Řešené příklady z lineární algebry - část 3

Typové příklady s řešením

Příklad 3.1:
Zobrazení $\mathbf{L}: \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbf{R}_{2,3}$ je zobrazení z prostoru $\mathcal{P}_3$ všech polynomů do stupně 3 (včetně nulového polynomu) do prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ všech matic typu 2/3 :

$$\mathbf{L}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} a + 2b, & -a + b + d, & 2a + 7b + d \\ 0, & 3b + d, & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Ověřte, že zobrazení $\mathbf{L}$ je lineární zobrazení.
2. Určete jádro Ker$\mathbf{L}$ zobrazení $\mathbf{L}$, tj. nalezněte alespoň jednu jeho bázi a určete jeho dimenzi.
3. Podobně určete obraz Im$\mathbf{L}$ zobrazení $\mathbf{L}$.
4. Určete matici $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ v kanonické bázi

   $$p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$$

   prostoru $\mathcal{P}_3$ a kanonické báze

   $$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   $$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.
5. Pro polynom $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ nalezněte obraz $\mathbf{L}(p(x))$ a souřadnice $\widehat{p(x)}$ a $\widehat{\mathbf{L}(p)}$ vzhledem k příslušným kanonickým bázím p_1, p_2, p_3, p_4 prostoru $\mathcal{P}_3$ a $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$. Ověřte, že platí $\mathbf{M}.\widehat{p(x)} = \widehat{\mathbf{L}(p)}$.
6. Určete matici $\widetilde{\mathbf{M}}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ vzhledem k bázím

   $$q_1(x) = x^3 - 3x^2, q_2(x) = x^2 + x + 1, q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

   $$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

v prostoru $\mathcal{P}_3$,

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.

7. Pro polynom $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ známe obraz $\mathbf{L}(p(x))$ (viz výše). Nalezněte souřadnice $\widetilde{p(x)}$ a $\widetilde{\mathbf{L}(p)}$ vzhledem k bázím q_1, q_2, q_3, q_4 prostoru $\mathcal{P}_3$ a $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$. Ověřte, že platí $\widetilde{\mathbf{M}}.\widetilde{p(x)} = \widetilde{\mathbf{L}(p)}$.

Řešení:

1. Zobrazení $\mathbf{L}$:$\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ lineárního prostoru $\mathcal{U}$ do lineárního prostoru $\mathcal{V}$ je lineární, pokud obrazem součtu dvou libovolných prvků $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ z prostoru $\mathcal{U}$ je součet obrazů $\mathbf{L}(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{L}(\mathbf{u}_2)$ těchto prvků a obrazem λ-násobku libovolného prvku $\mathbf{u}$ z prostoru $\mathcal{U}$ pro libovolný prvek λ z tělesa $\mathbf{R}$ reálných čísel je λ-násobek obrazu $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ tohoto prvku:

$$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U} : \mathbf{L}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathbf{L}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{L}(\mathbf{u}_2)\,,$$

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \forall \lambda \in \mathbf{R} : \mathbf{L}(\lambda.\mathbf{u}) = \lambda.\mathbf{L}(\mathbf{u})\,.$$

Označme proto $p_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, p_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2$ dva libovolné polynomy z prostoru $\mathcal{P}_3$ a určeme obraz jejich součtu:

$$\mathbf{L}((p_1 + p_2)(x)) = \mathbf{L}((a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x^2 + (c_1 + c_2)x + (d_1 + d_2)) =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2), & -(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (d_1 + d_2), & 2(a_1 + a_2) + 7(b_1 + b_2) + (d_1 + d_2) \\ 0, & 3(b_1 + b_2) + (d_1 + d_2), & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + 2b_1 + 2b_2, & -a_1 - a_2 + b_1 + b_2 + d_1 + d_2, & 2a_1 + 2a_2 + 7b_1 + 7b_2 + d_1 + d_2 \\ 0, & 3b_1 + 3b_2 + d_1 + d_2, & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + 2b_1, & -a_1 + b_1 + d_1, & 2a_1 + 7b_1 + d_1 \\ 0, & 3b_1 + d_1, & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} a_2 + 2b_2, & -a_2 + b_2 + d_2, & 2a_2 + 7b_2 + d_2 \\ 0, & 3b_2 + d_2, & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{L}(p_1(x)) + \mathbf{L}(p_2(x)).$$

Využili jsme pouze pravidla platná pro počítání v lineárním prostoru, resp. pro počítání v tělese reálných čísel, a snadno jsme ukázali, že **obrazem součtu** libovolných dvou polynomů **je součet obrazů** těchto polynomů.

Dále uvažujme libovolný polynom $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ z prostoru $\mathcal{P}_3$ a libovolné reálné číslo λ a určeme obraz λ -násobku tohoto polynomu:

$$\mathbf{L}((\lambda.p)(x)) = \mathbf{L}(\lambda.ax^3 + \lambda.bx^2 + \lambda.cx + \lambda.d) =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda.a + 2\lambda.b, & -\lambda.a + \lambda.b + \lambda.d, & 2\lambda.a + 7\lambda.b + \lambda.d \\ 0, & 3\lambda.b + \lambda.d, & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} a + 2b, & -a + b + d, & 2a + 7b + d \\ 0, & 3b + d, & 0 \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{L}(p(x)).$$

Také nyní jsme snadno ukázali, že **obrazem násobku** polynomu **je násobek obrazu** polynomu pro libovolný polynom a libovolné číslo z tělesa reálných čísel.

Obě podmínky z definice lineárního zobrazení jsou splněny, zadané zobrazení $\mathbf{L}$ je tedy lineární.

2. Jádro lineárního zobrazení $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ tvoří ty prvky prostoru $\mathcal{U}$, kterým lineární zobrazení $\mathbf{L}$ jako obraz přiřadí nulový prvek prostoru $\mathcal{V}$:

   $$\mathrm{Ker}\mathbf{L} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U}; \mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}.$$

   Protože se jedná o podprostor, k jeho určení stačí nalézt alespoň jednu bázi.

   Pro naše zadání tedy hledáme podprostor všech polynomů, jejichž obrazem je nulová matice $\mathbf{0}$ typu 2/3, tj. nulový prvek prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$:

   $$\mathrm{Ker}\mathbf{L} = \{p(x) \in \mathcal{P}_3; \mathbf{L}(p(x)) = \mathbf{0}\}\ .$$

   Ptáme se tedy, co musí platit pro polynom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, jehož obrazem je nulová matice:

   $$\mathbf{L}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} a+2b, & -a+b+d, & 2a+7b+d \\ 0, & 3b+d, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aby se dvě matice rovnaly, musí se rovnat jejich prvky na odpovídajících si pozicích. To znamená, že musí být splněny rovnice následující soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & & & = & 0\,, \\ -a & + & b & + & d & = & 0\,, \\ 2a & + & 7b & + & d & = & 0\,, \\ & & 3b & + & d & = & 0\,. \end{array}$$

Potřebujeme tedy vyřešit soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých a, b, c, d . Uvědomme si, že koeficient c je také hledanou neznámou, třebaže se ve výše uvedených rovnicích nevyskytuje. Soustava bude mít zřejmě nekonečně mnoho řešení. K jejich určení použijeme Gaussovu eliminační metodu, pomocí řádkově ekvivalentních úprav upravíme matici soustavy na stupňovitý tvar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matice řešené soustavy má hodnost 2, rozdíl mezi počtem neznámých a hodností matice soustavy $4 - 2 = 2$ nám dává informaci o dimenzi podprostoru všech řešení soustavy, a tím i o počtu neznámých, které můžeme libovolně volit. Zřejmě kromě koeficientu c můžeme ještě libovolně zvolit i další koeficient, vyberme koeficient b. Potom musí být $a = -2b$ a $d = -3b$.

Jádro Ker$\mathbf{L}$ zobrazení $\mathbf{L}$ tak tvoří všechny polynomy tvaru $p(x) = -2bx^3 + bx^2 + cx - 3b = b.(-2x^3 + x^2 - 3) + c.x = b.r_1(x) + c.r_2(x)$, kde $r_1(x) = -2x^3 + x^2 - 3, r_2(x) = x$. Po jednoduché úpravě jsme dostali lineární kombinaci dvou polynomů $r_1(x)$ a $r_2(x)$, které jsou zřejmě lineárně nezávislé. Jednou možnou bází jádra Ker$\mathbf{L}$ jsou proto polynomy $r_1(x) = -2x^3 + x^2 - 3$ a $r_2(x) = x$. Dimenze jádra zobrazení $\mathbf{L}$ je proto rovna dvěma:

$$\dim(\mathrm{Ker}\mathbf{L}) = 2.$$

3. Obraz Im$\mathbf{L}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ tvoří všechny prvky prostoru $\mathcal{V}$, které jsou lineárním zobrazením $\mathbf{L}$ přiřazeny jako obraz nějakému prvku z prostoru $\mathcal{U}$:

$$\mathrm{Im}\mathbf{L} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}; \exists \mathbf{u} \in \mathcal{U} : \mathbf{v} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\}.$$

Protože se i nyní jedná o podprostor, k jeho určení stačí nalézt alespoň jednu bázi.

Otázkou je, jak najít generátory podprostoru Im$\mathbf{L}$. Je-li v prostoru $\mathcal{U}$ zvolena libovolná báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, lze každý prvek $\mathbf{u}$ prostoru $\mathcal{U}$ vyjádřit jako lineární kombinaci bázových prvků:

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n.$$

Potom díky linearitě zobrazení $\mathbf{L}$ je obraz $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ prvku $\mathbf{u}$ vyjádřen jako lineární kombinace obrazů prvků báze prostoru $\mathcal{U}$:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n) = c_1\mathbf{L}(\mathbf{u}_1) + c_2\mathbf{L}(\mathbf{u}_2) + \ldots + c_n\mathbf{L}(\mathbf{u}_n).$$

Obrazy bázových prvků $\mathbf{L}(\mathbf{u}_1), \mathbf{L}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{L}(\mathbf{u}_n)$ báze prostoru $\mathcal{U}$ jsou proto hledanými generátory podprostoru Im$\mathbf{L}$. (Nejedná se ještě o hledanou bázi, obrazy $\mathbf{L}(\mathbf{u}_1), \mathbf{L}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{L}(\mathbf{u}_n)$ totiž nemusí být lineárně nezávislé!)

Určeme nyní generátory Im$\mathbf{L}$ pro naše zobrazení $\mathbf{L}$. V prostoru polynomů $\mathcal{P}_3$ tvoří nejjednodušší bázi (tzv. kanonickou) mocninné funkce

$$p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1.$$

Obrazy těchto polynomů generují podprostor Im$\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L}(p_1(x)) = \mathbf{L}(x^3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1,$$

$$\mathbf{L}(p_2(x)) = \mathbf{L}(x^2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2,$$

$$\mathbf{L}(p_3(x)) = \mathbf{L}(c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{L}(p_4(x)) = \mathbf{L}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_3.$$

Tato skupina všech čtyř matic je zcela jistě lineárně závislá, neboť se v ní vyskytuje nulová matice $\mathbf{0}$, což je nulový prvek prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$. Proto z dalších úvah nulovou matici $\mathbf{0}$ vynecháme a ptáme se, zda zbylé matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ jsou lineárně nezávislé. Položme proto lineární kombinaci těchto matic rovnu nulové matici a ptejme se, pro jaké koeficienty je tato rovnost splněna.

$$c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 + c_3\mathbf{A}_3 = \mathbf{0}$$

$$c_1\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2 & 1 & 7\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}c_1+2c_2, & -c_1+c_2+c_3, & 2c_1+7c_2+c_3\\ 0, & 3c_2+c_3, & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Rovnost matic vyžaduje, aby byly splněny rovnice následující soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & 2c_2 & & & = & 0\,,\\ -c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 0\,,\\ 2c_1 & + & 7c_2 & + & c_3 & = & 0\,,\\ & & 3c_2 & + & c_3 & = & 0\,. \end{array}$$

Řešíme soustavu čtyř rovnic o třech neznámých. Použijeme Gaussovu eliminační metodu a pomocí řádkově ekvivalentních úprav upravíme matici soustavy na stupňovitý tvar.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 7 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Hodnost matice soustavy je 2, je tedy menší než počet neznámých. Soustava má proto nekonečně mnoho řešeních. Zvolíme-li libovolně c_2 reálné, musí být $c_1 = -2c_2, c_3 = -3c_2$. Jedno konkrétní netriviální řešení dostaneme např. pro $c_2 = 1$, pak musí být $c_1 = -2$ a $c_3 = -3$. Známe tedy netriviální lineární kombinaci matic, která se rovná nulové matici:

$$-2\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - 3\mathbf{A}_3 = \mathbf{0}\ .$$

Odtud můžeme např. matici $\mathbf{A}_2$ vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících dvou matic: $\mathbf{A}_2 = 2\mathbf{A}_1 + 3\mathbf{A}_3$. Matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ jsou lineárně závislé. Pokud vynecháme matici $\mathbf{A}_2$, je již lineární nezávislost zbylých dvou matic $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3$ zřejmá. Máme tak dvojici lineárně nezávislých generátorů obrazu Im$\mathbf{L}$ zobrazení $\mathbf{L}$, matice $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ tvoří jednu bázi podprostoru Im$\mathbf{L}$. Dimenze obrazu Im$\mathbf{L}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ je proto dvě:

$$\dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = 2\ .$$

Poznámka: Zatím jsme ukázali výpočet, který vůbec nevyužil faktu, že jsme již dříve určili jádro lineárního zobrazení Ker$\mathbf{L}$. Víme totiž, že pro lineární zobrazení $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ musí platit:

$$\dim(\mathrm{Ker}\mathbf{L}) + \dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = \dim \mathcal{U}.$$

Pro naše zobrazení $\mathbf{L}: \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbf{R}_{2,3}$ tedy musí být:

$$\dim(\mathrm{Ker}\mathbf{L}) + \dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = \dim \mathcal{P}_3.$$

Po dosazení dimenze jádra a dimenze prostoru $\mathcal{P}_3$ má tato rovnost tvar

$$2 + \dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = 4,$$

odkud rovnou dostaneme hledanou dimenzi obrazu $\dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = 2$.

Tato informace by zjednodušila hledání báze obrazu Im$\mathbf{L}$ zobrazení $\mathbf{L}$. Ze skupiny generátorů by stačilo vybrat dvě lineárně nezávislé matice a nemuseli bychom zkoumat lineární nezávislost všech generátorů. Výše uvedený výpočet je ale návodem, jak určit obraz lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ bez předchozí znalosti jádra lineárního zobrazení $\mathbf{L}$, je tedy obecnější.

4. Matice $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ v zadaných bázích $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ prostoru $\mathcal{U}$ a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ prostoru $\mathcal{V}$ je taková matice, která vystihuje vztah mezi souřadnicovým vektorem $\hat{\mathbf{u}}$ libovolného prvku $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ a souřadnicovým vektorem $\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u})}$ jeho obrazu $\mathbf{L}(\mathbf{u})$: $\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u})} = \mathbf{M}.\hat{\mathbf{u}}$.

   Hledáme-li matici $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ při daných bázích, najdeme nejdříve obrazy $\mathbf{L}(\mathbf{u}_i)$ všech prvků báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ prostoru $\mathcal{U}$ a pak určíme souřadnicové vektory $\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_i)}$ těchto obrazů vzhledem k bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ prostoru $\mathcal{V}$. Tyto souřadnicové vektory $\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_i)}$ jsou pak sloupce hledané matice $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \left[\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_1)} | \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_2)} | \ldots | \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_n)}\right] .$$

   Vraťme se tedy k našemu zadání. V prostoru $\mathcal{P}_3$ máme kanonickou bázi $p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$. Obrazy těchto polynomů jsou matice:

$$\mathbf{L}(p_1(x)) = \mathbf{L}(x^3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(p_2(x)) = \mathbf{L}(x^2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(p_3(x)) = \mathbf{L}(c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{L}(p_4(x)) = \mathbf{L}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Protože i v prostoru matic $\mathbf{R}_{2,3}$ je uvažována kanonická báze

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

můžeme snadno určit souřadnice obrazů $\mathbf{L}(p_i(x))$ vzhledem k této bázi. Pro obraz $\mathbf{L}(p_1(x))$ polynomu $p_1(x)$ platí

$$\mathbf{L}(p_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 1.\mathbf{C}_1 + (-1).\mathbf{C}_2 + 2.\mathbf{C}_3 + 0.\mathbf{C}_4 + 0.\mathbf{C}_5 + 0.\mathbf{C}_6,$$

proto

$$\widehat{\mathbf{L}(p_1)} = [1, -1, 2, 0, 0, 0]^T,$$

a podobně

$$\widehat{\mathbf{L}(p_2)} = [2, 1, 7, 0, 3, 0]^T,$$
$$\widehat{\mathbf{L}(p_3)} = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T,$$
$$\widehat{\mathbf{L}(p_4)} = [0, 1, 1, 0, 1, 0]^T.$$

Tyto souřadnicové vektory jsou sloupce hledané matici $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \left[\widehat{\mathbf{L}(p_1)}|\widehat{\mathbf{L}(p_2)}|\widehat{\mathbf{L}(p_3)}|\widehat{\mathbf{L}(p_4)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Ověřme, že platí $\mathbf{M}.\widehat{p(x)} = \widehat{\mathbf{L}(p)}$ pro polynom $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$.

   Souřadnicový vektor $\widehat{p(x)}$ vzhledem ke kanonické bázi $p_1(x) = x^3$, $p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$ v prostoru $\mathcal{P}_3$ je $\widehat{p(x)} = [5, -4, 6, -1]^T$, protože polynom $p(x)$ snadno vyjádříme jako lineární kombinaci bázových prvků $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1 = 5.p_1(x) + (-4).p_2(x) + 6.p_3(x) + (-1).p_4(x)$ a koeficienty v této lineární kombinaci jsou právě hledané souřadnice polynomu $p(x)$.

Obrazem $\mathbf{L}(p(x))$ polynomu $p(x)$ je matice

$$\mathbf{L}(p(x)) = \mathbf{L}(5x^3 - 4x^2 + 6x - 1) = \begin{bmatrix} -3 & -10 & -19 \\ 0 & -13 & 0 \end{bmatrix}.$$

V prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ je také dána kanonická báze

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obraz $\mathbf{L}(p(x))$ polynomu $p(x)$ proto vyjádříme snadno jako lineární kombinaci prvků této báze :

$$\mathbf{L}(p(x)) = \begin{bmatrix} -3 & -10 & -19 \\ 0 & -13 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (-3).\mathbf{C}_1 + (-10).\mathbf{C}2 + (-19).\mathbf{C}_3 + 0.\mathbf{C}_4 + (-13).\mathbf{C}_5 + 0.\mathbf{C}_6.$$

Souřadnicový vektor $\widehat{\mathbf{L}(p)}$ obrazu $\mathbf{L}(p(x))$ je:

$$\widehat{\mathbf{L}(p)} = [-3, -10, -19, 0, -13, 0]^T.$$

Potom je

$$\mathbf{M}.\widehat{p(x)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \\ -19 \\ 0 \\ -13 \\ 0 \end{bmatrix} = \widehat{\mathbf{L}(p)}.$$

Pro daný polynom $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ jsme tímto výpočtem ověřili platnost vztahu

$$\mathbf{M}.\widehat{p(x)} = \widehat{\mathbf{L}(p)}.$$

6. Hledáme matici $\widetilde{\mathbf{M}}$ lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ vzhledem k bázím

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2, q_2(x) = x^2 + x + 1, q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

v prostoru $\mathcal{P}_3$ a

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.

Postup je samozřejmě analogický jako v případě kanonických bází, pouze nás čekají složitější výpočty souřadnicových vektorů. V prostoru $\mathcal{P}_3$ tvoří bázi polynomy $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$. Matice $\widetilde{\mathbf{M}}$, kterou chceme určit, bude mít za sloupce souřadnicové vektory $\widetilde{\mathbf{L}(q_i)}$ obrazů $\mathbf{L}(q_i(x))$ polynomů $q_i(x), i = 1, 2, 3, 4$, vzhledem k bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$:

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \left[\widetilde{\mathbf{L}(q_1)}|\widetilde{\mathbf{L}(q_2)}|\widetilde{\mathbf{L}(q_3)}|\widetilde{\mathbf{L}(q_4)}\right].$$

Vezměme první prvek $q_1(x) = x^3 - 3x^2$ z báze prostoru $\mathcal{P}_3$. Jeho obrazem v lineárním zobrazení $\mathbf{L}$ je matice

$$\mathbf{L}(q_1(x)) = \mathbf{L}(x^3 - 3x^2) = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -19 \\ 0 & -9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potřebujeme určit souřadnice této matice vzhledem k bázi
$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$, tj. potřebujeme najít koeficienty v lineární kombinaci bázových prvků $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$, která se rovná právě matici $\mathbf{L}(q_1(x))$:

$$c_1.\mathbf{B}_1 + c_2.\mathbf{B}_2 + c_3.\mathbf{B}_3 + c_4.\mathbf{B}_4 + c_5.\mathbf{B}_5 + c_6.\mathbf{B}_6 = \mathbf{L}(q_1(x))$$

$$c_1.\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2.\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3.\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+c_4.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + c_5.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_6.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -4 & -19 \\ 0 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 - c_2 + c_3 + c_4, & -c_1 - c_3 + c_5 + c_6, & c_1 + c_5 \\ c_2 - c_4 + c_5 - c_6, & c_2 + c_3, & c_3 + c_4 - c_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -4 & -19 \\ 0 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

Aby platila rovnost těchto matic, musí být splněny všechny rovnice následující soustavy lineárních algebraických rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
c_1 & - & c_2 & + & c_3 & + & c_4 & & & & & = & -5\,, \\
-c_1 & & & - & c_3 & & & + & c_5 & + & c_6 & = & -4\,, \\
c_1 & & & & & & & + & c_5 & & & = & -19\,, \\
 & & c_2 & & & - & c_4 & + & c_5 & - & c_6 & = & 0\,, \\
 & & c_2 & + & c_3 & & & & & & & = & -9\,, \\
 & & & & c_3 & + & c_4 & & & - & c_6 & = & 0\,.
\end{array}$$

K vyřešení soustavy využijeme jako obvykle Gaussovu eliminační metodu. Pomocí elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy na stupňovitý tvar.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -5 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -4 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -19 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -5 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -9 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -14 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -5 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 9 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -23 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -9 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -18 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -5 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 9 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -23 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -18
\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -5 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 9 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -23 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -18 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 27
\end{array}\right]$$

Z posledního řádku vidíme, že $c_6 = -\frac{27}{4}$, dosazováním do dalších rovnic postupně dostaneme $c_5 = -\frac{9}{2}$, $c_4 = -14$, $c_3 = \frac{29}{4}$, $c_2 = -\frac{65}{4}$, $c_1 = -\frac{29}{2}$. Souřadnicový vektor $\mathbf{L}\widetilde{(q_1)}$ je proto uspořádaná šestice

$$\mathbf{L}\widetilde{(q_1)} = \left[-\frac{29}{2}, -\frac{65}{4}, \frac{29}{4}, -14, -\frac{9}{2}, -\frac{27}{4}\right]^T =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-58, -65, 29, -56, -18, -27\right]^T.$$

Toto bude tedy první sloupec hledané matice $\widetilde{\mathbf{M}}$.

Pro další prvky uvažované báze v prostoru polynomů $\mathcal{P}_3$ postupujeme analogicky. Nejdříve nalezneme jejich obrazy v lineárním zobrazení $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L}(q_2(x)) = \mathbf{L}(x^2 + x + 1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(q_3(x)) = \mathbf{L}(x^3 + 2x - 1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(q_4(x)) = \mathbf{L}(x^3 + 2x^2 + x - 1) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 15 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyní vypočítáme souřadnice obrazů $\mathbf{L}(q_i(x)), i = 2, 3, 4$, vzhledem k bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$, a to tak, že lineární kombinaci bázových prvků položíme rovnu obrazu $\mathbf{L}(q_i(x))$,

$$c_1.\mathbf{B}_1 + c_2.\mathbf{B}_2 + c_3.\mathbf{B}_3 + c_4.\mathbf{B}_4 + c_5.\mathbf{B}_5 + c_6.\mathbf{B}_6 = \mathbf{L}(q_i(x)), i = 2, 3, 4,$$

a určíme příslušné koeficienty, pro které tato rovnost platí. Levá strana v rovnostech pro jednotlivé obrazy se nemění, je stejná jako při určování souřadnic $\widetilde{\mathbf{L}(q_1)}$ obrazu $\mathbf{L}(q_1(x))$ prvního prvku báze. To znamená, že i soustavy, které potřebujeme postupně vyřešit, budou mít stejné levé strany v jednotlivých rovnicích. Zjednodušme proto náš zápis, a vyřešme současně tři soustavy, které se liší pouze v pravé straně. Vlastní výpočet přesně odpovídá počítání souřadnic pro $\mathbf{L}(q_1(x))$.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r|r|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r|r|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|c|c|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 10 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|c|c|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 10 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & -2 & 10 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|c|c|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 10 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -12 & 3 & -15 \end{array}\right]$$

Z rozšířené matice soustavy upravené řádkovými ekvivalentními úpravami na stupňovitý tvar postupným dosazování vypočítáme pro jednotlivé pravé strany příslušné souřadnicové vektory:

$$\mathbf{L}\widetilde{(q_2)} = [6, 7, -3, 6, 2, 3]^T ,$$

$$\mathbf{L}\widetilde{(q_3)} = \left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right]^T = \frac{1}{4}\,[6, -1, -3, 0, -2, -3]^T ,$$

$$\mathbf{L}\widetilde{(q_4)} = \left[\frac{25}{2}, \frac{45}{4}, -\frac{25}{4}, 10, \frac{5}{2}, \frac{15}{4}\right]^T = \frac{1}{4}\,[50, 45, -25, 40, 10, 15]^T .$$

Matice $\widetilde{\mathbf{M}}$ je po sloupcích tvořena právě ze souřadnicových vektorů $\mathbf{L}\widetilde{(q_i)}$:

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \left[\mathbf{L}\widetilde{(q_1)} | \mathbf{L}\widetilde{(q_2)} | \mathbf{L}\widetilde{(q_3)} | \mathbf{L}\widetilde{(q_4)}\right] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -58 & 24 & 6 & 50 \\ -65 & 28 & -1 & 45 \\ 29 & -12 & -3 & -25 \\ -56 & 24 & 0 & 40 \\ -18 & 8 & -2 & 10 \\ -27 & 12 & -3 & 15 \end{bmatrix} .$$

7. Vraťme se ještě jednou k polynomu $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$. Již dříve jsme spočítali matici

$$\mathbf{L}(p(x)) = \mathbf{L}(5x^3 - 4x^2 + 6x - 1) = \begin{bmatrix} -3 & -10 & -19 \\ 0 & -13 & 0 \end{bmatrix},$$

která je jeho obrazem.

Souřadnice $\widetilde{p(x)}$ polynomu $p(x)$ vzhledem k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2, q_2(x) = x^2 + x + 1, q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

prostoru $\mathcal{P}_3$ určíme jako koeficienty v lineární kombinaci bázových prvků, která se rovná právě polynomu $p(x)$:

$$c_1q_1(x) + c_2q_2(x) + c_3q_3(x) + c_4q_4(x) = p(x)$$

$$c_1(x^3 - 3x^2) + c_2(x^2 + x + 1) + c_3(x^3 + 2x - 1) + c_4(x^3 + 2x^2 + x - 1) =$$
$$= 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$$

$$(c_1 + c_3 + c_4)x^3 + (-3c_1 + c_2 + 2c_4)x^2 + (c_2 + 2c_3 + c_4)x + (c_2 - c_3 - c_4) =$$
$$= 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$$

Hledané koeficienty nalezneme jako řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
c_1 & & & + & c_3 & + & c_4 & = & 5\,, \\
-3c_1 & + & c_2 & & & + & 2c_4 & = & -4\,, \\
 & & c_2 & + & 2c_3 & + & c_4 & = & 6\,, \\
 & & c_2 & - & c_3 & - & c_4 & = & -1\,,
\end{array}$$

kterou jsme získali porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x. K řešení soustavy použijeme Gaussovu eliminační metodu, kdy rozšířenou matici soustavy upravíme pomocí řádkových elementárních úprav na stupňovitý tvar a zpětným dosazováním určíme hledané souřadnice.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

Řešením soustavy jsou koeficienty $c_4 = \frac{4}{5}$, $c_3 = \frac{9}{5}$, $c_2 = \frac{8}{5}$, $c_1 = \frac{12}{5}$. Proto souřadnicovým vektorem $\widetilde{p(x)}$ polynomu $p(x)$ vzhledem k bázi q_1, q_2, q_3, q_4 je uspořádaná čtveřice

$$\widetilde{p(x)} = \left[\frac{12}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{4}{5}\right]^T = \frac{1}{5}\,[12, 8, 9, 4]^T .$$

Podobně nalezneme také souřadnice $\widetilde{\mathbf{L}(p)}$ matice

$$\mathbf{L}(p(x)) = \begin{bmatrix} -3 & -10 & -19 \\ 0 & -13 & 0 \end{bmatrix}$$

vzhledem k bázi

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$. Určujeme koeficienty v lineární kombinaci prvků $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ báze, která se rovná právě matici $\mathbf{L}(p(x))$:

$$c_1.\mathbf{B}_1 + c_2.\mathbf{B}_2 + c_3.\mathbf{B}_3 + c_4.\mathbf{B}_4 + c_5.\mathbf{B}_5 + c_6.\mathbf{B}_6 = \mathbf{L}(p(x)).$$

Lineární kombinace na levé straně této rovnosti je samozřejmě totožná s lineární kombinací, pomocí které jsme již výše počítali souřadnice obrazů polynomů báze q_1, q_2, q_3, q_4. Proto i další výpočet bude analogický.

$$c_1. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2. \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+c_4. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + c_5. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_6. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -10 & -19 \\ 0 & -13 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 - c_2 + c_3 + c_4, & -c_1 - c_3 + c_5 + c_6, & c_1 + c_5 \\ c_2 - c_4 + c_5 - c_6, & c_2 + c_3, & c_3 + c_4 - c_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -10 & -19 \\ 0 & -13 & 0 \end{bmatrix}$$

Rovnost těchto matic bude platit, pokud budou splněny všechny rovnice následující soustavy lineárních algebraických rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} c_1 & - & c_2 & + & c_3 & + & c_4 & & & & & = & -3\,, \\ -c_1 & & & - & c_3 & & & + & c_5 & + & c_6 & = & -10\,, \\ c_1 & & & & & & & + & c_5 & & & = & -19\,, \\ & & c_2 & & & - & c_4 & + & c_5 & - & c_6 & = & 0\,, \\ & & c_2 & + & c_3 & & & & & & & = & -13\,, \\ & & & & c_3 & + & c_4 & & & - & c_6 & = & 0\,. \end{array}$$

Soustavu řešíme Gaussovou eliminační metodou, pomocí elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy na stupňovitý tvar.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -26 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -26 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 39 \end{array}\right]$$

Postupným dosazováním dostaneme jednotlivé souřadnice: $c_6 = -\frac{39}{4}$, $c_5 = -\frac{13}{2}$, $c_4 = -16$, $c_3 = \frac{25}{4}$, $c_2 = -\frac{77}{4}$, $c_1 = -\frac{25}{2}$. Souřadnicový vektor

$\widetilde{\mathbf{L}(p)}$ je proto uspořádaná šestice

$$\widetilde{\mathbf{L}(p)} = \left[-\frac{25}{2}, -\frac{77}{4}, \frac{25}{4}, -16, -\frac{13}{2}, -\frac{39}{4}\right]^T =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-50, -77, 25, -64, -26, -39\right]^T.$$

Určeme tedy součin $\widetilde{\mathbf{M}}.\widetilde{p(x)}$.

$$\widetilde{\mathbf{M}}.\widetilde{p(x)} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -58 & 24 & 6 & 50 \\ -65 & 28 & -1 & 45 \\ 29 & -12 & -3 & -25 \\ -56 & 24 & 0 & 40 \\ -18 & 8 & -2 & 10 \\ -27 & 12 & -3 & 15 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -50 \\ -77 \\ 25 \\ -64 \\ -26 \\ -39 \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{L}(p)}$$

Tímto výpočtem jsme pro polynom $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ ověřili platnost vztahu

$$\widetilde{\mathbf{M}}.\widetilde{p(x)} = \widetilde{\mathbf{L}(p)}$$

mezi souřadnicemi vzoru a souřadnicemi obrazu.

Příklad 3.2:
Pro prostor $\mathcal{P}_3$ všech polynomů nejvýše stupně 3 (včetně nulového polynomu) řešte následující úlohy:

1. Určete matici $\mathbf{T}$ přechodu od kanonické báze

$$p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$$

k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2, q_2(x) = x^2 + x + 1, q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

v prostoru $\mathcal{P}_3$ všech polynomů do stupně 3 (včetně nulového polynomu).

2. Známe souřadnice $\widetilde{r(x)} = [3, 7, -2, -5]^T$ polynomu $r(x)$ vzhledem k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2, q_2(x) = x^2 + x + 1, q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

v prostoru $\mathcal{P}_3$. Určete polynom $r(x)$ a souřadnicový vektor $\widehat{r(x)}$ polynomu $r(x)$ vzhledem ke kanonické bázi

$$p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$$

prostoru $\mathcal{P}_3$.

3. Je dán souřadnicový vektor $\widehat{s(x)} = [2, -3, 1, 5]^T$ polynomu $s(x)$ vzhledem ke kanonické bázi

$$p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$$

prostoru $\mathcal{P}_3$. Určeme polynom $s(x)$ a s využitím matice přechodu $\mathbf{T}$ nalezněme souřadnice $\widetilde{s(x)}$ polynomu $s(x)$ vzhledem k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2, q_2(x) = x^2 + x + 1, q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

v prostoru $\mathcal{P}_3$.

Řešení:

1. Určujeme-li $\mathbf{T}$ jako matici přechodu od báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$, $p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ v prostoru $\mathcal{P}_3$, hledáme vlastně matici identického zobrazení z prostoru $\mathcal{P}_3$, kde uvažujeme bázi $q_1(x), q_2(x)$, $q_3(x)$, $q_4(x)$, do prostoru $\mathcal{P}_3$ s bází $p_1(x), p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$. Přitom identické zobrazení $\mathbf{id}$ z prostoru $\mathcal{U}$ na prostor $\mathcal{U}$ přiřadí libovolnému prvku $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ jako obraz opět tentýž prvek $\mathbf{id}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. V prostoru $\mathcal{P}_3$ proto pro prvky báze $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$, $q_4(x)$ platí $\mathbf{id}(q_i(x)) = q_i(x), i = 1, 2, 3, 4$.

   Matice $\mathbf{T}$ bude mít proto jako sloupce souřadnicové vektory $\widehat{q_i(x)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, prvků báze $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ uvažované vzhledem k bázi $p_1(x), p_2(x)$, $p_3(x), p_4(x)$ v prostoru $\mathcal{P}_3$:

$$\mathbf{T} = \left[\widehat{q_1(x)}|\widehat{q_2(x)}|\widehat{q_3(x)}|\widehat{q_4(x)}\right].$$

Báze $p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$ uvažovaná v prostoru obrazů je kanonická, určení souřadnic polynomů $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$, $q_4(x)$ je proto jednoduché:
$\widehat{q_1(x)} = [1, -3, 0, 0]^T$, protože $q_1(x) = x^3 - 3x^2 = 1.p_1(x) + (-3).p_2(x) + 0.p_3(x) + 0.p_4(x)$;
$\widehat{q_2(x)} = [0, 1, 1, 1]^T$, protože $q_2(x) = x^2 + x + 1 = 0.p_1(x) + 1.p_2(x) + 1.p_3(x) + 1.p_4(x)$;
$\widehat{q_3(x)} = [1, 0, 2, -1]^T$, protože $q_3(x) = x^3 + 2x - 1 = 1.p_1(x) + 0.p_2(x) + 2.p_3(x) + (-1).p_4(x)$;
$\widehat{q_4(x)} = [1, 2, 1, -1]^T$, protože $q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1 = 1.p_1(x) + 2.p_2(x) + 1.p_3(x) + (-1).p_4(x)$.

Matice přechodu od báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$, $q_4(x)$ v prostoru $\mathcal{P}_3$ je proto čtvercová matice

$$\mathbf{T} = \left[\widehat{q_1(x)}|\widehat{q_2(x)}|\widehat{q_3(x)}|\widehat{q_4(x)}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pro matici $\mathbf{T}$ - matici přechodu od báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ v prostoru $\mathcal{P}_3$ přitom musí platit vztah

$$\mathbf{T}.\widetilde{r(x)} = \widehat{r(x)},$$

kde $\widehat{r(x)}$ značí souřadnicový vektor libovolného polynomu $r(x)$ z prostoru $\mathcal{P}_3$ vzhledem k bázi $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ a $\widetilde{r(x)}$ značí souřadnicový vektor téhož polynomu $r(x)$ vzhledem k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$, $q_4(x)$. Tento vztah plyne z toho, co bylo řečeno již výše, pro libovolné lineární zobrazení totiž platí, že
"matice zobrazení . souřadnice vzoru = souřadnice obrazu"
(samozřejmě předpokládáme, že vše je uvažováno vzhledem k pevně zvoleným bázím na prostoru vzorů i na prostoru obrazů).

2. Známe-li souřadnicový vektor $\widetilde{r(x)} = [3, 7, -2, -5]^T$ polynomu $r(x)$ vzhledem k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2, q_2(x) = x^2 + x + 1, q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1,$$

samotný polynom $r(x)$ dostaneme snadno tak, že jednotlivé souřadnice dosadíme jako koeficienty do lineární kombinace bázových prvků $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$, tedy

$$r(x) = 3.q_1(x) + 7.q_2(x) - 2.q_3(x) - 5.q_4(x) =$$

$$= 3.(x^3 - 3x^2) + 7.(x^2 + x + 1) - 2.(x^3 + 2x - 1) - 5.(x^3 + 2x^2 + x - 1) =$$
$$= -4x^3 - 12x^2 - 2x + 14.$$

Souřadnicový vektor $\widehat{r(x)}$ polynomu $r(x)$ vzhledem ke kanonické bázi

$$p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$$

pak už snadno určíme přímo z vyjádření polynomu $r(x)$. Protože

$$r(x) = -4x^3 - 12x^2 - 2x + 14 =$$

$$= (-4).p_1(x) + (-12).p_2(x) + (-2).p_3(x) + 14.p_4(x),$$

je hledaný souřadnicový vektor

$$\widehat{r(x)} = [-4, -12, -2, 14]^T.$$

Druhou možností k nalezení souřadnicového vektoru $\widehat{r(x)}$ je využití vztahu

$$\mathbf{T}.\widetilde{r(x)} = \widehat{r(x)},$$

kde $\mathbf{T}$ je matice přechodu od báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x)$, $q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ v prostoru $\mathcal{P}_3$. Vynásobíme-li

$$\mathbf{T}.\widetilde{r(x)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -12 \\ -2 \\ 14 \end{bmatrix},$$

dostaneme přímo souřadnicový vektor $\widehat{r(x)} = [-4, 12, -2, 14]^T$ polynomu $r(x)$ vzhledem ke kanonické bázi $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$.

3. Pro polynom $s(x)$ známe souřadnicový vektor $\widehat{s(x)} = [2, -3, 1, 5]^T$ vzhledem ke kanonické bázi

$$p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1.$$

Díky tomu, že báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ je kanonická, polynom $s(x)$ je lineární kombinací bázových prvků s koeficienty ze souřadnicového vektoru:

$$s(x) = 2.p_1(x) + (-3).p_2(x) + 1.p_3(x) + 5.p_4(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5.$$

Souřadnicový vektor $\widetilde{s(x)}$ polynomu $s(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$ vzhledem k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2, q_2(x) = x^2 + x + 1, q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$

$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

bychom mohli samozřejmě počítat jako koeficienty z té lineární kombinace bázových prvků $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$, která se rovná polynomu $s(x)$. Obdobné výpočty jsme již prováděli výše.

Proto se nyní podíváme na jinou možnost, při které využijeme matici přechodu $\mathbf{T}$ od báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x)$, $q_3(x)$, $q_4(x)$. Pro matici $\mathbf{T}$ a souřadnicové vektory $\widehat{s(x)}$ polynomu $s(x)$ vzhledem ke kanonické bázi $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ a $\widetilde{s(x)}$ polynomu $s(x)$ vzhledem k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ platí vztah:

$$\mathbf{T}.\widetilde{s(x)} = \widehat{s(x)}.$$

Přenásobíme-li tuto rovnost maticí $\mathbf{T}^{-1}$ inverzní k matici $\mathbf{T}$ zleva, dostaneme

$$\widetilde{s(x)} = \mathbf{T}^{-1}.\widehat{s(x)},$$

což je právě návod, jak určit $\widetilde{s(x)}$.

Protože matice $\mathbf{T}$ je řádu čtvrtého, k určení její inverzní matice využijeme Gauss-Jordanovu eliminační metodu. Pomocí řádkových elementárních úprav převedeme rozšířenou matici $[\mathbf{T}|\mathbf{I}]$ tak, aby z původní matice $\mathbf{T}$ vznikla jednotková matice.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -9 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{array}\right]$$

Z původně jednotkové matice jsme tímto výpočtem získali matici $\mathbf{T}^{-1}$ inverzní k matici $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{10} . \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ -6 & -2 & 6 & -4 \\ 9 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} .$$

Souřadnicový vektor $\widetilde{s(x)}$ polynomu $s(x)$ vzhledem k bázi $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$, $q_4(x)$ dostaneme jako součin matice $\mathbf{T}^{-1}$ a souřadnicového vektoru $\widehat{s(x)} = [2, -3, 1, 5]^T$:

$$\widetilde{s(x)} = \mathbf{T}^{-1} . \widehat{s(x)} =$$

$$= \frac{1}{10} . \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ -6 & -2 & 6 & -4 \\ 9 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} . \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ -20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Poznámka:
Matice $\mathbf{T}^{-1}$, kterou jsme vypočítali jako inverzní matici k matici $\mathbf{T}$ přechodu od báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$, je zároveň maticí přechodu od báze $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ k bázi $p_1(x)$, $p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ v prostoru polynomů $\mathcal{P}_3$.

Příklad 3.3:
Využijte některé výsledky z předcházejících příkladů a vyřešte následující úlohy:

1. Určete matici $\mathbf{H}$ přechodu od kanonické báze

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   k bázi

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ všech matic typu $2/3$.

2. Určete matici přechodu $\mathbf{H}^{-1}$ od báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ k bázi $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.

3. Využijte matici $\mathbf{M}$ zobrazení $\mathbf{L}$ z příkladu 3.1 v kanonických bázích $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ prostoru $\mathcal{P}_3$ a $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ a matici $\mathbf{T}$ přechodu od kanonické báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)$ v prostoru $\mathcal{P}_3$ z příkladu 3.2 a vypočtěte $\mathbf{H}^{-1}.\mathbf{M}.\mathbf{T}$.

Řešení:

1. Hledáme-li matici přechodu od kanonické báze $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ k bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$, hledáme vlastně matici identického zobrazení z prostoru matic $\mathbf{R}_{2,3}$ s bází $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ do téhož prostoru matic $\mathbf{R}_{2,3}$, ale nyní jej uvažujeme s kanonickou bází $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$. Proto matice $\mathbf{H}$ bude mít za sloupce souřadnicové vektory $\widehat{\mathbf{B}_i}, i = 1, 2, \ldots, 6$, prvků báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ vzhledem k bázi $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$. Tyto souřadnice určíme snadno, neboť báze $\mathbf{C}_i, i = 1, 2, \ldots, 6$, je kanonická, vyjádření matic $\mathbf{B}_i, i = 1, 2, \ldots, 6$, jako lineární kombinace matic kanonické báze je tedy triviální. Protože

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.\mathbf{C}_1 + (-1).\mathbf{C}_2 + 1.\mathbf{C}_3 + 0.\mathbf{C}_4 + 0.\mathbf{C}_5 + 0.\mathbf{C}_6,$$

je $\widehat{\mathbf{B}_1} = [1,-1,1,0,0,0]^T$ hledaný souřadnicový vektor první matice z báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$. Podobně $\widehat{\mathbf{B}_2} = [-1,0,0,1,1,0]^T$, protože

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (-1).\mathbf{C}_1 + 0.\mathbf{C}_2 + 0.\mathbf{C}_3 + 1.\mathbf{C}_4 + 1.\mathbf{C}_5 + 0.\mathbf{C}_6;$$

$\widehat{\mathbf{B}_3} = [1,-1,0,0,1,1]^T$, protože

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1.\mathbf{C}_1 + (-1).\mathbf{C}_2 + 0.\mathbf{C}_3 + 0.\mathbf{C}_4 + 1.\mathbf{C}_5 + 1.\mathbf{C}_6;$$

$\widehat{\mathbf{B}_4} = [1,0,0,-1,0,1]^T$, protože

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.\mathbf{C}_1 + 0.\mathbf{C}_2 + 0.\mathbf{C}_3 + (-1).\mathbf{C}_4 + 0.\mathbf{C}_5 + 1.\mathbf{C}_6;$$

$\widehat{\mathbf{B}_5} = [0,1,1,1,0,0]^T$, protože

$$\mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.\mathbf{C}_1 + 1.\mathbf{C}_2 + 1.\mathbf{C}_3 + 1.\mathbf{C}_4 + 0.\mathbf{C}_5 + 0.\mathbf{C}_6;$$

$\widehat{\mathbf{B}_6} = [0,1,0,-1,0,-1]^T$, protože

$$\mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0.\mathbf{C}_1 + 1.\mathbf{C}_2 + 0.\mathbf{C}_3 + (-1).\mathbf{C}_4 +$$

$$+0.\mathbf{C}_5 + (-1).\mathbf{C}_6.$$

Matice přechodu od báze $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ k bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$, $\mathbf{B}_4$, $\mathbf{B}_5$, $\mathbf{B}_6$ v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ je proto čtvercová matice řádu šest:

$$\mathbf{H} = \left[\widehat{\mathbf{B}_1}|\widehat{\mathbf{B}_2}|\widehat{\mathbf{B}_3}|\widehat{\mathbf{B}_4}|\widehat{\mathbf{B}_5}|\widehat{\mathbf{B}_6}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Máme-li pro prostor matic $\mathbf{R}_{2,3}$ určit matici přechodu $\mathbf{H}^{-1}$ od báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ k bázi $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$, mohli bychom postupovat analogicky k výpočtu výše. Uvědomme si ale, že při tomto přístupu bychom museli určit souřadnicové vektory všech matic $\mathbf{C}_i, i =$

$1, 2, \ldots, 6$, vzhledem k bázi, která není kanonická, tj. tento výpočet by byl pracnější než u matice $\mathbf{H}$.

Využijme proto faktu, že již známe matici přechodu od báze $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ k bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ - matici $\mathbf{H}$. Matice přechodu od báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ k bázi $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ bude inverzní maticí k matici $\mathbf{H}$. Její výpočet provedeme pomocí Gaussovy eliminační metody, kdy rozšířenou matici $[\mathbf{H}|\mathbf{I}]$ převedeme pomocí řádkových elementárních úprav na matici $[\mathbf{I}|\mathbf{H}^{-1}]$, která začíná jednotkovou maticí $\mathbf{I}$ řádu 6. Z původně jednotkové matice $\mathbf{I}$ takto získáme matici inverzní k matici $\mathbf{H}$.

$$[\mathbf{H}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & -1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Právě jsme vypočítali inverzní matici $\mathbf{H}^{-1}$ k matici $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & -4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

je to hledaná matice přechodu od báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ k bázi $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.

3. Máme vynásobit matice $\mathbf{H}^{-1}.\mathbf{M}.\mathbf{T}$, kde $\mathbf{M}$ je matice lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ v kanonické bázi

$$p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$$

prostoru $\mathcal{P}_3$ a kanonické báze

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$; $\mathbf{H}^{-1}$ je matice přechodu od báze

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

k bázi

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

v prostoru matic $\mathbf{R}_{2,3}$; $\mathbf{T}$ je matice přechodu od kanonické báze

$$p_1(x) = x^3, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x, p_4(x) = 1$$

k bázi

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2, q_2(x) = x^2 + x + 1, q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$
$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

v prostoru polynomů $\mathcal{P}_3$. Všechny tyto matice jsme již určili výše. Stačí proto spočítat pouze jejich součin.

$$\mathbf{H}^{-1}.\mathbf{M}.\mathbf{T} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -4 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & -4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .\mathbf{T} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & 22 & 0 & 2 \\ 4 & 23 & 0 & 5 \\ -4 & -11 & 0 & -1 \\ 4 & 20 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -58 & 24 & 6 & 50 \\ -65 & 28 & -1 & 45 \\ 29 & -12 & -3 & -25 \\ -56 & 24 & 0 & 40 \\ -18 & 8 & -2 & 10 \\ -27 & 12 & -3 & 15 \end{bmatrix}$$

Jako výsledná matice v součinu $\mathbf{H}^{-1}.\mathbf{M}.\mathbf{T}$ byla získána matice $\widetilde{\mathbf{M}}$ z výše řešeného příkladu 3.1, je to matice lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ vzhledem k bázím

$$q_1(x) = x^3 - 3x^2, q_2(x) = x^2 + x + 1, q_3(x) = x^3 + 2x - 1,$$
$$q_4(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

v prostoru $\mathcal{P}_3$ a

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$. Tento výsledek $\mathbf{H}^{-1}.\mathbf{M}.\mathbf{T} = \widetilde{\mathbf{M}}$ přesně odpovídá tomu, že na lineární zobrazení zobrazení $\mathbf{L}$ z prostoru $\mathcal{P}_3$ s bází $q_1(x), q_2(x)$, $q_3(x)$, $q_4(x)$ do prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ s bází $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5$, $\mathbf{B}_6$ se můžeme dívat také jako na složené zobrazení z následujících tří lineárních zobrazení:

- identické zobrazení prostoru $\mathcal{P}_3$ s bází $q_1(x), q_2(x)$, $q_3(x)$, $q_4(x)$ na prostor $\mathcal{P}_3$ s bází $p_1(x), p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$; toto zobrazení můžeme vyjádřit pomocí matice $\mathbf{T}$, matice přechodu od kanonické báze $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ k bázi $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$, $q_4(x)$ v prostoru polynomů $\mathcal{P}_3$;
- lineární zobrazení $\mathbf{L}$ v kanonických bázích $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ prostoru $\mathcal{P}_3$ a $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$, které je reprezentováno v příslušných bázích maticí $\mathbf{M}$;
- identické zobrazení prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$ s bází $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ na prostor $\mathbf{R}_{2,3}$ s bází $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$; toto zobrazení lze vyjádřit pomocí matice $\mathbf{H}^{-1}$ od báze $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4, \mathbf{B}_5, \mathbf{B}_6$ k bázi $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_5, \mathbf{C}_6$ v prostoru $\mathbf{R}_{2,3}$.

Matice složeného zobrazení se získá jako součin matic jednotlivých skládaných zobrazení, pouze musíme matice násobit **v opačném pořadí**, tj. první matice je maticí posledního skládaného zobrazení. Tomu přesně odpovídá i náš výsledek:

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{H}^{-1}.\mathbf{M}.\mathbf{T}$$