

Modelování fyzikálních polí

KTE/TEMP

Pavel Karban

Katedra teoretické elektrotechniky
Elektrotechnická fakulta
Západočeská univerzita v Plzni

17.03.2015

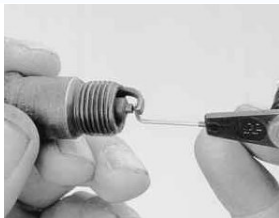


Outline

- 1 Motivace
- 2 Matematický model
 - Elektrostatika
 - Elektrické proudové pole
 - Magnetické pole
- 3 Metody řešení
- 4 Agros2D
 - Deskový kondenzátor
 - Solenoid
- 5 Vybrané úlohy
 - Dynamika dvojice magnetů
 - Kulové jiskřiště
 - Separátor nabitých částic
 - Vysokonapěťový izolátor
 - Reluktanční motor s permanentními magnety
 - Rotační indukční ohřev

Motivace

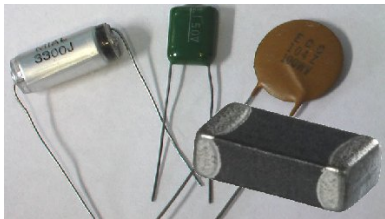
Elektrické pole



Zapalovací svíčka



Leydenská láhev (1744)



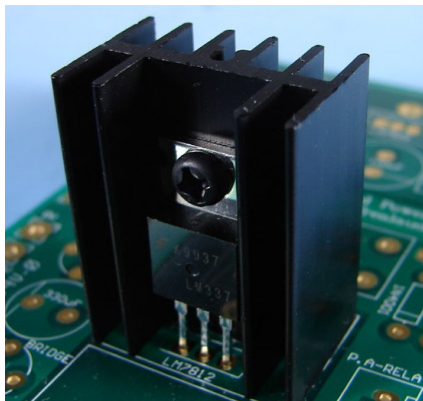
Kondezátory



Kulové jiskřiště

Motivace

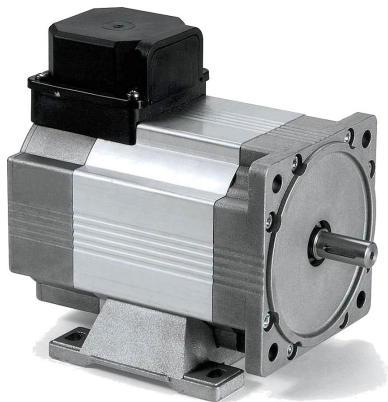
Teplotní pole



Chladič



Izolace budov



Elektrický motor



Lineární motor (aktuátor)

Motivace

Sdružené úlohy



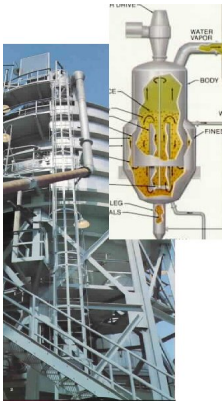
Studený kelímeček



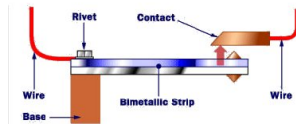
Indukční ohřev



Motivace



Krystalizátor



Bimetallový pásek



- Diferenciální rovnice

$$\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = -\rho$$

v lineárním prostředí ($\varepsilon = \text{konst}$)

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

- kde φ je skalární potenciál, ε je permitivita prostředí a ρ značí objemovou hustotu náboje

Okrajové podmínky

- Dirichletova OP (známý potenciál na hranici oblasti):

$$\varphi_{\Gamma} = f(x, y, z, t)$$

- Neumannova OP (známá hustota náboje na hranici oblasti):

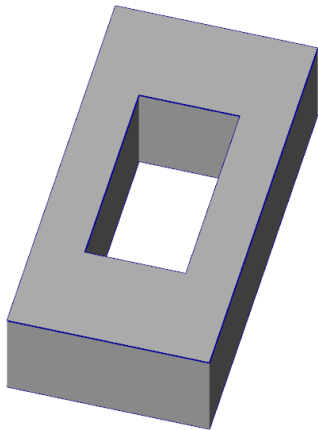
$$\sigma = D_n = \varepsilon \frac{\partial \varphi_{\Gamma}}{\partial n} = f(x, y, z, t)$$

- Nulová Neumannova OP (nulová normálová složka intenzity pole \Rightarrow nulový indukční tok stěnou):

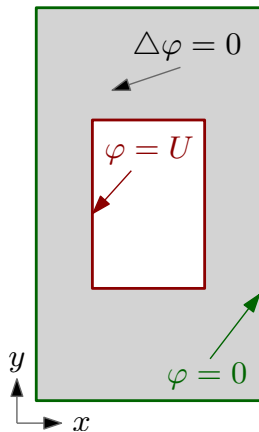
$$E_n = \frac{\partial \varphi_{\Gamma}}{\partial n} = 0$$

Elektrostatika

Kondenzátor



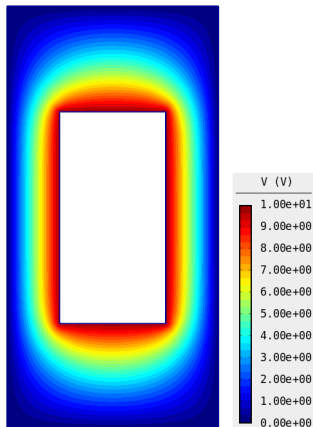
Kondenzátor



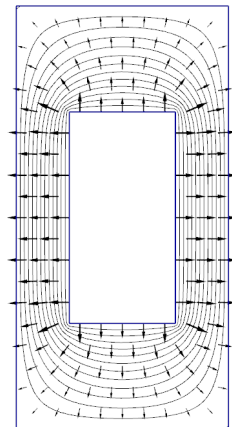
Definiční oblast

Elektrostatika

Kondenzátor



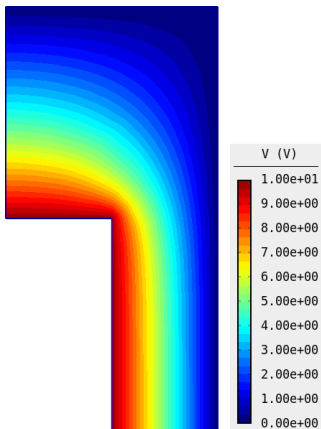
Rozložení potenciálu elektrického pole



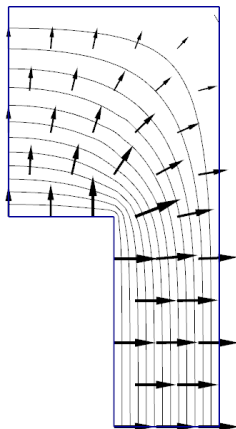
Ekvipotenciály a vektory elektrického pole

Elektrostatika

Kondenzátor



Rozložení potenciálu elektrického pole



Ekvipotenciály a vektory elektrického pole



Elektrické proudové pole

- Diferenciální rovnice

$$\operatorname{div} \gamma \operatorname{grad} \varphi = 0$$

v lineárním prostředí ($\gamma = \text{konst}$)

$$\Delta \varphi = 0$$

- kde φ je skalární potenciál a γ je elektrická vodivost

Elektrické proudové pole

Okrajové podmínky

- Dirichletova OP (známý potenciál na hranici oblasti):

$$\varphi_{\Gamma} = f(x, y, z, t)$$

- Neumannova OP (známá proudová hustota na hranici oblasti):

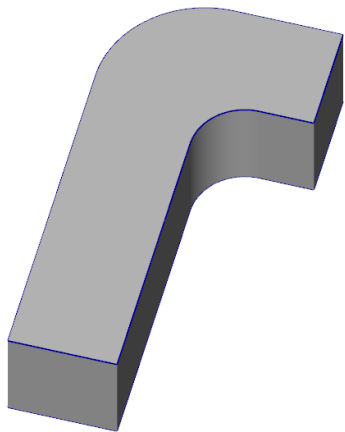
$$J_n = \gamma \frac{\partial \varphi_{\Gamma}}{\partial n} = f(x, y, z, t)$$

- Nulová Neumannova OP (nulová normálová složka proudové hustoty \Rightarrow nulový proud stěnou):

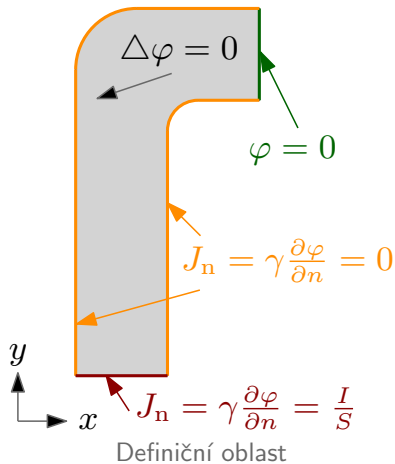
$$J_n = \gamma \frac{\partial \varphi_{\Gamma}}{\partial n} = 0$$

Elektrické proudové pole

Měděný vodič

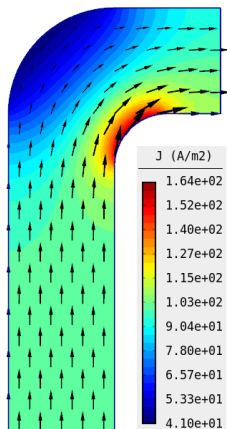


Měděný vodič

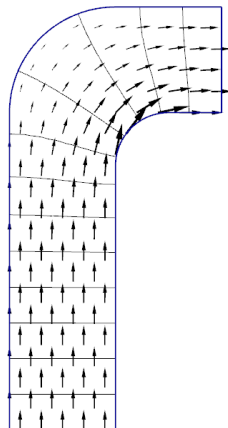


Elektrické proudové pole

Měděný vodič



Rozložení proudové hustoty

Ekvipotenciály a vektory proudové
hustoty

Magnetické pole

■ Diferenciální rovnice

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{B}_r) + \gamma \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \gamma \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\gamma \operatorname{grad} \varphi + \mathbf{J}_{\text{ext}}$$

v ustáleném stavu bez uvažování pohybu

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{B}_r) = -\gamma \operatorname{grad} \varphi + \mathbf{J}_{\text{ext}}$$

v lineárním prostředí ($\mu = \text{konst}$)

$$\Delta \mathbf{A} = \mu \gamma \operatorname{grad} \varphi - \mu \mathbf{J}_{\text{ext}} - \operatorname{rot} \mathbf{B}_r$$

- kde \mathbf{A} je vektorový magnetický potenciál, μ je permeabilita prostředí, \mathbf{B}_r je remanentní indukce, \mathbf{v} je rychlost pohybu tělesa v mag. poli, γ elektrická vodivost, $\operatorname{grad} \varphi$ je gradient elektrického pole a \mathbf{J}_{ext} značí externí proudovou hustotu



Magnetické pole

Okrajové podmínky

- Dirichletova OP (známý vektorový potenciál na hranici oblasti):

$$\mathbf{A}_\Gamma = f(x, y, z, t)$$

- Nulová Neumannova OP (nulový indukční tok stěnou):

$$\frac{\partial \mathbf{A}_\Gamma}{\partial n} = 0$$



Metody řešení

- **analytické metody** – tyto metody jsou v dnešní době již vyčerpány a k řešení složitějších problémů nejsou vhodné
- **diferenciální metody** – metoda konečných diferencí (pouze pro speciální případy – FDTD), metoda konečných prvků (v dnešní době nejpoužívanější metoda analýzy), implementována ve většině dostupného software pro řešení fyzikálních polí
- **integrální metody** – metoda hraničních prvků (lineární prostředí) – pouze speciální aplikace



Stručný úvod do MKP

- Uvažujme Poissonovu parciální diferenciální rovnici na předem známém intervalu s nulovou Dirichletovou podmínkou ve tvaru

$$-\Delta u = f$$

- Dále uvažujme u z H^1 a zavedeme slabou formulaci této rovnice. Lze dokázat, že pro libovolnou testovací funkci v musí také platit rovnice

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dV = \int_{\Omega} f v \, dV$$

- Tato slabá formulace je ekvivalentní k uvedené Poissonově rovnici

Stručný úvod do MKP

- Hlavní myšlenkou MKP je náhrada neohraničené úlohy ohraničenou (uvažujeme konečný počet testovacích funkcí v)
- Uvažovanou oblast diskretizujeme konečným počtem elementů a na každém z nich aproximujeme hledané řešení polynomem ve tvaru

$$u = \sum_{i=1}^N k_i u_i$$

- Zvolíme vhodné báze funkce daného prostoru V (jako testovací funkce volíme rovněž polynomy)
- Uvedené kroky vedou na soustavu lineárních algebraických rovnic jejichž řešením je aproximace funkce u splňující Poissonovu rovnici

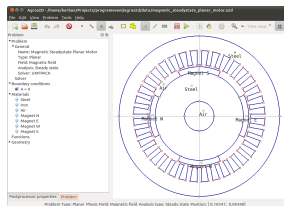


Pokročilé prvky MKP

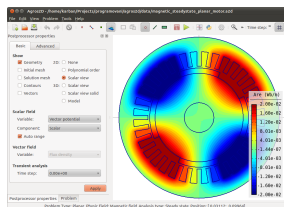
- Konečné prvky vyššího řádu přesnosti – hledaná funkce je aproximována na elementu polynomem vyššího řádu
- Křivočaré elementy – řešená oblast je zpravidla diskretizována trojúhelníkovými prvky. V některých případech je vhodné zvolit diskretizaci křivočarými elementy, které lépe respektují tvar řešené oblasti
- Automatická adaptivita – diskretizační síť a stupeň aproximace je volen automaticky na základě odhadu chyby řešení v porovnání s referenčním řešením

Základní koncept aplikace

- **Preprocessor** – tvorba geometrie, definice materiálových parametrů a přiřazení okrajových podmínek
- **Procesor** – výpočetní část zpravidla založená na metodě konečných prvků.
- **Postprocesor** – vyhodnocení obdrženého řešení, barevné mapy, kontury, vektorová pole, grafy veličin, lokální a integrální veličiny



Preprocessor



Postprocesor



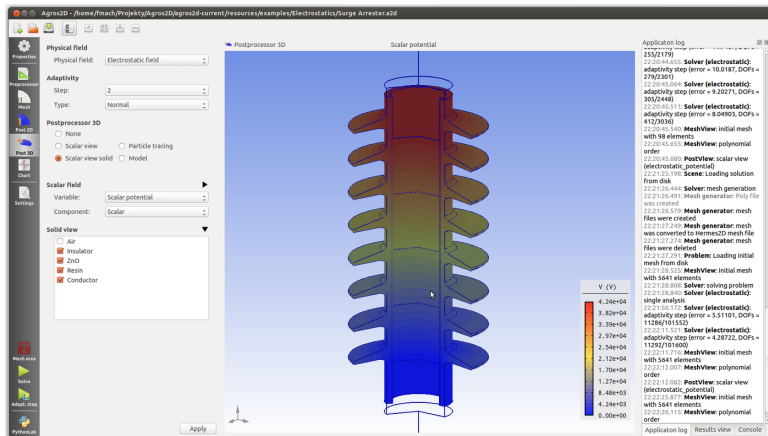
Komerční a volně šiřitelné aplikace

- Univerzální komerční multifyzikální aplikace (2D/3D)
 - ANSYS (<http://www.ansys.com/>)
 - COMSOL Multiphysics (<http://www.comsol.com/>)
- Komerční aplikace
 - Opera (3D/2D) (<http://www.comsol.com/>)
 - QuickField (2D) (<http://quickfield.com/>)
- Volně šiřitelné s GUI
 - FEMM (2D) (<http://www.femm.info/>)
 - Agros2D (2D, KTE FEL) (<http://agros2d.org/>)



Agrod2D – základní údaje

- multiplatformní aplikace určená k řešení fyzikálních polí ve 2D kartézském a osově-symetrickém uspořádání
- GNU GPL v2 – volně šiřitelná aplikace
- stacionární a harmonická analýza, přechodné děje
- Fyzikální pole:
 - elektrostatika
 - proudové pole
 - magnetické pole (stacionární, harmonické, přechodný děj)
 - teplotní pole (stacionární, přechodný děj)
 - termoelastická
 - akustické pole
 - TE, TM a TEM vlna
- aplikace je založena knihovně Hermes, která implementuje metodu konečných prvků vyššího řádu přesnosti
- hlavní vývoj na KTE (kontakt: Pavel Karban) – <http://agros2d.org/>



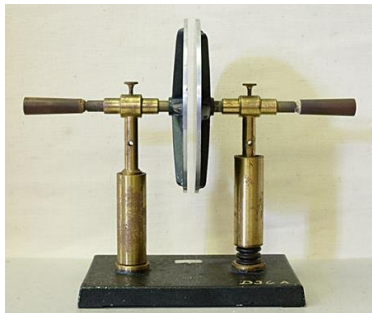
Základní okno aplikace Agros2D



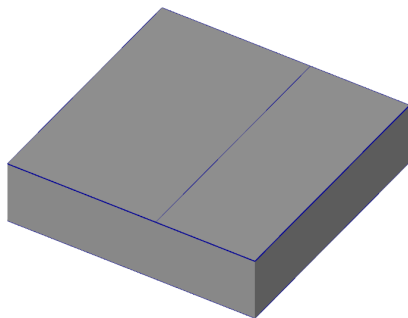
Agros2D – postup řešení problému

- vytvoření matematického modelu fyzikálního problému
 - zjednodušení tvaru řešeného objektu
 - popsání pole pomocí parciálních diferenciálních rovnic
 - určení okrajových podmínek
- Zadání geometrie, materiály a okrajových podmínek
 - body, hrany, popisky oblastí
 - materiálové parametry
 - okrajové podmínky
- diskretizace oblasti
- výpočet
- zhodnocení reálnosti vypočtených dat
- analýza vypočtených dat a konfrontace s případným experimentem

Deskový kondenzátor

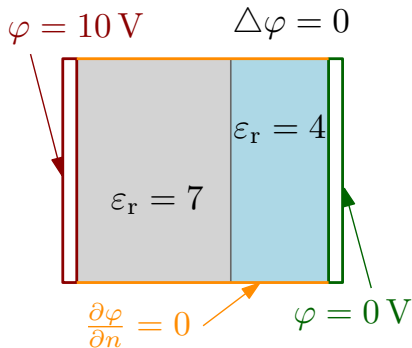


Vzduchový kondenzátor



Model ideálního dvouvrstvého
kondenzátoru

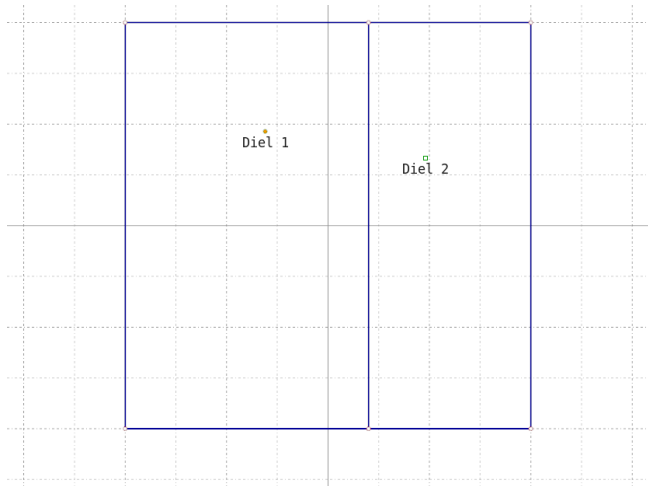
Ideální deskový kondenzátor



Definiční oblast – ideální kondenzátor

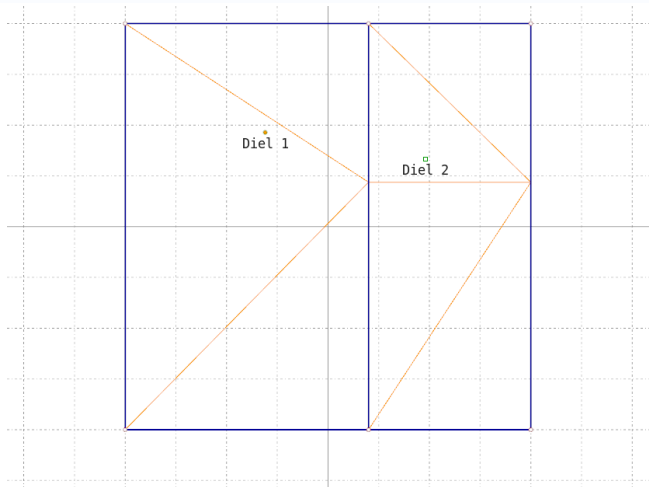


Ideální deskový kondenzátor



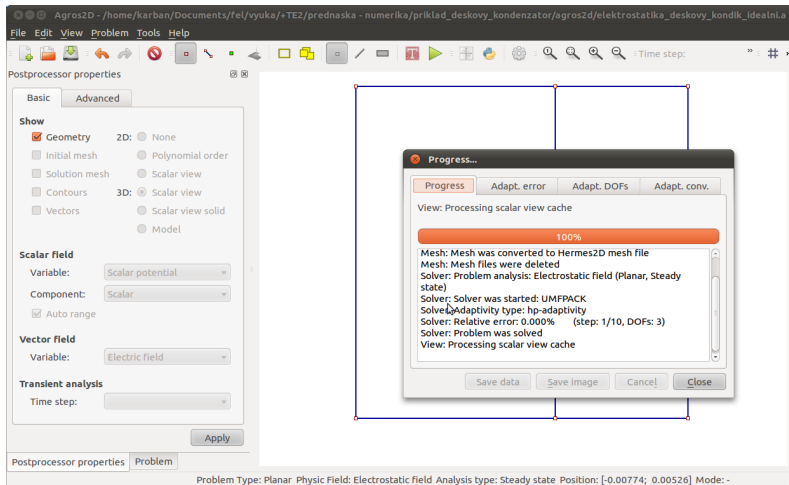
Geometrie řešení

Ideální deskový kondenzátor



Diskretizační síť (počet st. volnost = 3, rel. chyba řešení 0%)

Ideální deskový kondenzátor



The screenshot shows the Agros2D interface with a circuit diagram of a parallel plate capacitor. A 'Progress...' dialog box is open, displaying the following text:

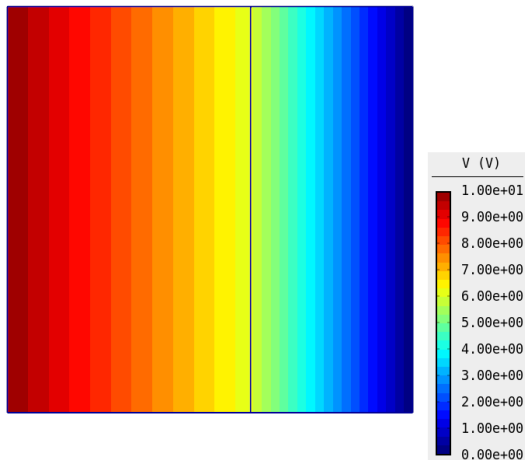
```

Progress
-----
Progress   Adapt. error   Adapt. DOFs   Adapt. conv.
View: Processing scalar view cache
100%
Mesh: Mesh was converted to Hermes2D mesh file
Mesh: Mesh files were deleted
Solver: Problem analysis: Electrostatic field (Planar, Steady state)
Solver: Solver was started: UMPACK
Solver: Adaptivity type: hp-adaptivity
Solver: Relative error: 0.000% (step: 1/10, DOFs: 3)
Solver: Problem was solved
View: Processing scalar view cache
Save data   Save image   Cancel   Close
  
```

At the bottom of the window, the status bar reads: Problem Type: Planar Physic Field: Electrostatic field Analysis type: Steady state Position: [-0.00774; 0.00526] Mode: -

Procesor – výpočet rozložení potenciálu

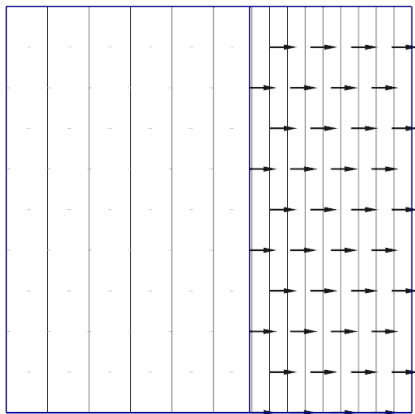
Ideální deskový kondenzátor



Rozložení potenciálu

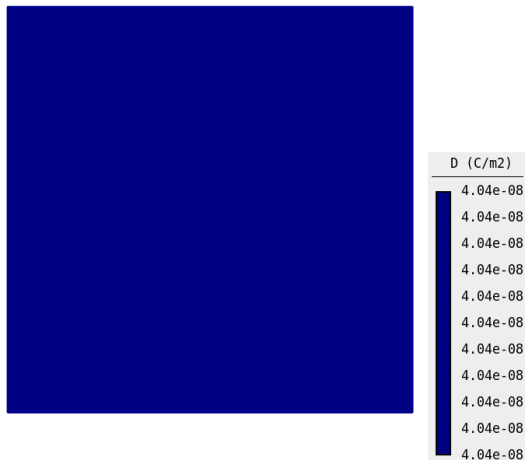


Ideální deskový kondenzátor



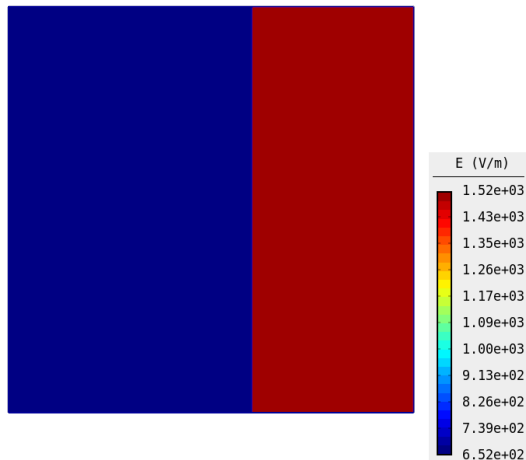
Ekvipotenciály a vektory elektrické intenzity

Ideální deskový kondenzátor



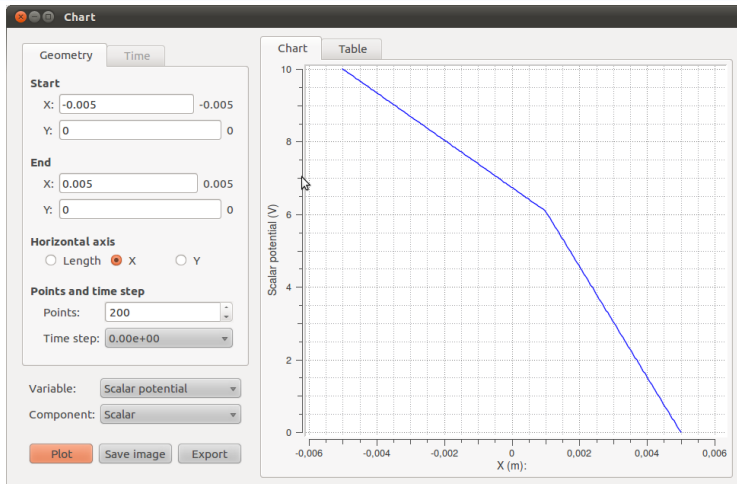
Rozložení elektrické indukce

Ideální deskový kondenzátor



Rozložení intenzity elektrického pole

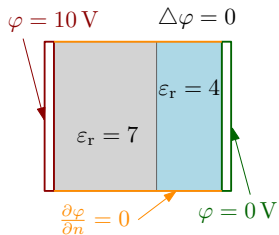
Ideální deskový kondenzátor



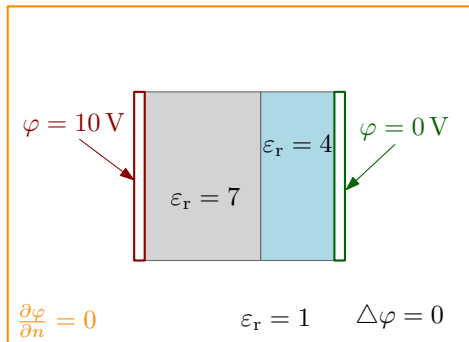
Postprocesor – průběh potenciálu středem kondenzátoru

Deskový kondenzátor

Definiční oblast

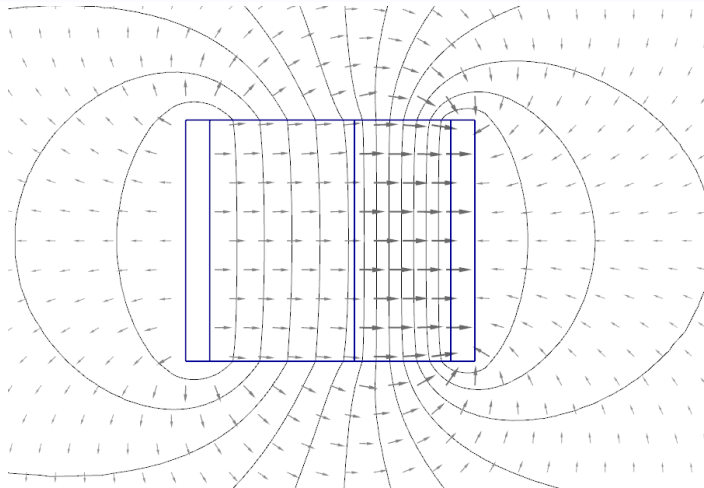


Definiční oblast – ideální
kondenzátor



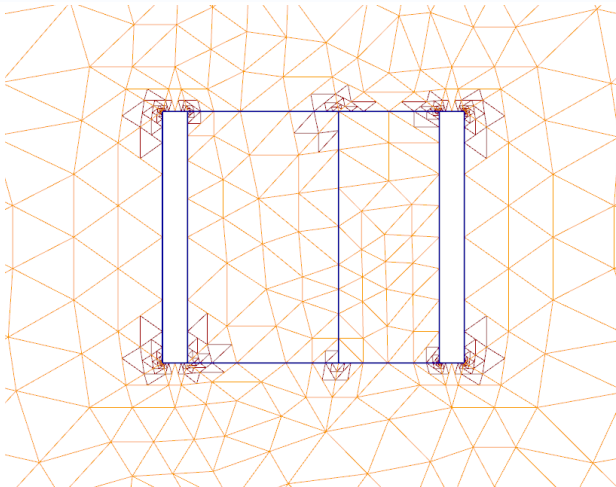
Definiční oblast – kondenzátor ve vzduchu

Deskový kondenzátor



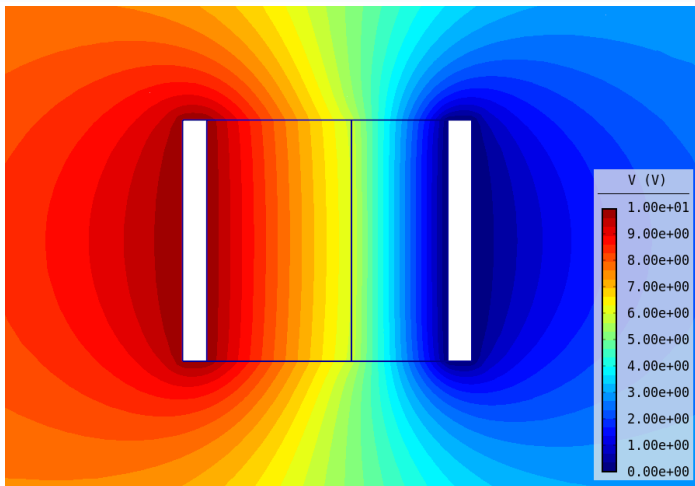
Ekvipotenciály a vektory elektrické intenzity

Deskový kondenzátor



Diskretizační síť (počet st. volnost = 1139, rel. chyba řešení 0,9%)

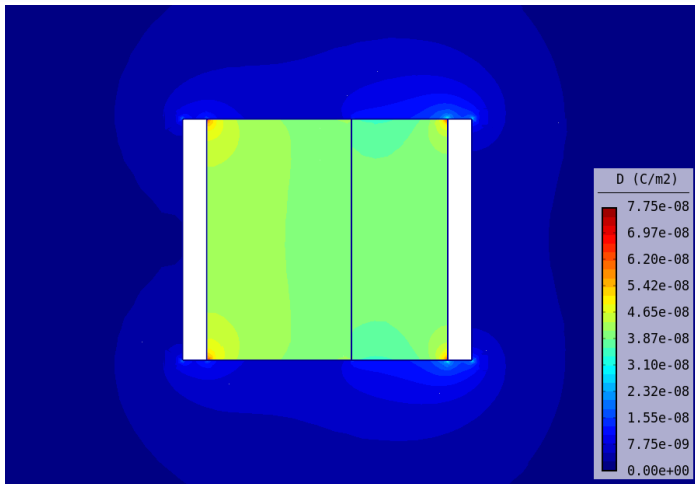
Deskový kondenzátor



Rozložení potenciálu

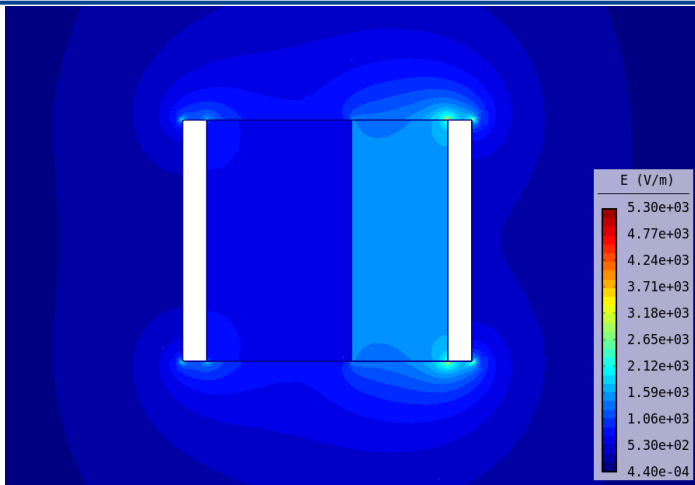


Deskový kondenzátor



Rozložení elektrické indukce (ideální $D = 4,04 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$)

Deskový kondenzátor



Rozložení intenzity elektrického pole (ideální $E_1 = 1,52$ kV/m,
 $E_1 = 0,65$ kV/m)

Deskový kondenzátor

Kapacita

-	okrajový efekt	ideální
Energie (nJ)	2,568	2,021
Kapacita z energie (pF)	513,60	404,20
Náboj (nC)	50,87	40,42
Kapacita z náboje (pF)	508,7	404,2

Kapacita z náboje na jedné z elektrod:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Energie elektrického pole

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} \, dV = \frac{1}{2} C U^2$$

Energetická definice kapacity:

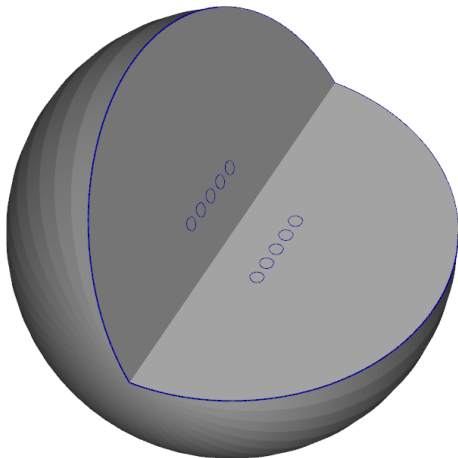
$$C = \frac{2W_e}{U^2}$$



Solenoid – válcová cívka

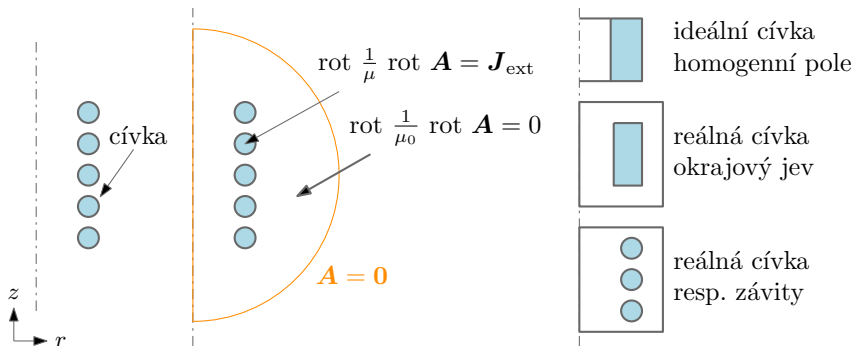


Vzduchová cívka



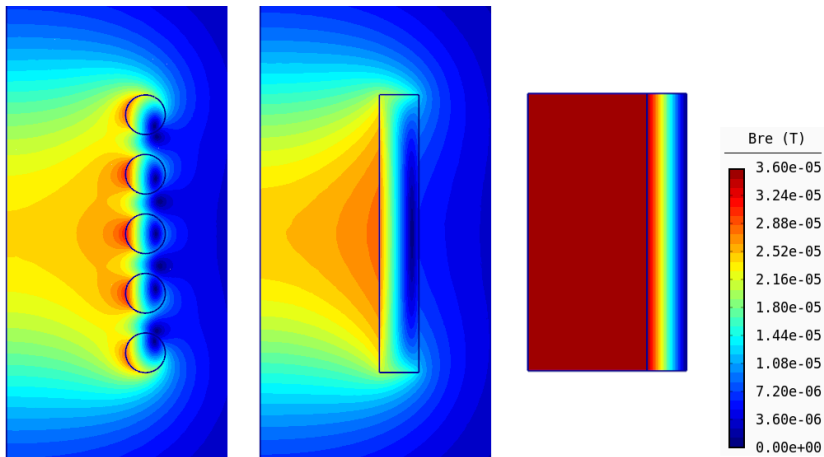
Model

Solenoid – válcová cívka

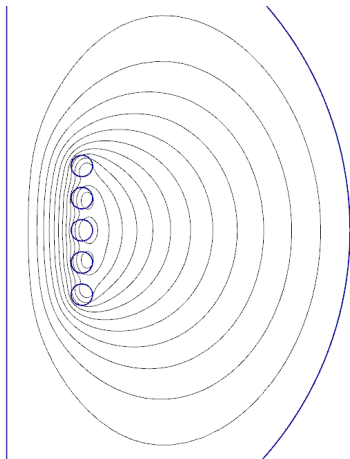


Definiční oblast – využití osové symetrie (válcové souřadnice)

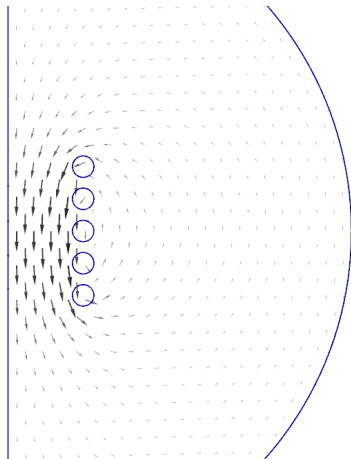
Solenoid – válcová cívka

Srovnání několika provedení cívek ($I = 1 \text{ A}$)

Solenoid – válcová cívka

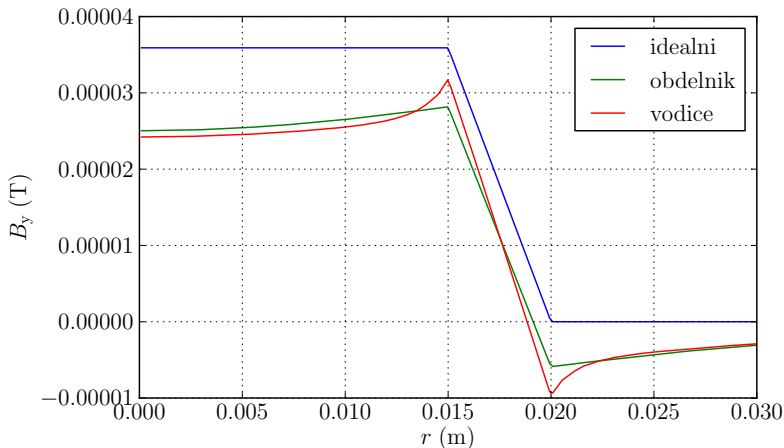


Siločáry magnetického pole



Vektory magnetické indukce

Solenoid – válcová cívka

Srovnání několika provedení cívek ($I = 1$ A)

Solenoid – válcová cívka

Indukčnost

Cívka	vodiče	obdélník	ideální
Energie (μJ)	103,3	102,5	157,4
Indukčnost (μH)	206,6	205,0	314,8

Energie magnetické pole

$$W_m = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H} \, dV = \frac{1}{2} L I^2$$

Energetická definice indukčnosti:

$$L = \frac{2W_m}{I^2}$$



Dynamika dvojice magnetů

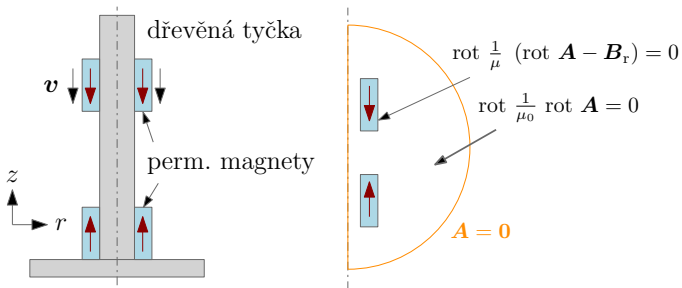
Studentský projekt

- cílem projektu je nasimulovat dynamiku pohybu dvojice magnetů a na základě těchto zkušeností navrhnout účinnou brzdu
- studentský projekt – František Mach 2009



Uspořádání magnetů

Dynamika dvojice magnetů

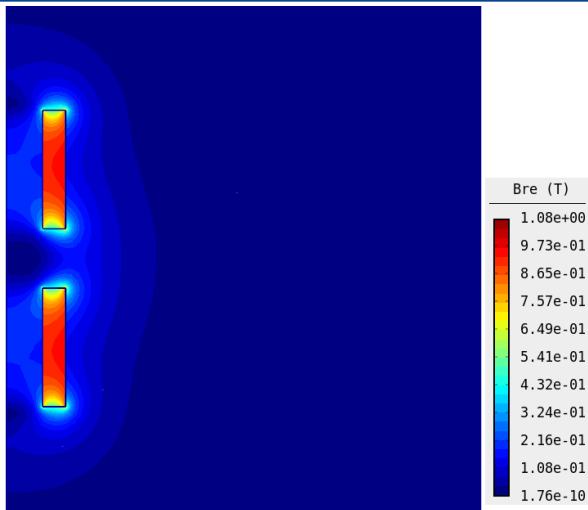


$$\frac{ds_z}{dt} = v_z$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = \sum F_z = F_m + F_G + F_t$$

Základní rozměry a definiční oblast

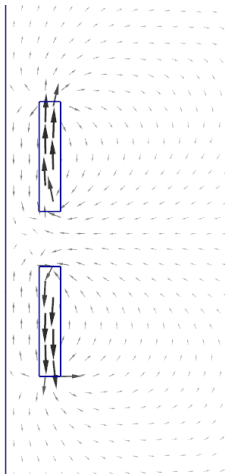
Dynamika dvojice magnetů



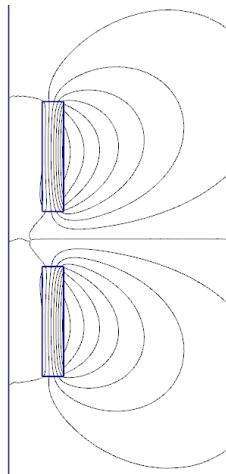
Rozložení magnetické indukce

Dynamika dvojice magnetů

Studentský projekt

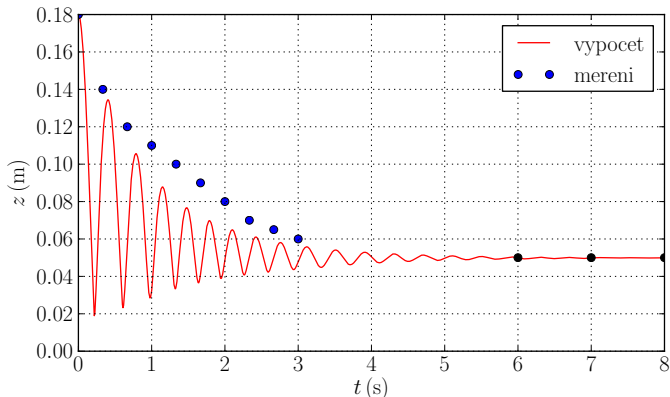


Vektory magnetické indukce



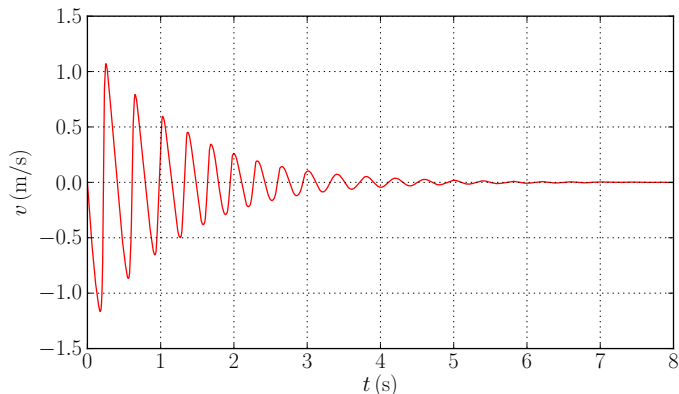
Siločáry

Dynamika dvojice magnetů



Dynamická charakteristika – poloha – srovnání výpočtu s experimentem

Dynamika dvojice magnetů



Dynamická charakteristika – rychlost – srovnání výpočtu s experimentem

Záznam z měření



Magnetický oscilátor

Studentský projekt



Magnetický oscilátor s chaotickým chováním
Studentský projekt - Jiří Mouček, Michal Horáček

Kulové jiskřiště

- elektrická pevnost je charakteristickým parametrem izolantů
- definice – maximální možná intenzita elektrického, při které nedojde k přeskoku nebo průrazu
- přeskok – plynné nebo kapalně izolanty (po přeskoku obnoví své izolační vlastnosti)
- průraz – pevné izolanty (trvalý jev – vznik vodivého kanálu)
- zjednodušený vztah (deskový kondenzátor)

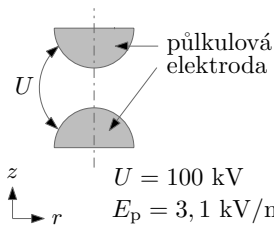
$$E_p = \frac{U_p}{d} \quad (\text{V/m})$$

- Elektrická pevnost vzduchu
 $E_p = 3,1 \text{ kV/mm} = 3100000 \text{ V/m}$.



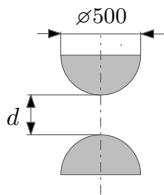
Obrázek: KET – měření el. pevnosti

Kulové jiskřiště – model

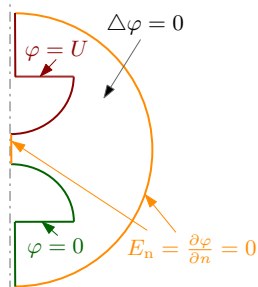


$$U = 100 \text{ kV}$$

$$E_p = 3,1 \text{ kV/mm}$$



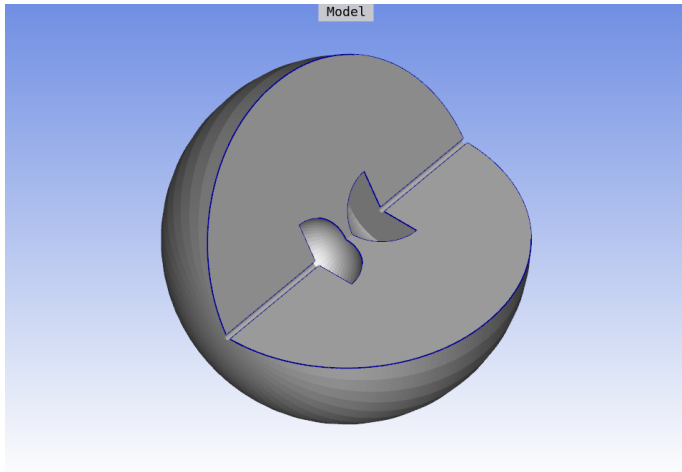
$$d \in \langle 25, 80 \rangle \text{ mm}$$



Základní rozměry a definiční oblast



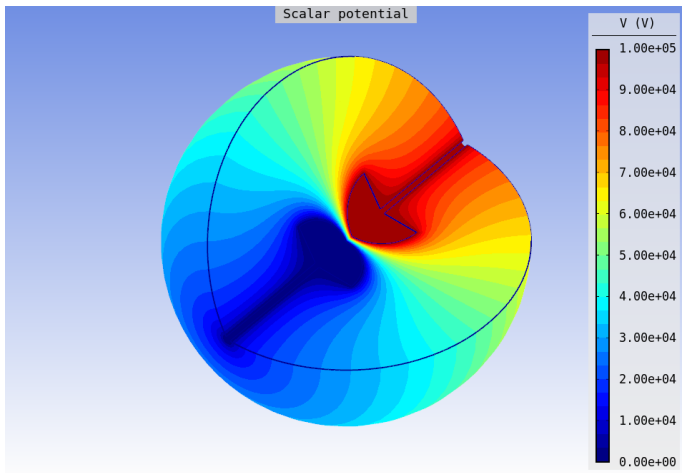
Kulové jiskřiště – model



Model kulového jiskřiště

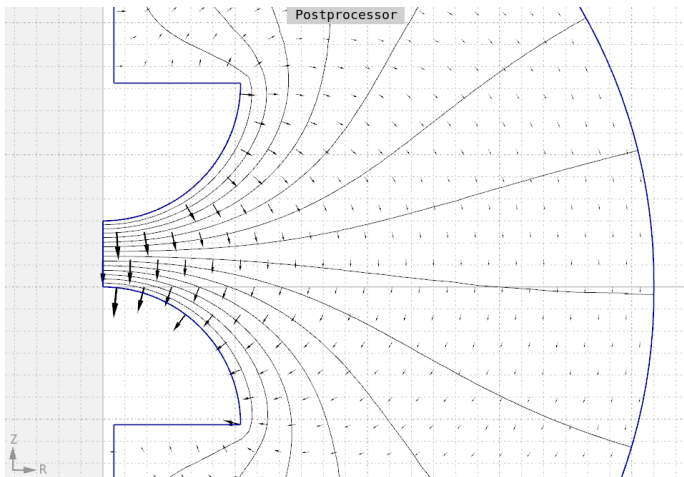


Kulové jiskřiště – model



Rozložení potenciálu

Kulové jiskřiště – model



Ekvipotenciály a vektory elektrického pole

Kulové jiskřiště – model

```
def model(Z):  
    # model  
    newdocument("unnamed", "axisymmetric", "electrostatic", 1, 4, "disabled",  
1, 1, 0, "steadystate", 1.0, 1.0, 0.0)  
  
    # boundaries  
    addboundary("Neumann", "electrostatic_surface_charge_density", 0)  
    addboundary("Voltage", "electrostatic_potential", 100000)  
    addboundary("Ground", "electrostatic_potential", 0)  
  
    # materials  
    addmaterial("Air", 0, 1)  
  
    # edges  
    addedge(0.125, -0.125, 0, 0, 90, "Ground")  
    addedge(0.01, -0.125, 0.125, -0.125, 0, "Ground")  
    addedge(0.01, -0.125, 0.01, -0.5, 0, "Ground")  
    addedge(0, Z, 0.125, Z+0.125, 90, "Voltage")  
    addedge(0.125, Z+0.125, 0.01, Z+0.125, 0, "Voltage")  
    addedge(0.01, 0.5, 0.01, Z+0.125, 0, "Voltage")  
    addedge(0.01, -0.5, 0.5, 0, 90, "Neumann")  
    addedge(0.5, 0, 0.01, 0.5, 90, "Neumann")  
    addedge(0, Z, 0, 0, 0, "Neumann")  
  
    # labels  
    addlabel(0.288909, 0.206218, 0, 0, "Air")
```

Kulové jiskřiště – model

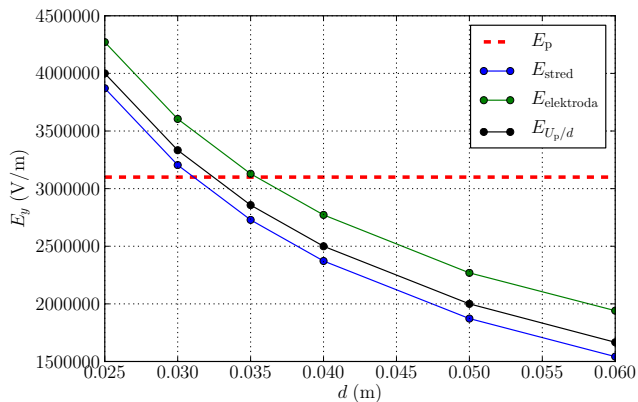
```
# vektory
Ey1 = []
Ey2 = []
d = [0.025, 0.03, 0.035, 0.04, 0.05, 0.06]

for Z in d:
    model(Z)
    zoombestfit()
    solve()

    # hodnota v bode
    value = pointresult(0, Z/2.0)
    Ey1.append(-value["Ey"])
    value = pointresult(0, 0)
    Ey2.append(-value["Ey"])

pl.plot(d, Ey1, "-o", label="E1")
pl.plot(d, Ey2, "-o", label="E2")
pl.grid(True)
pl.xlabel("d (m)")
pl.ylabel("Ey (V/m)")
pl.legend()
```

Kulové jiskřiště – závislost intenzity



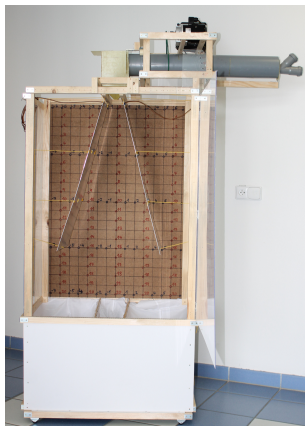
Závislost intenzity elektrického pole na vzdálenosti elektrod

Separátor nabitých částic

- třídění nabitých plastových kuliček pomocí elektrického pole
- různé nabití částic třením
- Lorentzova síla působící na nabité částice

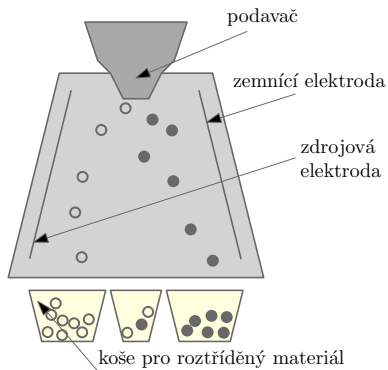
$$F_e = QE$$

- Odpadové hospodářství
- Spolupráce s průmyslem

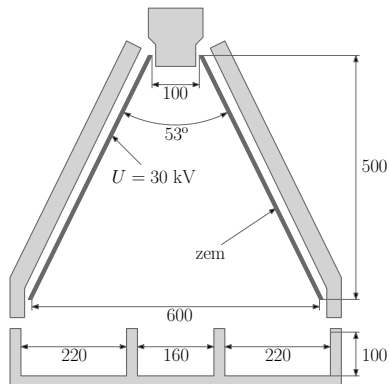


Obrázek: Separátor na KTE

Separátor nabitých částic



Základní uspořádání



Základní rozměry

Separátor nabitých částic

Pohybové rovnice

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_1^n \mathbf{F}_i, \quad \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{v}.$$

Gravitační síla

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}_0,$$

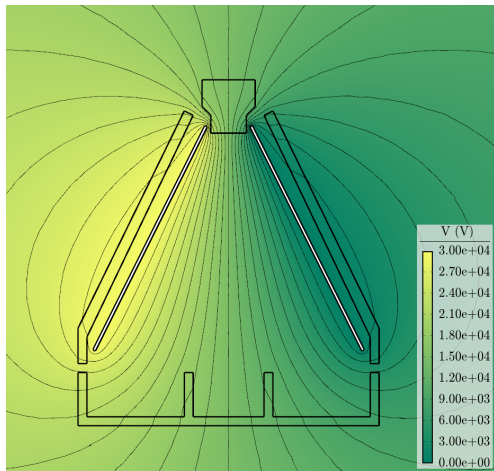
kde \mathbf{g}_0 je gravitační zrychlení. Odpor vzduchu

$$\mathbf{F}_{o,t} = -\frac{1}{2}\rho c_x S v^2 \cdot \mathbf{v}_0,$$

kde ρ představuje hustotu tekutiny, S je průřez tělesa a konečně koeficient c_x značí součinitel odporu, který zohledňuje tvar i povrch tělesa. V elektrickém poli působí na nabitou částici síla

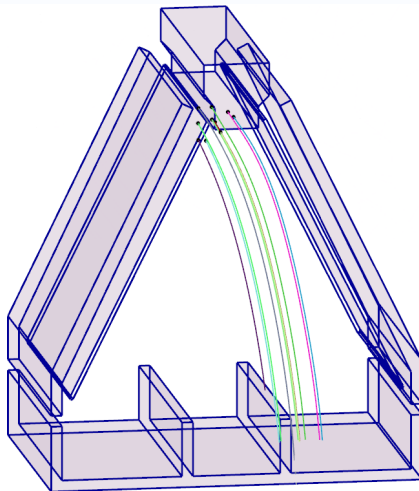
$$\mathbf{F}_e = Q\mathbf{E}.$$

Separátor nabitých částic



Rozložení potenciálu

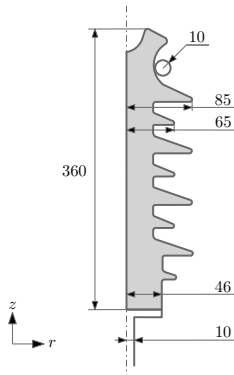
Separátor nabitých částic



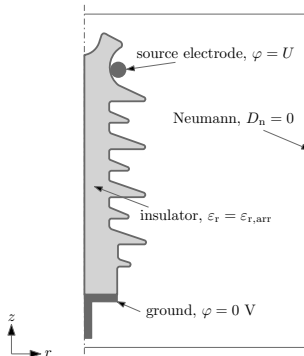
Sledování pohybu částic



Vysokonapěťový izolátor



Geometrie



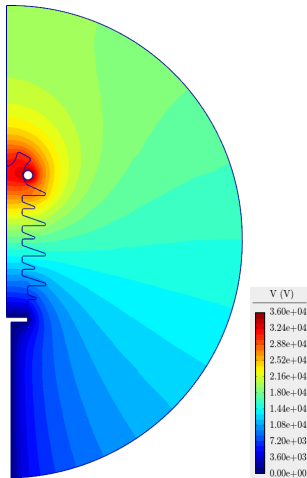
Matematický model



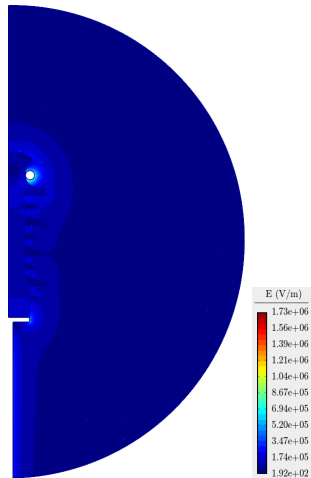
Izolátor



Vysokonapěťový izolátor

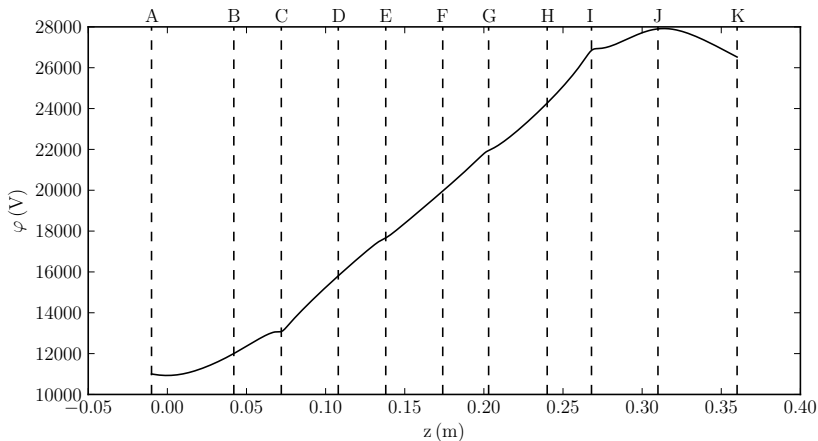


Skalární potenciál



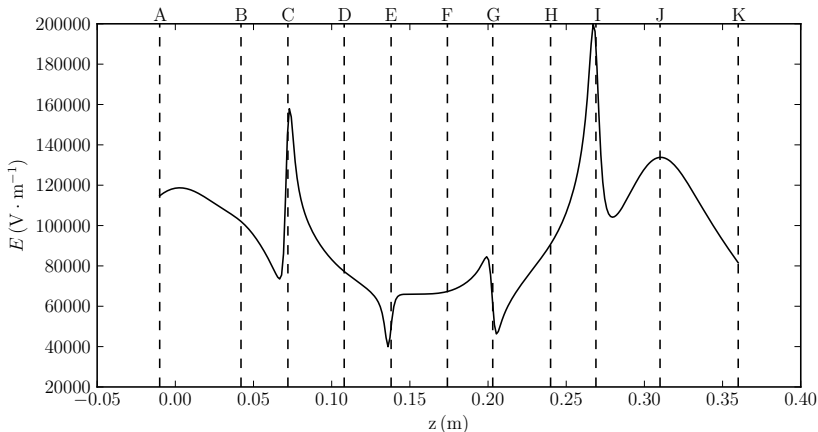
Intenzita pole

Vysokonapěťový izolátor



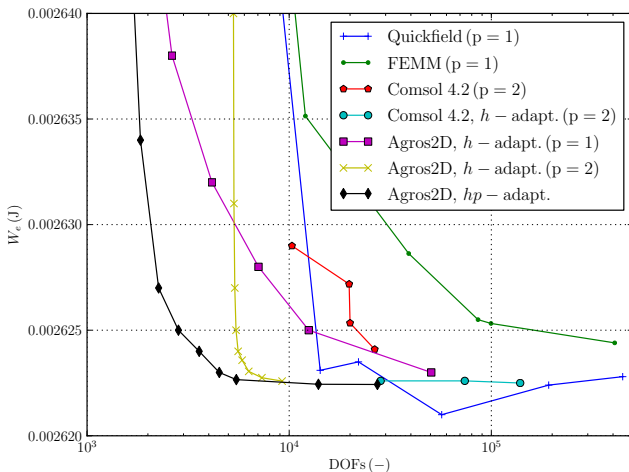
Elektrický potenciál podél izolátor pro $r = 65$ mm

Vysokonapěťový izolátor



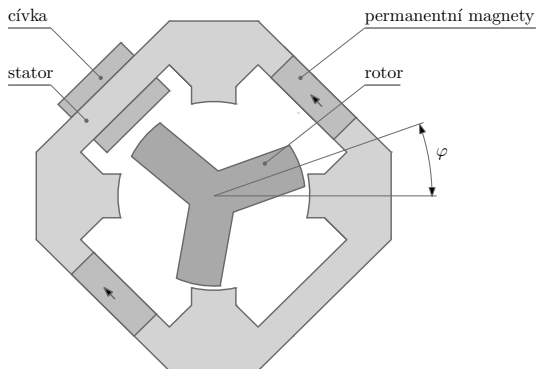
Intenzita elektrického pole podél izolátoru pro $r = 65 \text{ mm}$

Vysokonapěťový izolátor



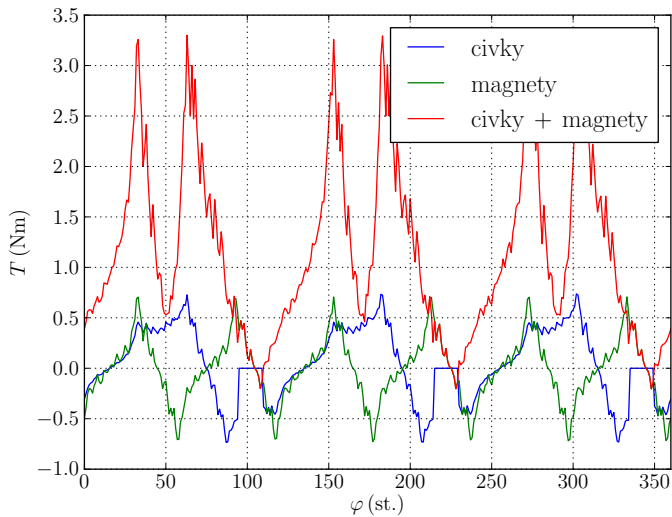
Porovnání stupňů volnosti (počtu algebraických rovnic) v různých programech pro řešení polí

Reluktanční motor s PM



Reluktanční motor s permanentními magnety

Reluktanční motor s PM



Moment motoru

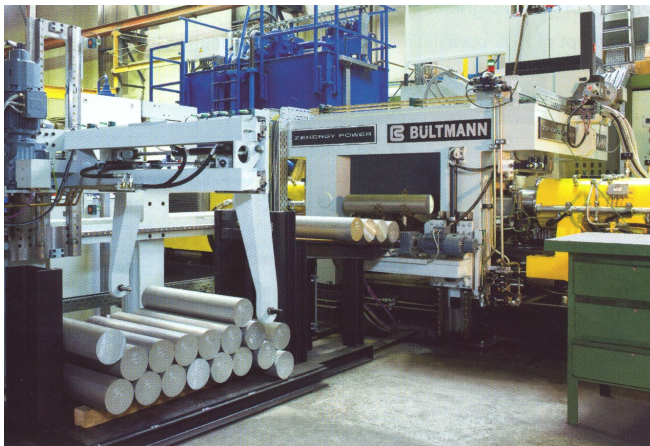


Reluktanční motor s PM

“

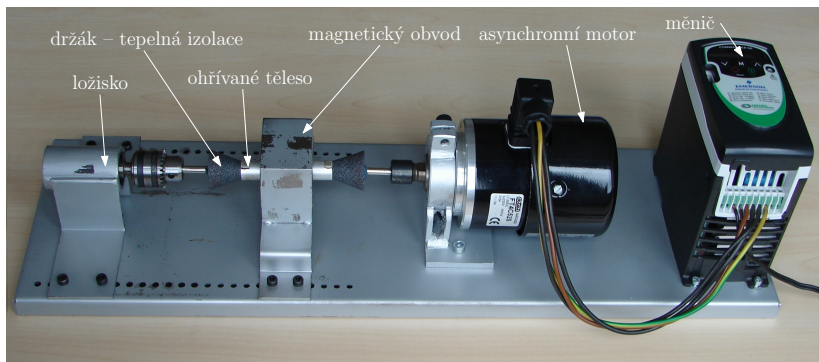
Rozložení magnetického pole v závislosti na úhlu pootočení

Rotační indukční ohřev



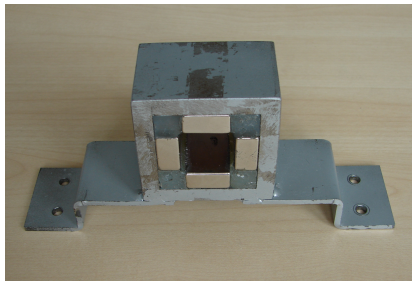
Zařízení firmy Bultmann pro ohřev hliníkových ingotů (magnetické pole produkováno soustavou supravodivých cívek)

Zařízení indukčního ohřevu

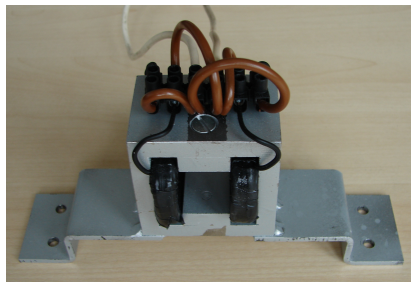


Zařízení rotačního indukčního ohřevu 2008

Magnetický obvod



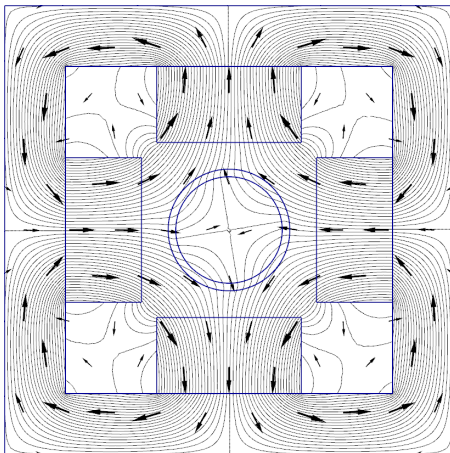
Magnetický obvod s permanentními magnety



Magnetický obvod se soustavou cívek

Získané výsledky

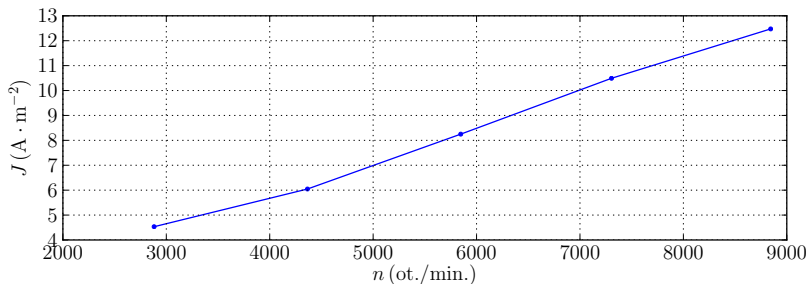
Siločáry a vektory magnetické indukce



Siločáry a vektory magnetické indukce ($n = 23000$ ot./min.)

Získané výsledky

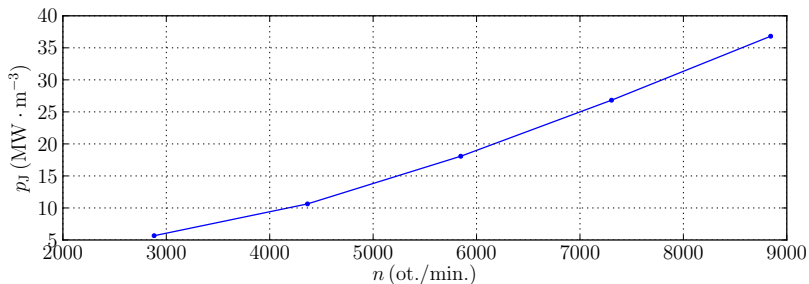
Závislost průměrné proudové hustoty na otáčkách



Závislost průměrné proudové hustoty na otáčkách

Získané výsledky

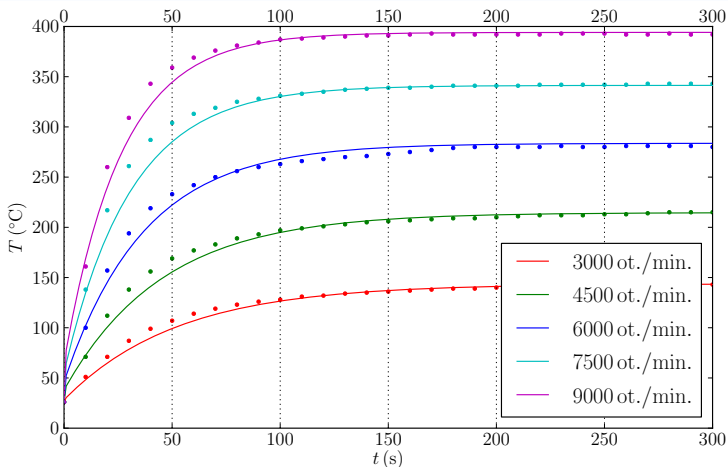
Jouleovy ztráty



Závislost průměrné hodnoty měrných Jouleových ztrát na otáčkách

Získané výsledky

Porovnání vypočtených a naměřených dat

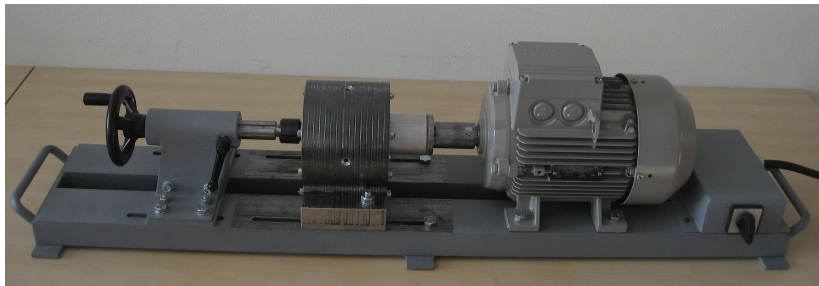


Porovnání naměřeného a vypočteného časového průběhu průměrné teploty tělesa

Záznam z měření

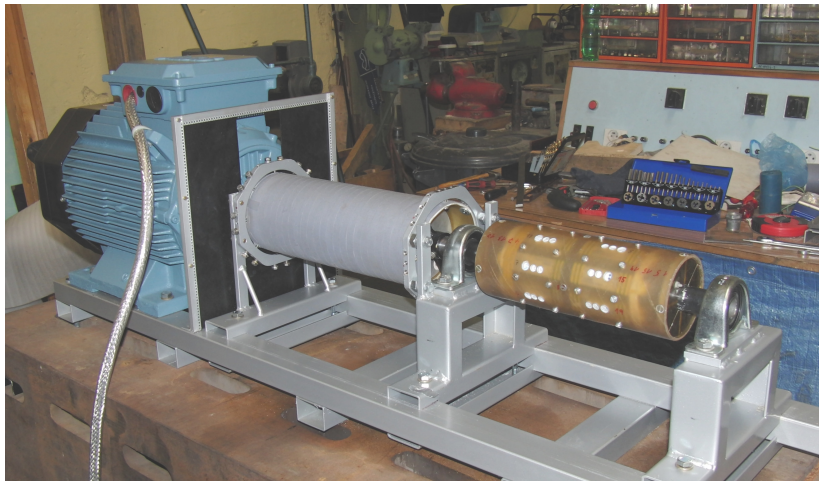


Prototyp 2010



Prototyp 2010

Prototyp 2011



Prototyp 2011



Děkuji za pozornost