Řešené příklady z lineární algebry - část 2

Příklad 2.1:
Určete determinant matice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & -8 & 8 & -3 \\ -4 & -5 & 9 & -7 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Řešení:
Determinant matice řádu 5 budeme počítat opakovaným použitím rozvoje determinantu podle vybraného řádku nebo sloupce. Aby byl náš výpočet "rozumný", potřebujeme nejdříve některý řádek či sloupec upravit tak, aby v něm zbývalo pouze jediné nenulové číslo. Při úpravách využijeme vlastnost determinantů, že determinant se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku, resp. sloupci, k-násobek tzv. pivotního řádku, resp. sloupce (Pivotní řádek, resp. sloupec musí být v nové matici nezměněn!).
Začneme úpravou, kdy k pátému řádku přičteme 1-násobek pivotního čtvrtého řádku, tím získáme řádek, který kromě tří nul má dva stejné prvky. Číslo -2 z pátého řádku tak můžeme vytknout.

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & -8 & 8 & -3 \\ -4 & -5 & 9 & -7 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 4 & -5 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & -8 & 8 & -3 \\ -4 & -5 & 9 & -7 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = (-2). \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & -8 & 8 & -3 \\ -4 & -5 & 9 & -7 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pátý řádek ještě upravíme tak, aby v něm zbylo jediné nenulové číslo. Jako pivotní využijeme první sloupeček, prvek $a_{51} = 1$, pomocí něhož získáváme zbylou nulu v pátém řádku, se nazývá pivotní prvek. Ke čtvrtému sloupci přičteme (-1) - násobek pivotního prvního sloupce. Pro takto upravený determinant provedeme rozvoj determinantu podle posledního pátého řádku, jediný nenulový prvek $a_{51} = 1$ vynásobíme příslušným algebraickým doplňkem $D_{51} = (-1)^{5+1}.A_{51}$, kde A_{51} je determinant z matice, která vznikne vynecháním pátého řádku a prvního sloupce.

$$\det \mathbf{A} = (-2).\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 5 & 5 & -8 & 3 & -3 \\ -4 & -5 & 9 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (-2).1.(-1)^{5+1}.\det \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & -2 \\ 5 & -8 & 3 & -3 \\ -5 & 9 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Nyní by zřejmě bylo vhodné zvolit si za pivotní prvek některou z jedniček, které jsou v poslední matici ve třetím sloupci, a dále postupovat analogicky, tj. přičtením vhodných násobků pivotního řádku k ostatním získat ve třetím sloupci tři nulové prvky. Výhodnější ale bude úprava, při které ke třetímu řádku přičteme 1-násobek pivotního druhého řádku, získáme tak řádek, kde jsou již dvě nuly a pouze dvě jedničky. Jediný nenulový prvek zůstame v tomto řádku po úpravě neměnící determinant, kdy např. ke druhému sloupci přičteme (-1) - násobek pivotního čtvrtého sloupce. Pak provedeme rozvoj determinantu podle třetího řádku.

$$\det \mathbf{A} = (-2).\det \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & -2 \\ 5 & -8 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \end{bmatrix} = (-2).\det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 5 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= (-2).1.(-1)^{3+4}.\det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pro další rozvoj si připravíme např. poslední třetí sloupec: k prvnímu řádku přičteme (-1) - násobek pivotního třetího řádku a ke druhému řádku přičteme (-3) - násobek pivotního třetího řádku. Tak zbyde v rozvoji podle třetího sloupce jediný nenulový sčítanec.

$$\det \mathbf{A} = (-2).(-1).\det \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2.1.(-1)^{3+3}.\det \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Dříve než spočítáme poslední determinant z matice řádu 2, můžeme ještě z druhého řádku vytknout číslo -2. Determinant z matice řádu 2 je roven součinu prvků na hlavní diagonále minus součin prvků na vedlejší diagonále.

$$\det \mathbf{A} = 2.(-2).\det \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = (-4).(-1+4) = -12$$

Příklad 2.2:
Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -5 & 4 & -7 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Určete matici $\mathbf{X}$, pro kterou je splněna maticová rovnice $\mathbf{X}.\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Řešení:
Při řešení maticových rovnic využíváme inverzní matice. Podle definice je inverzní maticí k matici $\mathbf{A}$ matice $\mathbf{A}^{-1}$, pro kterou platí $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ a zároveň $\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Proto vynásobíme-li maticovou rovnici z vhodné strany inverzní maticí k matici $\mathbf{A}$, získáme tak na levé straně součin matice $\mathbf{X}$ a jednotkové matice I, který je již nezávisle na pořadí násobených matic vždy roven matici $\mathbf{X}$.
V našem případě vynásobíme maticovou rovnici maticí $\mathbf{A}^{-1}$ **zprava**:

$$\mathbf{X}.\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{X}.\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}.\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{X}.\mathbf{I} = \mathbf{B}.\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}.\mathbf{A}^{-1}$$

Pořadí násobení matic musíme hlídat, neboť násobení matic je operace, která **není** komutativní!!!
K určení matice inverzní k matici $\mathbf{A}$ řádu 3 můžeme použít dvě metody: Gauss-Jordanovu eliminační metodu nebo výpočet inverzní matice s využitím determinantů. Ukažme si postupně obě metody.

1. Gauss-Jordanova eliminační metoda

Univerzální metodou k nalezení inverzní matice je Gauss-Jordanova eliminační metoda. K matici $\mathbf{A}$ přidáme jednotkovou matici $\mathbf{I}$ (stejného řádu) a tuto rozšířenou matici upravujeme pomocí elementáních řádkových úprav tak, aby z původní matice $\mathbf{A}$ vznikla jednotková matice. Týmiž řádkovými úpravami vznikne přitom z původně jednotkové matice $\mathbf{I}$ matice $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní k matici $\mathbf{A}$:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \sim \ldots \sim [\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}] \,.$$

Elementární řádkové úpravy jsou:

- vzájemná výměna dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovým číslem,
- přičtení k-násobku jednoho řádku (tzv. pivotního řádku) k jinému řádku.

Napíšeme rozšířenou matici k naší matici $\mathbf{A}$. V první fázi úprav využijeme první řádek (začínající jedničkou) jako pivotní řádek a přičtením jeho 2-násobku ke druhému řádku a (-1)-násobku ke třetímu řádku získáme požadovaný tvar prvního sloupce.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dále upravíme první část matice na horní trojúhelníkovou matici. Poslední chybějící nulu pod diagonálou získáme tak, že ke třetímu řádku matice přičteme 3-násobek druhého řádku, což je pivotní řádek pro tuto fázi úprav. Protože na diagonále ještě nejsou všechny prvky rovny jedničce, musíme třetí řádek vynásobit číslem $\frac{1}{5}$.

$$\ldots \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Zbývá ještě získat nuly i nad diagonálou, obvykle se začíná od posledního sloupce. Pivotním řádkem bude třetí řádek, k prvnímu i druhému řádku přičteme jeho (-2)-násobek.

$$\ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & -\frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

V poslední právě provedené úpravě jsme k prvnímu řádku matice přičetli 1-násobek druhého řádku, tím první část námi upravované matice je již jednotková, za svislou čárou je tedy matice $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní k matici $\mathbf{A}$ ze zadání:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} . \begin{bmatrix} -5 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} .$$

2. Výpočet s využitím determinantů
Inverzní matici lze určit též pomocí determinantů, a sice inverzní matici získáme jako násobek adjungované matice k matici $\mathbf{A}$ převrácenou hodnotou jejího determinantu. Přirozený požadavek na nenulovost determinantu matice $\mathbf{A}$ je u regulární matice samozřejmě splněn.

   Spočítejme proto determinant matice $\mathbf{A}$, např. s využitím rozvoje podle prvního sloupce poté, co tento sloupec předem upravíme tak, že ke druhému řádku přičteme 2-násobku prvního řádku a ke třetímu řádku přičteme (-1)-násobek prvního řádku.

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= 1.(-1)^{1+1}. \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = -1 + 6 = 5$$

   Adjugovanou maticí $\mathbf{A}^A$ k matici $\mathbf{A}$ je matice transponovaná k matici algebraických doplňků. Algebraický doplněk k prvku a_{ij} je

$$D_{ij} = (-1)^{i+j}. \det A_{ij} ,$$

   kde $\det A_{ij}$ značí determinant z matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ po vynechání i-tého řádku a j-tého sloupce. Tomuto determinantu se někdy říká subdeterminant matice $\mathbf{A}$ k prvku a_{ij}. Tedy algebraický doplněk k prvku a_{11} je

$$D_{11} = (-1)^{1+1}.\det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = 3 - 8 = -5 \ ,$$

algebraickým doplňkem k prvku a_{12} je

$$D_{12} = (-1)^{1+2}.\det \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (-1).(-2+2) = 0 \ ,$$

a podobně je

$$D_{13} = (-1)^{1+3}.\det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = 8 - 3 = 5$$

algebraický doplněk k prvku a_{13}. Tyto algebraické doplňky k prvkům prvního řádku matice $\mathbf{A}$ tvoří postupně první sloupec adjungované matice $\mathbf{A}^A$. Analogicky určíme i algebraické doplňky ke zbylým prvkům matice, algebraické prvky k prvkům druhého řádku matice $\mathbf{A}$ zapíšeme do druhého sloupce matice $\mathbf{A}^A$, algebraické prvky k prvkům třetího řádku pak do třetího sloupce matice $\mathbf{A}^A$. Snadno tak můžeme dopočítat inverzní matici k matici $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}.\mathbf{A}^A = \frac{1}{5}.\begin{bmatrix} -5 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 5 & +3 & 1 \end{bmatrix} .$$

Výpočet inverzní matice pomocí determinantů je výhodný u matic řádu 2 a 3, kde lze algabraické doplňky počítat zpaměti. Pro matice vyššího řádu je již lepší použít Gauss-Jordanovu eliminační metodu.

Hledanou matici $\mathbf{X}$ nalezneme jako součin matic $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}^{-1}$ (Pozor, násobení musí být provedeno ve správném pořadí!):

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}.\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -5 & 4 & -7 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix} . \frac{1}{5}. \begin{bmatrix} -5 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}.\begin{bmatrix} 15 & 5 & -5 \\ -10 & 10 & 5 \\ 15 & 35 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} .$$

Poznámka:
V případě, že nedodržíme pořadí násobených matic, získáme ale jinou matici:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{B} = \frac{1}{5}.\begin{bmatrix} -5 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 5 & +3 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -5 & 4 & -7 \\ -6 & -2 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}.\begin{bmatrix} 59 & -40 & 46 \\ 17 & 0 & 13 \\ -21 & 30 & -9 \end{bmatrix}.$$

Tato matice by byla řešením maticové rovnice $\mathbf{A}.\mathbf{Y} = \mathbf{B}$, ovšem **není** řešením rovnice $\mathbf{X}.\mathbf{A} = \mathbf{B}$. .