzujících funkcí.

$$X(f, T) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{i2\pi ft} dt \quad \text{pro } -\infty < f < \infty. \quad (12.56)$$

kde výraz  $X(f, T)$  představuje Fourierovu transformaci signálu  $x(t)$  o délce  $T$ .

V současné době je Fourierova transformace standardní metodou s robustními a efektivními algoritmy implementace. Je proto snaha o maximální využití tohoto nástroje, například se daný problém řeší ve spektrální oblasti pomocí Fourierových obrazů.

Periodogram  $P(f, T)$  vznikne aplikací Fourierovy transformace na signál konečné délky  $T$ :

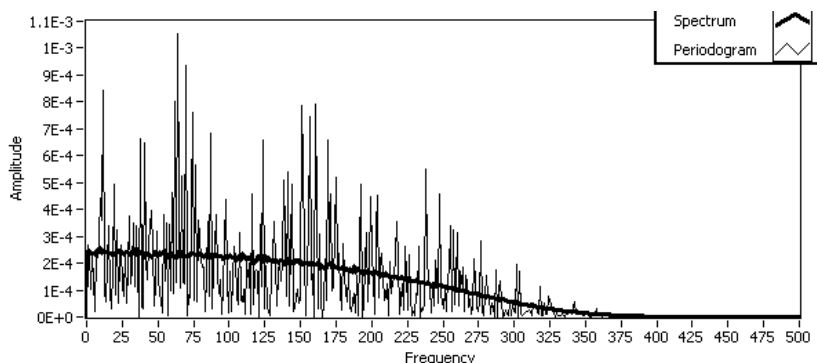
$$P(f, T) = \frac{1}{T} |X(f, T)|^2. \quad (12.57)$$

Periodogram se blíží spektrální výkonové hustotě neboli spektru signálu  $x(t)$ :

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} P(f, T). \quad (12.58)$$

Lze ukázat, že pro konečnou délku signálu  $T$  je odhad spektrální výkonové hustoty vychýlený a také není konzistentní, to znamená, že rozptyl jeho hodnot neklesá s rostoucí délkou signálu. Jednotlivý periodogram je tedy nepoužitelný pro analýzu signálu pro jeho značný

rozptyl. To je markantní hlavně u digitální podoby Fourierovy transformace, kdy šířka pásma a tedy i krok frekvence je dán převrácenou hodnotou délky signálu – z toho je zřejmé, že při výpočtu jednotlivých hodnot nedochází k jejich středování a získáváme tak hodnoty zatížené náhodnou chybou. Na obr. 12.2 je znázorněn rozdíl mezi periodogramem a spektrem.



Obr. 12.2 – Periodogram a spektrum náhodného signálu

Přijatelný odhad spektra můžeme získat pomocí metody průměrování. Průměrování lze provádět dvojím způsobem, přičemž výsledek je v obou případech stejný. Jedná se o průměrování periodogramů a o průměrování frekvenčních pásem.

Při průměrování periodogramů je původní signál délky  $T$  rozdělen na  $p$  bloků délky  $T_p = T/p$ . Tím dochází ke změně šířky pásma z hodnoty  $1/T$  na hodnotu  $1/T_p$ , která je  $p$  krát větší. Odhad spektra  $\tilde{S}(f)$  potom bude:

$$\tilde{S}(f) = \frac{1}{T \cdot p} \sum_{k=1}^p |X(f, T_k)|^2. \quad (12.59)$$

V případě diskrétní implementace tedy provádíme průměr hodnot příslušejících každé frekvenci zvlášť.

Při průměrování frekvenčních pásem vycházíme z jediného periodogramu, který je charakterizován dostatečně úzkým pásmem. Během procedury dochází k redukci počtu pásem tím, že se určitý počet sousedních pásem průměruje. Další možností výpočtu je aplikace klouzavého průměru na periodogram, tím dojde k jeho vyhlazení. Tato operace je ekvivalentní aplikaci dolnoproputného filtru, dojde tak k odfiltrování vysokých frekvencí a k faktické redukci aktivních pásem.

Oba způsoby průměrování by měly dát podobný výsledek. Uvážíme-li však, že náročnost výpočtu rychlé Fourierovy transformace je úměrná součinu  $N \cdot \log N$ , pak je zřejmé, že první metoda průměrování periodogramů je efektivnější (při použití diskrétní Fourierovy transformace je rozdíl ještě markantnější).

Rozdělení signálů na bloky a statistické zpracování každého bloku zvlášť působí také jako hornopropustný filtr, kdy se odfiltrují vlivy kolísání signálu s periodou větší než je délka jednoho bloku.

V praxi nejčastěji potřebujeme určit spektrální výkonovou hustotu z naměřených časových řad záznamů signálů. Z těchto záznamů můžeme vyhodnotit spektra jak v časové tak i v prostorové oblasti pomocí Taylorovy hypotézy.

## 12.4.8. Waveletová transformace

Waveletová transformace je mocným nástrojem spojené analýzy signálů v časové a frekvenční oblasti. Pro tento účel se používá zejména tzv. „kontinuální“ varianta waveletové transformace.

Existuje i „diskrétní“ varianta waveletové transformace. Ta se používá pro účely komprese signálů, hodí se také pro určování „koherentního“ obsahu signálu. To znamená té části sig-

nálu, která souvisí s výskytem vírových struktur v proudovém poli, protože při vhodné volbě matečného waveletu lze dobře vliv těchto struktur identifikovat.

Výsledkem je dvojrozměrný graf, který můžeme interpretovat jako časový průběh okamžitých spekter. Waveletová transformace je jednou z nejefektivnějších variant spojené analýzy v časové a frekvenční oblasti.

Uvedeme zde teorii waveletové transformace pouze v jednorozměrném prostoru, který je charakterizován jednou proměnnou  $x$ , kterou může být např. čas. Tato teorie může být snadno rozšířena do prostoru o libovolné dimenzi pomocí operace rotace aplikované na matečný wavelet navíc k operaci posunutí a dilatace.

„Matečný wavelet“<sup>13</sup> (angl.: *mother wavelet*)  $\psi(x)$  může být reálnou či komplexní funkcí, která musí být „připustná“, to znamená, že musí splňovat podmínku

$$C_\psi = \int_0^\infty |\widehat{\psi}(\kappa)|^2 \frac{d\kappa}{|\kappa|} < \infty, \quad (12.60)$$

kde

$$\widehat{\psi}(\kappa) = \int_{-\infty}^\infty \psi(x) e^{-i2\pi\kappa x} dx \quad (12.61)$$

představuje Fourierův obraz matečného waveletu,  $\kappa$  je vlnové číslo. Splnění nerovnosti (12.60) je podmínkou pro existenci reprodukčního jádra charakterizovaného konečnou energií a tím také pro existenci zpětné waveletové transformace.

Funkce  $\psi$  je tedy připustná, pokud platí, že její střední hodnota je nula:

$$\int_{-\infty}^\infty \psi(x) dx = 0 \text{ nebo } \widehat{\psi}(\kappa=0) = 0. \quad (12.62)$$

Z praktických důvodů se požaduje, aby byl matečný wavelet dobře lokalizovaný jak ve fyzikálním prostoru proměnných  $x$ , tak ve Fourierově prostoru proměnných  $\kappa$ . To znamená, že funkce  $\psi$  musí vykazovat rychlý útlum pro rostoucí hodnotu  $|x|$  a dále musí být hladká. Také je vhodné vyžadovat, aby se vyšší momenty rovnaly nule

$$\int_{-\infty}^\infty x^m \psi(x) dx = 0 \text{ pro } m = 1, \dots, M. \quad (12.63)$$

Splnění této podmínky zaručuje, že jednočleny až do řádu  $M$  jsou přesně reprodukovány. Ve Fourierově prostoru je tato podmínka ekvivalentní požadavku, aby Fourierův obraz  $\widehat{\psi}$  plynule klesal k nule při  $\kappa$  jdoucím k nule

$$\left. \frac{d^m}{d\kappa^m} \widehat{\psi}(\kappa) \right|_{\kappa=0} = 0 \text{ pro } m = 0, \dots, M. \quad (12.64)$$

Pomocí matečného waveletu  $\psi$  lze generovat rodinu waveletů charakterizovaných translací a dilatací

$$\psi_{l,x}(x') = \frac{1}{\sqrt{l}} \psi\left(\frac{x' - x}{l}\right), \quad (12.65)$$

kde  $l$  je součinitel dilatace (či kontrakce),  $l > 0$  a  $x$  je parametr translace  $x \in \mathbb{R}$ , jednotlivé wavelety jsou normalizovány pomocí  $L^2$ -normy. Ve Fourierově prostoru dostáváme vztah ekvivalentní vztahu (12.65):

$$\widehat{\psi}_{l,x}(\kappa) = \sqrt{l} \widehat{\psi}(l\kappa) e^{-i2\pi\kappa x}. \quad (12.66)$$

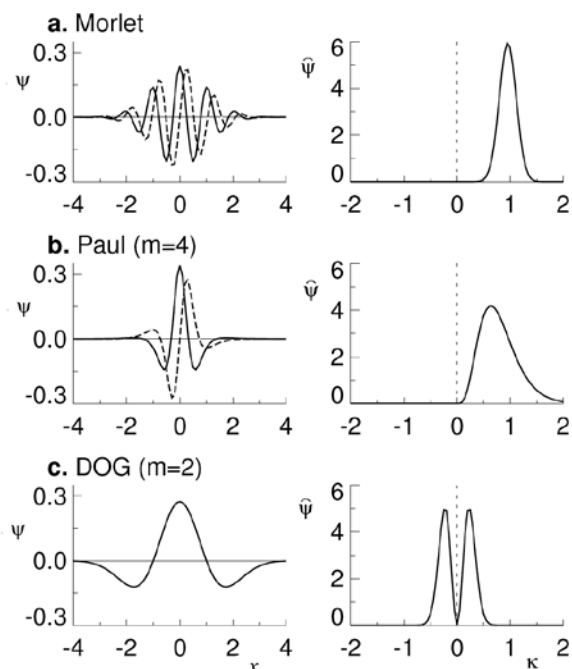
Zde kontrakce  $1/l$  odpovídá dilataci  $l$  a translaci  $x$  odpovídá rotaci v komplexní rovině.

Volba matečného waveletu má rozhodující význam pro vlastnosti transformace, zejména na její schopnost rozlišení v časové a spektrální oblasti.

Obecně můžeme wavelety rozdělit podle různých hledisek. Mohou to být čistě reálné funkce nebo funkce komplexní. Pomocí čistě reálných waveletů lze lokalizovat polohu částí

<sup>13</sup> též „vysvětlující funkce“

signálu, které jsou „podobné“ waveletu. U periodických funkcí se tato identifikace děje bez ohledu na fázové poměry. Pro detekci amplitudy se daleko lépe hodí komplexní wavelety, které umožňují nezávislé vyhodnocení amplitudy a fáze, u reálných waveletů jsou tyto informace kombinovány. Příklady reálných a komplexních waveletů vhodných pro analýzu pomocí spojitě waveletové transformace jsou na obr. 12.3, vždy vlevo je příslušný wavelet znázorněn ve fyzikálním prostoru a vpravo v prostoru Fourierově.



Obr. 12.3 – Příklady matečných waveletů

Morletův wavelet na obr. 12.3a je harmonická funkce modulovaná Gaussovou funkcí, jeho tvar v časové a frekvenční oblasti je

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{i\kappa_0 x} e^{-x^2/2}, \quad \hat{\psi}(\kappa) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \theta(\kappa) e^{-(\kappa-\kappa_0)^2/2}, \quad (12.67)$$

$\theta(\kappa)$  je Heavisideova funkce. Plnou čarou je znázorněna reálná část, přerušovanou potom část imaginární. Tento wavelet nesplňuje přesně podmínku „přípustnosti“ (12.62). Řád  $\kappa_0$  určuje lokalizaci v časové a frekvenční oblasti. Čím vyšší je hodnota  $\kappa_0$ , tím lépe je lokalizován ve frekvenční oblasti a hůře ve fyzikální a také lépe splňuje podmínku (12.62). Na obr. 12.3a je Morletův wavelet pro  $\kappa_0 = 6$ . Tento wavelet vykazuje poměrně dobrou lokalizaci ve Fourierově prostoru, horší ve fyzikálním.

Daleko lepší lokalizaci ve fyzikálním prostoru (a tedy horší ve Fourierově) má Paulův wavelet<sup>14</sup> na obr. 12.3b

$$\psi(x) = \frac{2^m m!}{\sqrt{\pi(2m)!}} \frac{i^m}{(1-ix)^{1+m}}, \quad \hat{\psi}(\kappa) = \frac{2^m}{\sqrt{m(2m-1)!}} \theta(\kappa) \kappa^m e^{-\kappa}. \quad (12.68)$$

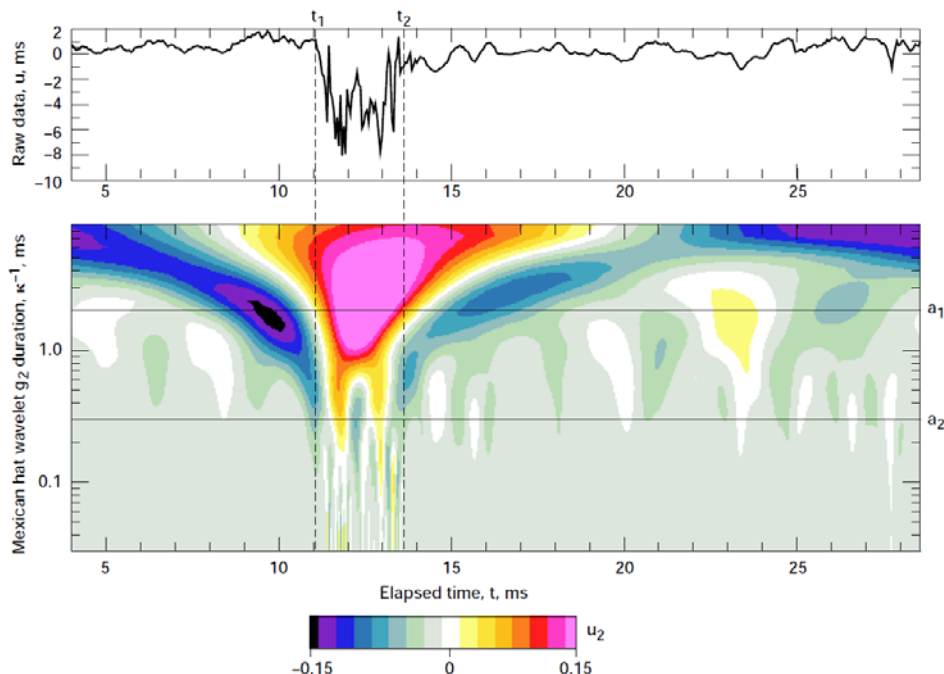
Z čistě reálných waveletů uvedeme  $m$ -tou derivaci Gaussovy funkce (DOG)

$$\psi(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} \left[ e^{-|x|^2/2} \right], \quad \hat{\psi}(\kappa) = m(i\kappa)^m e^{-|\kappa|^2/2}. \quad (12.69)$$

<sup>14</sup> Někdy označován jako „Cauchyho wavelet“.

Na obr. 12.3c je znázorněna druhá derivace Gaussovy funkce, jedná se o často používaný Marrův wavelet nazývaný též „mexický klobouk“ (angl.: *Mexican hat*).

Dále mohou wavelety při určitém způsobu dilatace a translace vytvářet úplnou bázi ortogonálních funkcí. Tuto vlastnost s výhodou využijeme u diskrétní waveletové transformace, kdy lze zpracovat téměř libovolnou funkci bez ztráty informace. Reprezentace v prostoru waveletových součinitelů je zpravidla daleko efektivnější než ve fyzikálním prostoru, proto lze waveletovou transformaci použít jako kompresní metodu.



Obr. 12.4 – Příklad waveletové analýzy intermitentního signálu

Na obr. 12.4 je uveden příklad waveletové analýzy intermitentního signálu v závislosti na čase  $t$ , který je uveden v horní části obrázku, dole je potom waveletová transformace,  $\tau$  je vlnová délka waveletu (logaritmická stupnice). Byl použit Marrův matečný wavelet.

### 12.4.9. Vlastní ortogonální dekompozice

Princip metody „vlastní ortogonální dekompozice“ (angl.: *Proper Orthogonal Decomposition – POD*) publikoval J.L. Lumley v roce 1967, její praktická aplikace je možná až v poslední době, kdy jsou k dispozici relevantní data a výpočetní technika. Metoda spočívá v projekci vhodné koherentní struktury na experimentálně získané pole rychlostí. Dominantní koherentní struktura maximalizuje tuto projekci ve smyslu minima čtverců odchylek. Variační úloha hledání maxima je převedena na řešení Fredholmovy integrální rovnice prvního typu. Řeší se potom problém vlastních funkcí a vlastních hodnot:

$$\sum_{j=1}^{n_c} \int_D \Psi_{ij}(y, y'; f) \hat{\Phi}^{*(n)}(y'; f) dy' = \lambda^{(n)}(f) \hat{\Phi}^{(n)}(y; f), \quad (12.70)$$

kde  $n_c$  je počet uvažovaných složek rychlosti. Symetrické jádro je korelační matice  $\Psi_{ij}(y, y'; f)$ , která je dána vzájemným spektrem složek rychlosti  $u_i$  a  $u_j$  a odpovídá Fourierově transformaci časo-prostorové korelace:

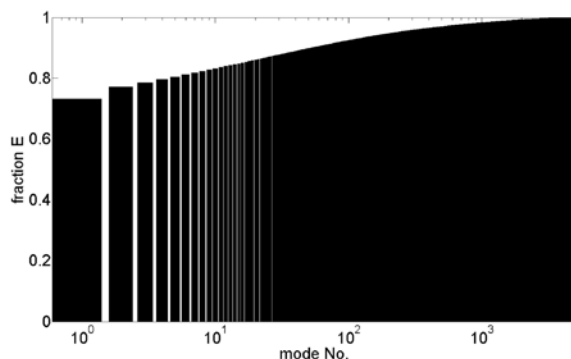
$$\Psi_{ij}(y, y'; f) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(y, t) u_j(y', t + \tau) \exp(-2i\pi f \tau) d\tau. \quad (12.71)$$

Lze dokázat, že existuje spočetné množství vlastních hodnot a vlastních funkcí problému. Ty jsou vzájemně ortogonální a vytvářejí úplnou bázi, pomocí které může být zcela rekonstruováno náhodné rychlostní pole. Jádro může být rozvedeno do stejnoměrně a absolutně

konvergentní řady vlastních funkcí, turbulentní kinetická energie je potom součtem příspěvků jednotlivých vlastních funkcí.

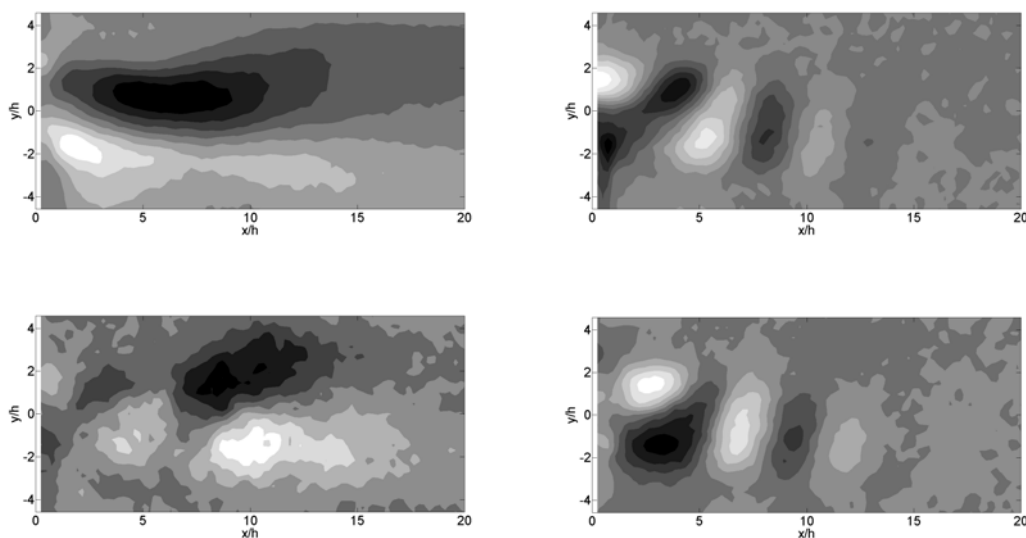
Při praktické aplikaci této metody se ukazuje, že pro dostatečně výstižný popis rychlostního pole postačuje uvažovat jen několik vlastních funkcí nejnižšího řádu.

Báze nalezená metodou POD může být s výhodou použita pro diskretizaci systému. Již při použití relativně malého počtu těchto funkcí lze efektivně modelovat systém a jeho dynamické chování. Máme potom co do činění s nízko-dimensionálním systémem.



Obr. 12.5 – Kumulativní energie vlastních funkcí

Jako příklad uvedeme výsledky experimentálního výzkumu proudění v okolí tzv. syntetizovaného paprsku pomocí metody PIV (*Particle Image Velocimetry*). Pro vyhodnocení pomocí metody POD bylo použito asi 5000 vektorových map rychlostního pole. Na obr. 12.5 je znázorněna kumulativní energie obsažená v jednotlivých vlastních funkcích, číslo módu – vlastní funkce na vodorovné ose je na logaritmické stupnici. Je vidět rychlá konvergence v energetickém smyslu, první vlastní funkce obsahuje asi 73 % a např. prvních 5 vlastních funkcí potom již více než 80 % celkové energie. Na obr. 12.6 jsou rozložení vířivosti 4 vlastních funkcí s největší energií. Paprsek je vytvářen generátorem, který má ústí v počátku souřadného systému na stěně, vzduch je vyfukován směrem doprava. Jsou zde zřetelné systémy vírových struktur v různých fázích vývoje.



Obr. 12.6 – Vlastní funkce

## 12.5. Zákony podobnosti

V mechanice tekutin jsou hojně používány zákony podobnosti.

Klíčovým bezrozměrným kritériem ve vztahu k turbulenci je Reynoldsovo číslo  $Re = UL/\nu$ , které charakterizuje proudění vazké tekutiny. Ukažme si nyní význam Reynoldsova čísla. Gradienty rychlosti  $\partial u / \partial x$  jsou řádu  $U/L$ , tedy složky rychlosti  $u$  vykazují změny řádu  $U$  na vzdálenostech řádu  $L$ . Dále, tyto derivace se typicky mění o hodnotu řádu  $U/L$  na vzdálenosti  $L$ , druhé derivace  $\partial^2 u / \partial x^2$  jsou tedy řádu  $U/L^2$ . Tímto způsobem lze provést řádový odhad absolutních členů N-S rovnice (4.20), kterou přepíšeme následujícím způsobem:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (12.72)$$

Výše popsaným způsobem odhadneme velikost některých členů:

$$\text{setrvačný člen:} \quad |(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}| = \mathcal{O}(U^2/L), \quad (12.73)$$

$$\text{vazký člen:} \quad |\nu \nabla^2 \mathbf{u}| = \mathcal{O}(\nu U/L^2). \quad (12.74)$$

Funkce  $\mathcal{O}(\cdot)$  představuje řádový odhad výrazu v závorce. Z těchto vztahů přímo vyplývá

$$\frac{|\text{setrvačný člen}|}{|\text{vazký člen}|} = \mathcal{O}\left(\frac{U^2/L}{\nu U/L^2}\right) = \mathcal{O}(Re). \quad (12.75)$$

Vidíme, že Reynoldsovo číslo udává řádový poměr mezi setrvačnými a vazkými silami při proudění reálné tekutiny. Zároveň nám jeho velikost dává představu o velikosti dvou klíčových členů N-S rovnice.

Uvažujme nejprve situaci, kdy je Reynoldsovo číslo velké, tedy  $Re \gg 1$ . Ze vztahu (12.75) můžeme usoudit, že vazké síly jsou v tomto případě z globálního hlediska zanedbatelné. Skutečně, například při obtékání těles za vysokých Reynoldsových čísel jsou vazké efekty ve většině oblasti proudění zanedbatelné s výjimkou tenké mezní vrstvy, kde jsou velké gradienty rychlosti. Tloušťka mezní vrstvy  $\delta$  závisí na Reynoldsově čísle:

$$\delta/L = \mathcal{O}(Re^{-1/2}). \quad (12.76)$$

Vysoká hodnota Reynoldsova čísla je nutnou podmínkou pro možnost aplikace nevazkých metod, jako jsou Eulerovy rovnice. Není to však podmínka postačující, v případě ztráty stability a přechodu do turbulence samozřejmě nevazký model nemůže platit.

Na obrázku 12.7 je srovnání dvou případů, které se liší Reynoldsovým číslem. V prvním případě se rovná o kapku dopadající na plochu, v druhém o výbuch jaderné pumy. Je vidět, že globální znaky jsou podobné, struktura je však naprosto odlišná.

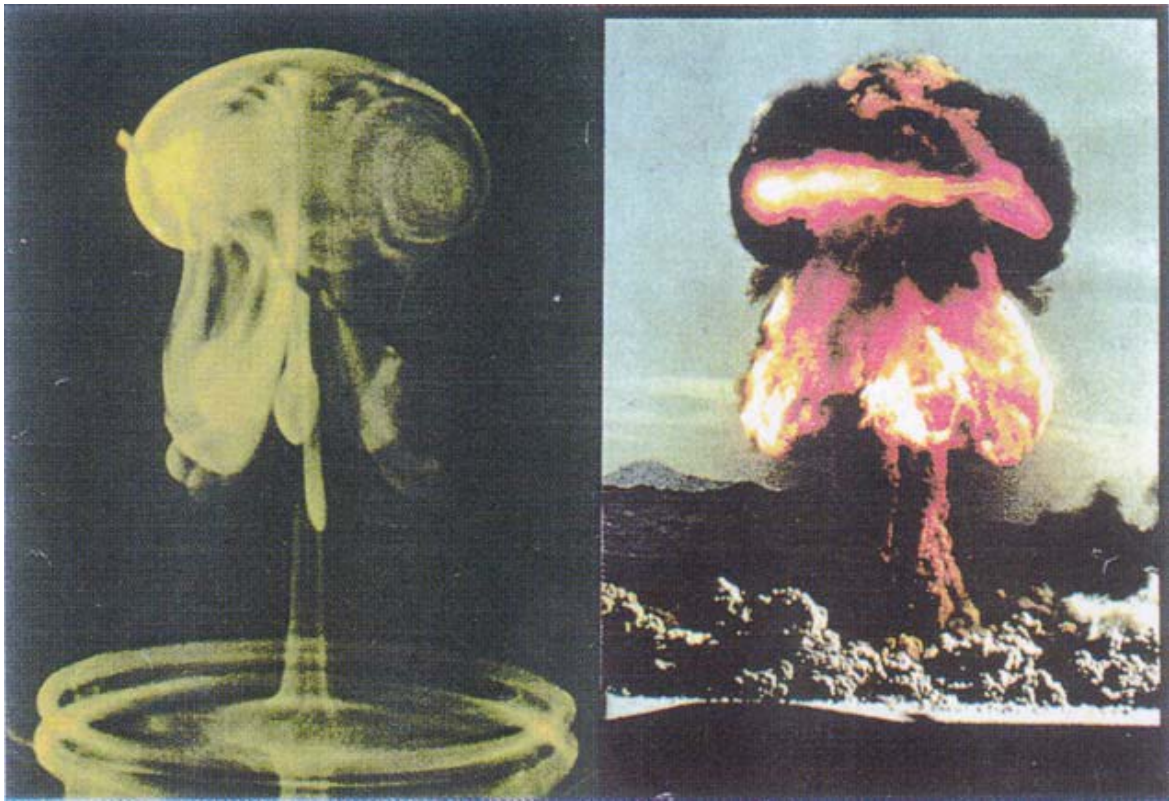


Image 12.7 – Comparing  $Re = 10^2$  (droplet) and  $10^9$  (Nevada nuclear experiment)

Dále uvádíme přehled některých podobnostních čísel používaných v dynamice tekutin.

<i>Název</i>	<i>Vzorec</i>	<i>Fyzikální význam</i>
Eulerovo číslo	$Eu = \Delta p / (\rho \cdot U^2)$ $\Delta p$ tlakový rozdíl $\rho$ hustota tekutiny $U$ charakteristická rychlost	Tlakový rozdíl vztahovaný na kinetickou energii.
Grashofovo číslo	$Gr = g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot l^3 / \nu^2$ $g$ gravitační zrychlení $\beta$ objemový součinitel teplotné roztažnosti $\Delta T$ teplotní rozdíl $l$ charakteristická délka $\nu$ kinematická vazkost	Poměr vztahových a vazkých sil.
Knudsenovo číslo	$Kn = \lambda / l$ $\lambda$ volná dráha molekul $l$ charakteristická délka	Proudění řídkých plynů.
Machovo číslo	$Ma = U / c$ $U$ charakteristická rychlost $c$ rychlost zvuku	Vliv stlačitelnosti tekutiny.
Nusseltovo číslo	$Nu = (h \cdot l) / \lambda$ $h$ součinitel přestupu tepla při vynucené konvekci $l$ charakteristická délka $\lambda$ tepelná vodivost	Přestup tepla mezi tělesem a tekutinou.
Prandtlovo číslo	$Pr = \nu / \alpha$ $\nu$ kinematická vazkost $\alpha$ tepelná difuzivita	Vazba rychlostního a teplotního pole.
Rayleighovo číslo	$Ra = Gr \cdot Pr$	Volná konvekce.
Reynoldsovo číslo	$Re = (U \cdot l) / \nu$ $U$ charakteristická rychlost $l$ charakteristická délka $\nu$ kinematická vazkost	Poměr setrvačných a vazkých sil.
Strouhalovo číslo	$St = (f \cdot d) / U$ $f$ frekvence $d$ charakteristický rozměr $U$ charakteristická rychlost	Podobnost periodických jevů v proudící tekutině.

## 12.6. Stručná historie výzkumu turbulence

Nyní uvedeme stručně některé historické mezníky ve výzkumu turbulence.

<i>Letopočet</i>	<i>Událost</i>
6. stol.př.n.l.	Hérakleitos z Efesu: „panta rhei“ (vše plyne – řecky), „Nevstoupíš dvakrát do téže řeky“ – vyjádření turbulentní povahy světa.
1. stol.př.n.l.	Epikurejci, první atomisté, Titus Lucretius Carus (římský básník), autor knihy „De rerum natura“ (O přírodě) – didakticko-epická báseň. Turbulence je zde představena jako mechanismus vzniku věcí.
15. století	Leonardo da Vinci rozpoznal dva stavy proudící tekutiny, zavádí termín „la turbulenza“.
1687	I. Newton formuluje základní zákony mechaniky.
1739	D. Bernoulli publikuje „Bernoulliho rovnici“.
1822	C.L. Navier odvodil hybnostní rovnice popisující chování vazké tekutiny.
1839	G.H.L. Hagen znovu „objevil“ dva stavy proudící tekutiny při proudění potrubím.
1871	Lord Kelvin (W. Thomson) studuje stabilitu laminárního proudění.
1877	J. Boussinesq zavádí ideu turbulentní vazkosti.
1883	O. Reynolds provádí své experimenty, výzkum přechodu proudění v trubce do turbulence. Zavádí Reynoldsovo číslo.
1887	Lord Kelvin zavádí termín „turbulence“.
1895	Reynoldsova dekompozice.
1904	L. Prandtl zavádí pojem „mezní vrstva“.
1907	W. Orr formuluje rovnici stability laminárního proudění.
1909	D. Riabuchinsky vynalezl metodu měření turbulentního proudění pomocí žhaveného drátku (režim konstantního proudu).
1912	J.T. Morris vynalezl metodu anemometrie s konstantní teplotou žhaveného drátku, ta umožňuje měření fluktuací rychlosti velmi vysokých frekvencí.
1914	A. Einstein navrhl použití kovariancí a vzájemných korelací pro studium signálů s fluktuacemi.
1914	E. Buckingham formuluje svůj pí-teorém, teoretický základ dimensionální analýzy.
1921, 1935	G.I. Taylor použil statistické metody pro zpracování turbulentních signálů.
1922	L.F. Richardson objevil hierarchii vírů (kaskádu) v turbulentním proudění.
1925	L. Prandtl zavádí pojem „směšovací délka“ jako charakteristiku fluktuací rychlosti.
1930	T. von Kármán formuluje „zákon stěny“ v turbulentní mezní vrstvě.
1938	G.I. Taylor objevil mechanismus generování vířivosti protahováním vírů.
1941	A.N. Kolmogorov formuluje teorii homogenní isotropní turbulence K41.
1942-6	J. von Neumann poprvé použil počítač pro úlohu z mechaniky tekutin (v rámci projektu Manhattan).
1943	S. Corsin objevil ostrou hranici mezi laminárními a turbulentními oblastmi.
1949	G. Batchelor a A. Townsend objevili intermitenci malých měřítek ve vyvinutém turbulentním proudění.
1951	H.W. Emmons popisuje skvrny turbulence.
1952	E. Hopf formuluje svou variační rovnici.
1952	T. Theodorsen vyslovuje hypotézu, že turbulentní proudové pole je tvořeno koherentními strukturami.
1962	A.N. Kolmogorov provádí korekci své teorie K41 na intermitenci malých měřítek – K62.

1963	E. Lorenz zavádí pojem „deterministický chaos“.
1967	S.J. Kline popisuje mechanismus generování Reynoldsových napětí pomocí mechanismu „bursting phenomenon“.
1975	B. Mandelbrot zavádí pojem fraktálu.
1977	I. Prigogin vypracoval teorii samoorganizace rozlehlých dynamických systémů.
1995	U. Frisch zavádí pro strukturu turbulentních oblastí pojem „multifraktál“.
2000	Prozkoumání základních vlastností Navierových-Stokesových rovnic vyhlášeno za jeden z matematických problémů pro 3. tisíciletí.



Vincent van Gogh, Hvězdnatá „turbulentní“ noc, 1889