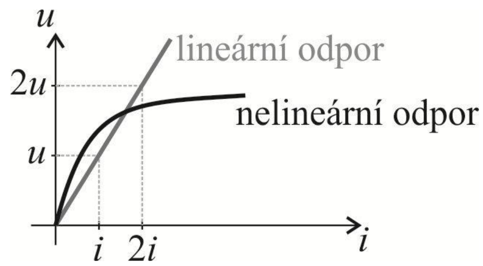
Nelineární obvody

Dosud jsme se zabývali analýzou lineárních elektrických obvodů, pasivní lineární prvky měly zpravidla konstantní parametr, v těchto obvodech platil princip superpozice a pro analýzu harmonického ustáleného stavu bylo možno použít SKM.



Obsahuje-li obvod alespoň jeden nelineární prvek, jedná se o obvod nelineární, kde neplatí některé postupy používané v obvodech lineárních:

- **neplatí princip superpozice**, k analýze obvodu nelze použít ani metody tento princip využívající
- **nelze použít SKM** a tedy pracovat s fázory (i pro harmonický zdroj v nelineárním obvodu vznikají neharmonické odezvy
- **neplatí Ohmův zákon**.

V nelineárních obvodech však **platí Kirchhoffovy zákony.**

Analýza nelineárních obvodů je náročnější, **obvodové rovnice je nutno formulovat pro okamžité hodnoty,** při jejich řešení mohou nastat situace, se kterými jsme se u analýzy lineárních obvodů nesetkali, např.: řešením rovnic může být i fyzikálně nereálný výsledek, řešení přechodného děje závisí na počátečních podmínkách apod.

Nelineární obvody dělíme na:

a) nesetrvačné, tj. obvody s odpory – formulujeme nelineární algebraické rovnice
b) setrvačné, tj. obvody s induktory a kapacitory – dostaneme soustavu nelineárních diferenciálních rovnic

Rozlišujeme :

a) ***Nelineární obvody s funkční nelinearitou***

   V těchto obvodech využíváme vlastnosti nelineárních prvků k získání požadovaných změn přenášených signálů, jsou to např.: usměrňovače, stabilizátory, generátory napětí a proudů libovolného časového průběhu, obvody pro násobení a dělení kmitočtu, zesilovače, směšovače, demodulátory apod.

b) ***Nelineární obvody s parazitní nelinearitou***

   Nelineární chování prvku je nežádoucí, používáme zjednodušující předpoklady, za kterých je možno prvek považovat za lineární (např. žárovka – změna odporu s teplotou, nebo cívka s feromagnetickým jádrem, transformátory apod.) nebo se omezíme na oblast, kde předpoklad lineárního chování je přijatelný (lineární část magnetizační charakteristiky feromagnetických materiálů apod.).

Nelineární charakteristiky

Vlastnosti nelineárních prvků nelze vyjádřit jediným parametrem, ale jejich vlastnosti popisujeme pomocí nelineární charakteristiky, tj. závislostí mezi příslušnými veličinami a není to vždy jenom vztah napětí – proud. Tyto charakteristiky zjišťujeme zpravidla měřením a můžeme je definovat

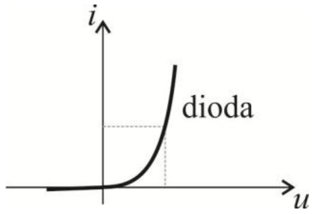
- tabulkou hodnot
- grafem
- analytickým výrazem (získaným interpolací z naměřených hodnot nebo vztahem vyjadřujícím fyzikální jev způsobující nelinearitu)

Pro **pasivní nelineární prvky** používáme následující vyjádření:

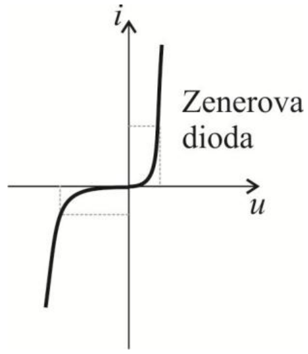
- resistor R: závislost u = f(i) resp. i = f (u) vyjadřuje V-A resp. A-V charakteristika
- induktor L: závislost ϕ = f(i) resp. i = f (ϕ) vyjadřuje Wb-A resp. A-Wb charakteristika
- kapacitor C: závislost q = f(u) resp. u = f (q) vyjadřuje C-V resp. V-C charakteristika

Tvary typických charakteristik

a) monotónně rostoucí – jsou definovány ***jednoznačnými funkcemi y = f (x)***

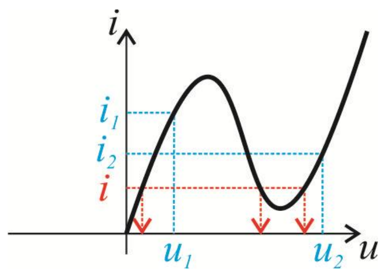


$u = f(i)$
$i = f(u)$



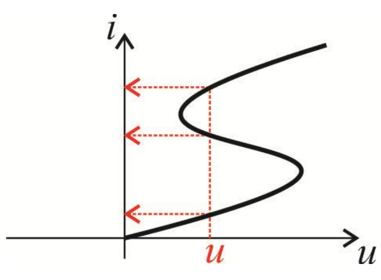
b) klesající i rostoucí - jsou definovány ***nejednoznačnými funkcemi***

charakteristiky typu N



$i = f(u)$ jednoznačná funkce
$u = f(i)$ nejednoznačná funkce

charakteristiky typu S



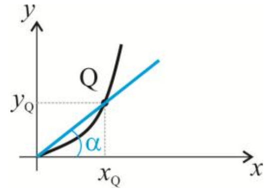
$i = f(u)$ nejednoznačná funkce

Parametry nelineárních prvků

Vyjádříme-li obecně nelineární charakteristiku jako funkci y = f (x), pak v okolí pracovního bodu Q můžeme chování prvku vyjádřit pomocí dvou parametrů – ***statického a dynamického***:

a) ***statický parametr*** – je dán směrnicí přímky procházející počátkem souřadného systému a pracovním bodem Q

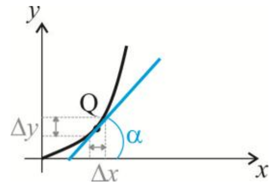
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y_Q}{x_Q}$$



b) ***dynamický parametr*** – je dán směrnicí tečny k charakteristice v pracovním bodě Q, vyjadřuje chování prvku (tj. jeho dynamické vlastnosti) v okolí pracovního bodu, rychlost změny lze vyjádřit buď:

- derivací funkce f(x), v případě, že závislost f(x) dána analytickým výrazem, pak mluvíme o ***parametru diferenciálním***
- diferencemi, je-li nelineární charakteristika dána grafem nebo tabulkou hodnot, pak mluvíme o ***parametru diferenčním***

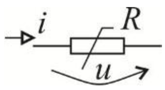
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



V následující části uvedeme základní vztahy pro nelineární resistor, induktor a kapacitor.

Nelineární rezistor

Schematická značka

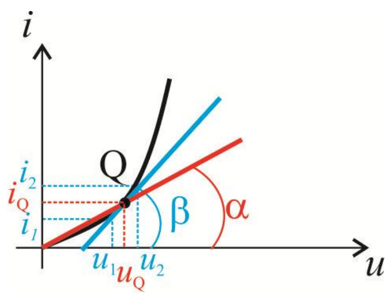


Vztah mezi napětím a proudem vyjadřuje V-A charakteristika
Q je pracovní bod charakteristiky,
každému bodu charakteristiky odpovídá jiná hodnota parametru

Statický parametr

Hodnotu ***statického odporu*** získáme ze vztahu

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{i_Q}{u_Q} = G_{sQ} = \frac{1}{R_{sQ}}$$



Dynamický parametr

diferenciální odpor vyjadřujeme ze vztahu

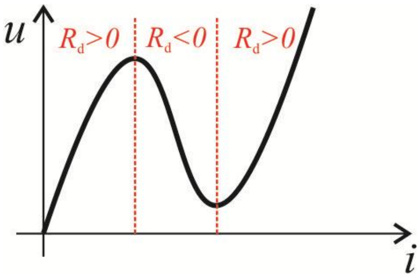
$$\mathrm{tg}\beta = \left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}u}\right|_Q = G_{dQ} = \frac{1}{R_{dQ}}$$

vyjádření ***diferenčního odporu***

$$\mathrm{tg}\beta \doteq \frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{i_2 - i_1}{u_2 - u_1} = G'_{\mathrm{dQ}} = \frac{1}{R'_{\mathrm{dQ}}}$$

pro $u \in \langle u_1, u_2 \rangle$

Rezistor s charakteristikou typu N - dynamický odpor nabývá kladných i záporných hodnot

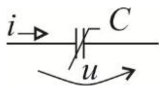


Př.: Pro nelineární rezistor s charakteristikou $i = au^3$ [mA; $\frac{\text{mA}}{\text{V}^3}$; V] kde $a = 2{,}5\ \text{mA/V}^3$ stanovte R_s a R_d v bodě Q, kde napětí nabývá hodnoty $u_\text{Q} = 2\ \text{V}$.

$$R_{\text{sQ}} = \frac{u_\text{Q}}{i_\text{Q}} = \frac{2}{3u_\text{Q}^3} = \frac{10^3}{2{,}5 \cdot 4} = 100\ \Omega$$

$$\text{d}i = 3au^2\text{d}u \quad \Rightarrow \qquad R_{\text{dQ}} = \left.\frac{\text{d}u}{\text{d}i}\right|_\text{Q} = \frac{1}{3au_\text{Q}^2} = 33{,}3\ \Omega$$

Nelineární kapacitor

Schematická značka 

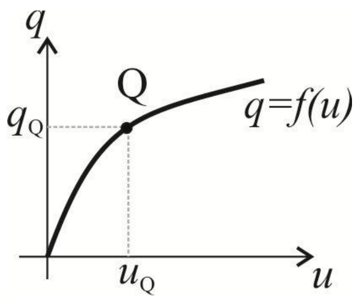
C-V charakteristika vyjadřuje vztah mezi nábojem q na elektrodách a napětím U mezi nimi

Statická kapacita je definována vztahem

$$C_{\text{sQ}} = \frac{q_\text{Q}}{u_\text{Q}}$$

Dynamická kapacita je vztahem

$$C_{\text{dQ}} = \left.\frac{\text{d}q}{\text{d}u}\right|_\text{Q}$$



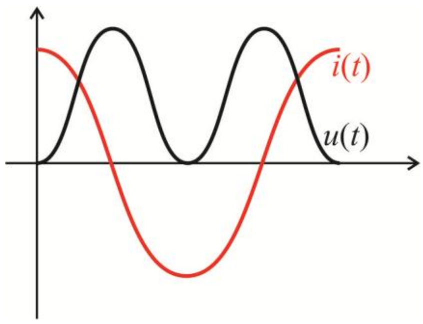
Vztah mezi proudem a napětím na kapacitoru lze vyjádřit pomocí dynamického parametru Cd analogicky jako pro lineární kapacitor

$$i(t) = \frac{\text{d}q}{\text{d}t} = \frac{\text{d}q}{\text{d}t} \cdot \frac{\text{d}u}{\text{d}u} = \frac{\text{d}q}{\text{d}u} \cdot \frac{\text{d}u}{\text{d}t} = C_\text{d} \cdot \frac{\text{d}u}{\text{d}t}$$

Př.: Charakteristika nelineárního kondenzátoru je $q = k\sqrt{u}$. Stanovte proud kondenzátorem, je-li $u = 25\sin^2 \omega t$.

$$C_\text{d} = \frac{\text{d}q}{\text{d}u} = \frac{k}{2\sqrt{u}} = \frac{k}{10 \sin \omega t}$$

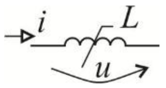
$$i = C_\text{d}\frac{\text{d}u}{\text{d}t} = \frac{k}{10 \sin \omega t} \cdot 50\omega \sin \omega t \cos \omega t = 5k\omega \cos \omega t$$



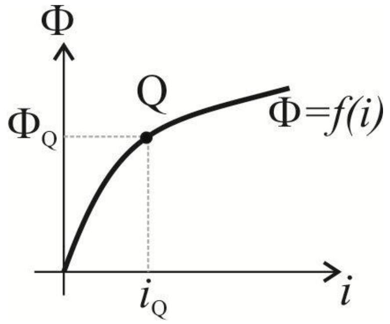
$i(t)$ – 1. harmonická
$u(t)$ – ss složka a 2. harmonická

Nelineární prvky mohou způsobit vznik vyšších harmonických

Nelineární induktor

Schematická značka 

Wb-A charakteristika vyjadřuje vztah mezi magnetickým indukčním tokem spřaženým se závity induktoru a proudem, který magnetické pole vytváří



Statická indukčnost je definována vztahem

$$L_\mathrm{s} = \frac{\Phi}{i}, \qquad \text{čili } \Phi = L_\mathrm{s} i$$

Dynamická indukčnost je dána vztahem

$$L_\mathrm{d} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}(L_\mathrm{s}(i) \cdot i) = L_\mathrm{s}(i) + i\,\frac{\mathrm{d}L_\mathrm{s}(i)}{\mathrm{d}i}$$

Vztah mezi proudem a napětím na induktoru lze vyjádřit pomocí dynamického parametru Ld analogicky jako pro lineární induktor

$$u_\mathrm{L} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}i} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i} \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L_\mathrm{d} \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Př.: Statická indukčnost nelineární cívky je vyjádřena vztahem $L_\mathrm{s}(i) = L_0(1 - ai)$, kde L_0, a jsou konstanty. Určete napětí na cívce, protéká-li jí proud $i(t) = I_\mathrm{m} \sin \omega t$.

$$L_\mathrm{d} = L_0(1 - ai) + i\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}[L_0(1 - ai)] = L_0(1 - 2ai)$$

$$u_\mathrm{L} = L_0(1 - 2aI_\mathrm{m} \sin \omega t) \cdot \omega I_\mathrm{m} \cos \omega t$$

$$u_\mathrm{L} = \omega L_0 I_\mathrm{m} \cos \omega t - a\omega L_0 I_\mathrm{m} \sin 2\omega t$$

Opět je vidět, že i pro harmonický proud může mít napětí na nelineárním induktoru 2. harmonickou.

Aproximace charakteristik nelineárních prvků

Charakteristiky nelineárních prvků zjišťujeme zpravidla měřením, získáme tak buď tabulku hodnot nebo graf, případně je vyjádříme analytickým výrazem, způsob vyjádření volíme s ohledem na metodu, kterou budeme daný obvod analyzovat, tj. zda obvod budeme řešit analyticky, numericky nebo některou z grafických metod.

Aproximační funkci volíme tak, aby danou charakteristiku vystihovala s dostatečnou přesností a umožnila snadné matematické operace.

Postupy
- linearizace v okolí pracovního bodu
- lineární aproximace po částech
- interpolace nebo aproximace polynomem
- aproximace exponenciálních funkcí (pro diody, tranzistory s PN přechody)

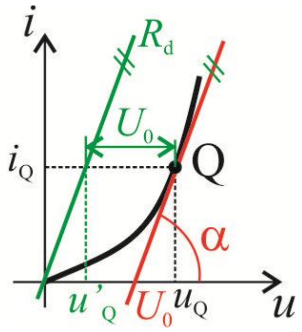
Linearizace charakteristiky v okolí pracovního bodu

Nelineární prvek lze v okolí pracovního bodu nahradit dvojpólem složeným z lineárního prvku a zdroje, který respektuje posunutí charakteristiky lineárního prvku (tj. přímky) do počátku souřadnic.

Př.: Nelineární odpor s charakteristikou dle obrázku nahradíme v okolí pracovního bodu Q linearizovaným modelem složeným z:

a) lineárního odporu R_{d} a zdroje napětí
b) lineárního odporu R_{d} a zdroje proudu

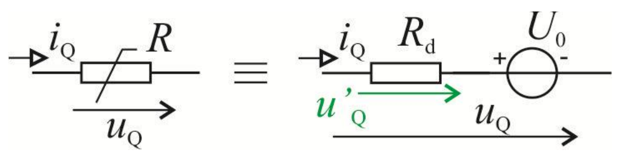
a)



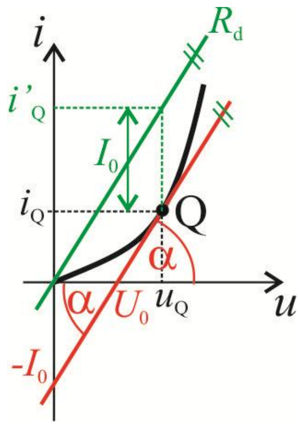
$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}u} = \frac{i_{\mathrm{Q}}}{u_{\mathrm{Q}} - U_0} = \frac{1}{R_{\mathrm{d}}}$

lineární prvek s parametrem R_{d} má charakteristiku přímku procházející počátkem, platí $R_{\mathrm{d}}\, i_{\mathrm{Q}} = u'_{\mathrm{Q}}$,
napětí u_{Q} na nelineárním prvku lze vyjádřit vztahem

$$R_{\mathrm{d}} i_{\mathrm{Q}} + U_0 = u_{\mathrm{Q}}$$



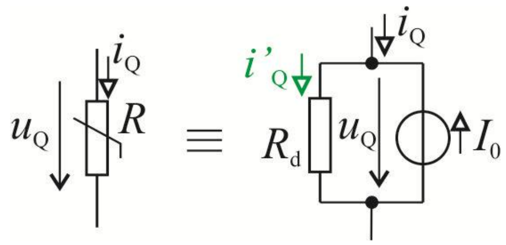
b)



$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{i_{\mathrm{Q}}}{u_{\mathrm{Q}} - U_0} = \frac{I_0}{U_0} = G_{\mathrm{d}}$

při napětí u_{Q} prochází lineárním odporem proud $i'_{\mathrm{Q}} = G_{\mathrm{d}}\, u_{\mathrm{Q}}$,
proud i_{Q}, nelineárním prvkem vyjádříme vztahem

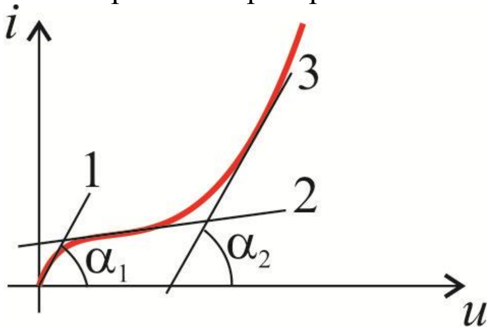
$$i_{\mathrm{Q}} = G_{\mathrm{d}} u_{\mathrm{Q}} - G_{\mathrm{d}} U_0 = G_{\mathrm{d}} u_{\mathrm{Q}} - I_0$$



Z obr. a) a b) je patrné, že při náhradě sériovým spojením je nutno napětí na odporu R_{d} ($u'_{\mathrm{Q}} = R_{\mathrm{d}} i_{\mathrm{Q}}$) zvýšit o hodnotu U_0. Při náhradě paralelním spojením je proud $i'_{\mathrm{Q}} = G_{\mathrm{d}} u_{\mathrm{Q}}$ větší nežli i_{Q}, proto je paralelně k odporu připojen proudový zdroj I_0 s opačnou orientací.

Lineární aproximace po částech

Opakováním předchozího postupu můžeme nahradit nelineární prvek lineárním ve větším rozsahu proudů resp. napětí.



pro i-tý interval platí

$$G_{\mathrm{d}i} = \frac{i_{i+1}-i_i}{u_{i+1}-u_i} = \operatorname{tg} \alpha_i$$

odtud dostaneme

$$u = R_{\mathrm{d}i} i + U_{0i}$$

nebo $\quad i = G_{\mathrm{d}i} u - I_{0i}$

Metody analýzy nelineárních obvodů

Rovnice obvodu formulujeme pomocí Kirchoffových zákonů pro okamžité hodnoty, získané nelineární rovnice lze řešit metodami analytickými, numerickými případně grafickými. Zvolené metodě je nutno přizpůsobit vyjádření nelineární charakteristiky (analytický výraz, graf nebo tabulka). V následujících příkladech se seznámíte se základními postupy při analýze některých jednoduchých úloh.

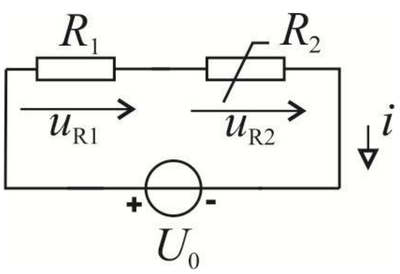
Analytické metody

Předpokládejme, že charakteristika nelineárního prvku je dána analytickým výrazem. Ukážeme si řešení:

a) stejnosměrného obvodu s nelineárním odporem – řešíme nelineární algebraickou rovnici
b) přechodného jevu ve stejnosměrném obvodu s nelineárním induktorem – řešíme nelineární diferenciální rovnici

Analýza stejnosměrných nelineárních obvodů v ustáleném stavu

Př.: Stejnosměrný zdroj napětí napájí obvod složený z lineárního odporu $R_1 = 10\ \Omega$ a nelineárního odporu R_2 s charakteristikou $u_{\mathrm{R2}} = 5i^2$. Určete proud v obvodu a výkon dodávaný zdrojem stejnosměrného napětí $U_0 = 6$ V do obvodu.



Podle 2. Kirchhoffova zákona platí:

$$u_{\mathrm{R1}} + u_{\mathrm{R2}} = U_0$$

vyjádříme napětí na jednoitlivých prvcích

$$R_1 I + 5I^2 = U_0$$

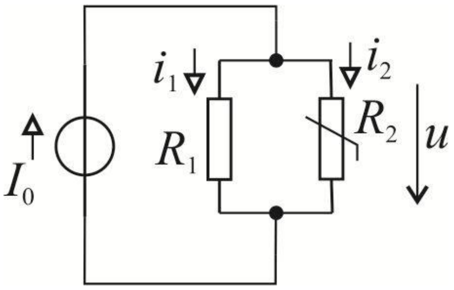
$$I^2 + 2I - 1{,}2 = 0$$

Řešením této kvadratické rovnice dostaneme:

$$I_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+1{,}2} =< \begin{matrix} 0{,}483 \text{ A} \\ -2{,}48 \text{ A} \quad \text{(nemá fyz. význam)} \end{matrix}$$

Výkon dodaný zdrojem pak bude: $\quad P = U_0 I = 6 \cdot 0{,}483 \doteq 2{,}9$ W

Př.: Určete větvové proudy v paralelním spojení lineárního $R_1 = 10\ \Omega$ a nelineárního odporu R_2 s V-A charakteristikou $u = 5i^2$, obvod je napájen ze zdroje stejnosměrného proudu $I_0 = 10$ A.



Pro napětí na paralelním spojení odporů platí:

$U = 5I_2^2 = R_1 I_1 = 10 I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 0{,}5 I_2^2$

z 1. K. zákona plyne

$I_0 = I_1 + I_2 = 0{,}5 I_2^2 + I_2$

$0{,}5 I_2^2 + I_2 - 10 = 0$

$I_{2(1,2)} = -1 \pm \sqrt{1+20} =< \begin{matrix} 3{,}58\ \text{A} \\ -5{,}58\ \text{A} \end{matrix}$

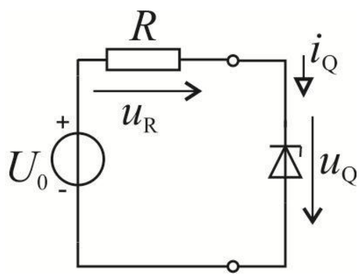
fyzikální význam má jen $I_2 = 3{,}58$ A, pomocí této hodnoty vypočteme proud I_1

$I_1 = 10 - 3{,}58 = 6{,}42\ \text{A}$

Př.: Stabilizační dioda typu KZ 260/6V2 má dle katalogu v pracovním bodě Q tyto hodnoty: proud $I_Q = 0{,}1$ A, napětí $U_Q = 6{,}2$ V a dynamický odpor $R_{dQ} = 2\ \Omega$.

a) Vypočtěte hodnotu odporu R pro nastavení pracovního bodu při napájení diody ze zdroje napětí $U_0 = 12$ V – obr. a).
b) Nahraďte diodu linearizovaným modelem a vypočtěte velikost napětí U_{0Q} – obr. b).
c) Vypočtěte hodnotu proudu I_{Q1} a napětí U_{Q1}, zvýší-li se hodnota napětí o 5%.

a) Výpočet odporu R

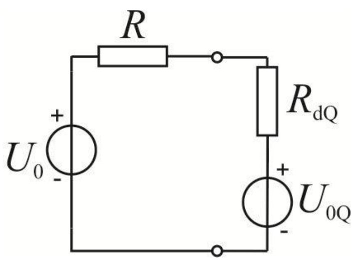


$U_R + U_Q = U_0$

$U_R = U_0 - U_Q = 5{,}8\ \text{V}$

$R = \frac{U_R}{I_Q} = 58\ \Omega$

b) Výpočet napětí U_{0Q} – diodu nahradíme linearizovaným modelem



$U_R + U_{RdQ} = U_0 - U_{0Q}$

$U_{0Q} = 12 - 5{,}8 - 0{,}2$

$U_{0Q} = 6\ \text{V}$

c) Výpočet hodnoty I_{Q1} a U_{Q1}

$U_{01} = 1{,}05 U_0 = 12{,}6\ \text{V}$

$I_{Q1} = \frac{U_{01} - U_{0Q}}{R + R_{dQ}} = 0{,}11\ \text{A}$

$U_{Q1} = R_{dQ} I_{Q1} + U_{0Q} = 6{,}22\ \text{V}$

Analýza přechodného děje ve stejnosměrných nelineárních obvodech

Řešíme nelineární diferenciální rovnice, postup závisí na způsobu vyjádření nelineární charakteristiky.

Př.: Formulujte rovnice pro řešení přechodného děje v obvodu RL připojeném v čase $t = 0$ ke zdroji stejnosměrného napětí U_0. Nelineární induktor má charakteristiku danou:

a) analytickým výrazem
b) grafem

Postup ad a)

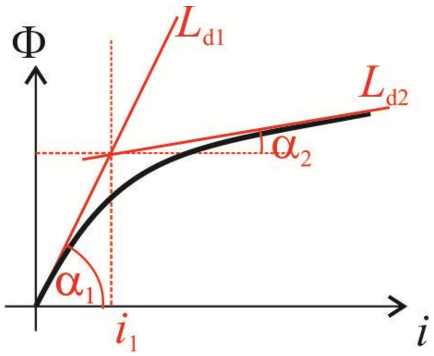
Wb-A charakteristika je dána vztahem $i = k\Phi^2$

$$u_\mathrm{R} + u_\mathrm{L} = U_0$$
$$Ri + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = U_0$$
$$Rk\Phi^2 + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = U_0$$

Nelineární diferenciální rovnici pro Φ lze řešit například numericky v MATLABu.

Postup ad b)

Nelineární charakteristika je dána graficky, použijeme aproximaci po částech, v grafu odečteme dvě hodnoty dynamické indukčnosti odpovídající dvěma přímkám, které znázorňují grafickou derivaci charakteristiky. Jejich průsečík určuje bod, ve kterém proud dosáhne hodnotu i_1.



Proud v obvodu nejprve vzroste z nulové hodnoty na i_1 za dobu t_1, pro tento interval určíme L_{d1}

$t \in \langle 0, t_1 \rangle \quad i \in \langle 0, i_1 \rangle \qquad L = L_{\mathrm{d}1} = \mathrm{tg}\,\alpha_1$

pro $t > t_1 \quad i > i_1 \qquad L = L_{\mathrm{d}2} = \mathrm{tg}\,\alpha_2$

pro $t \in \langle 0, t_1 \rangle$ platí

$$L_{\mathrm{d}1}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = U_0 \qquad \tau_1 = \frac{L_{\mathrm{d}1}}{R}$$

Řešení této rovnice je

$$i(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau_1}} + I_0 \qquad I_0 = \frac{U_0}{R} = i(\infty)$$
$$i(0) = 0 = K + I_0 \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$$

Určení okamžiku t_1, ve kterém proud dosáhne hodnoty i_1

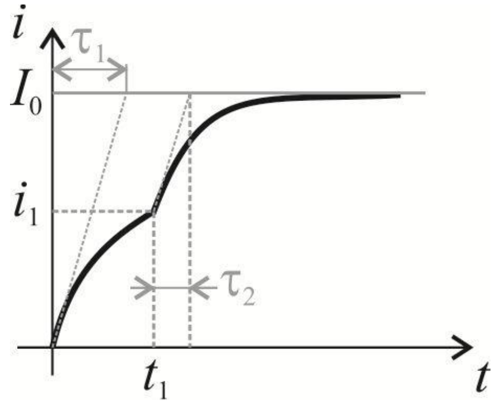
$$i_1 = i(t_1) = I_0\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau_1}}\right) \qquad \Rightarrow t_1$$

Pro $t > t_1$ řešíme rovnici

$$L_{\mathrm{d}2}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = U_0 \qquad \tau_2 = \frac{L_{\mathrm{d}2}}{R}$$
$$i(t) = Ke^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}} + I_0 \qquad I_0 = \frac{U_0}{R} = i(\infty)$$

Z počáteční podmínky pro $t = t_1$ vypočteme $i_1 = K + I_0 \quad \Rightarrow \quad K = i_1 - I_0$

$$i(t) = -I_0 e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}} + I_0 = I_0\left(1 - e^{-\left(\frac{t_1}{\tau_1}+\frac{t-t_1}{\tau_2}\right)}\right)$$



Výsledný průběh proudu je na obrázku, v čase t_1 se změní časová konstanta, přičemž $\tau_1 > \tau_2$, neboť $L_{D1} > L_{D2}$. Proud se mění spojitě.