4 METODY ŘEŠENÍ STACIONÁRNÍCH ELEKTRICKÝCH A MAGNETICKÝCH POLÍ

4.1 ZÁKLADNÍ VZTAHY

Metody řešení stacionárních elektromagnetických polí

- přímá integrace Maxwellových rovnic v integrálním tvaru
- okrajové úlohy pro potenciály
- integrální výrazy pro potenciály a vektory pole
- metoda zrcadlení

1. Přímá integrace Maxwellových rovnic v integrálním tvaru

Lze použít pro symetrické úlohy, je-li znám tvar ekvipotenciál resp. siločar

Elektrostatické pole řešíme pomocí 3. Maxwellovy rovnice

$$\oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S} = Q$$

je-li $S \equiv$ ekvipotenciální plocha, pak $\mathbf{D}$ je rovnoběžné s $d\mathbf{S}$. Pro symetrické případy (například bodový náboj, koule vodivá nebo dielektrická, tenký vodič, válcový vodič nebo dielektrikum apod.) platí, že D = konst. na S, pak bude

$$D\oint_S dS = Q \qquad \Rightarrow \qquad D = \frac{Q}{S} \qquad E = \frac{D}{\varepsilon}$$

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{l} \qquad \text{resp.} \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varphi$$

Elektrické pole proudové řešíme pomocí rovnice kontinuity

$$\oint_S \mathbf{J}d\mathbf{S} = 0$$

je-li S $\equiv$ ekvipotenciální plocha, pak $\mathbf{J}$ je rovnoběžné s $d\mathbf{S}$. Označíme–li I proud vtékající do plochy tenkým vodičem a J proudovou hustotu vytékajícího proudu do okolního vodivého prostředí, pak lze rovnici kontinuity přepsat do tvaru:

$$J\oint_S dS = I \quad \Rightarrow \qquad J = \frac{I}{S} \qquad E = \frac{J}{\gamma}$$

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E}\,d\mathbf{l} \qquad \text{resp.} \qquad \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varphi$$

Magnetické pole stacionární řešíme pomocí 1. Maxwellovy rovnice

$$\oint_c \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = I$$

je-li křivka c ≡ siločára, pak vektor $\boldsymbol{H}$ je rovnoběžný s $d\boldsymbol{l}$, pro symetrické případy (je H = konst. podél siločáry c), bude

$$H \oint_c dl = I \qquad H = \frac{I}{l} \qquad B = \mu H \qquad \Phi = \int_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S}$$

2. Okrajové úlohy pro potenciály

Rovnice pro potenciály stacionárního elektromagnetického pole (Laplaceova resp. Poissonova) jsou uvedeny v tabulce ve 2. kapitole. K jejich řešení je nutno formulovat hraniční podmínky pro potenciál (okrajové podmínky a podmínky na rozhraní). Používáme metody:

a) analytické – 1D úlohy jsou popsány obyčejnými diferenciálními rovnicemi
– 2D, 3D úlohy vedou na parciální diferenciální rovnice

b) numerické – metoda konečných diferencí (MKD),
– metoda konečných prvků (MKP),
vedou na soustavu algebraických rovnic pro potenciály v uzlech diskretizační sítě

3. Integrální výrazy pro potenciály a vektory pole

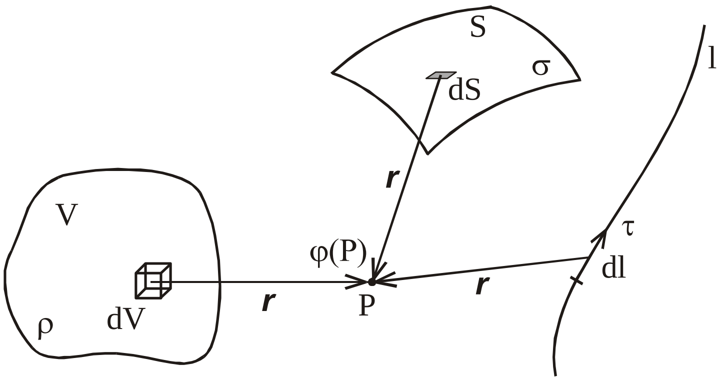
Integrální výrazy pro potenciály jsou partikulárním řešením Poissonovy rovnice pro potenciály (tj. $\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon$, $\Delta\boldsymbol{A} = -\mu\,\boldsymbol{J}$).

Elektrostatické pole

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho\, dV}{V}$$

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\sigma\, dS}{V}$$

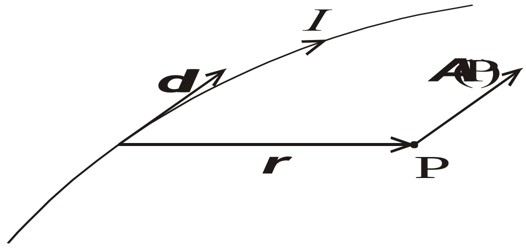
$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{\tau\, dl}{V}$$



Magnetické pole stacionární

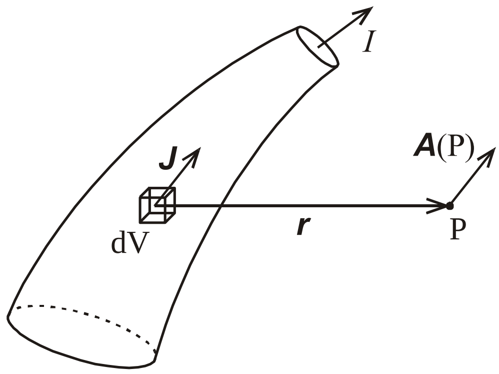
Vektorový potenciál magnetického pole tenkého vodiče

$$\boldsymbol{A}(P) = \frac{\mu I}{4\pi}\int_{l}\frac{\boldsymbol{dl}}{r}$$



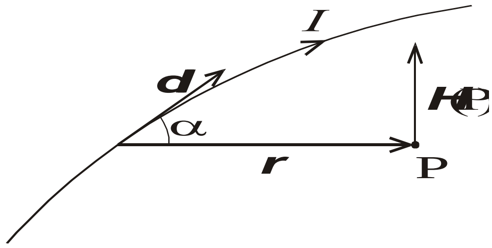
Vektorový potenciál magnetického pole masivního vodiče

$$\boldsymbol{A}(P) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{r}\frac{\boldsymbol{J}\,dV}{r}$$



Intenzita magnetického pole tenkého vodiče (Biotův-Savartův zákon)

$$\boldsymbol{H}(P) = \frac{I}{4\pi}\int_{l}\frac{\boldsymbol{dl}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$



Dovedeme-li určit směr vektoru $\boldsymbol{H}$, počítáme pouze jeho velikost ze vztahu

$$H(P) = \frac{I}{4\pi}\int_{l}\frac{\sin\alpha}{r^2}\,dl$$

Intenzita magnetického pole masivního vodiče je dána objemovým integrálem

$$\boldsymbol{H}(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{V}\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,dV$$

4. Metoda zrcadlení

Oprávněnost použití a podstata metody zrcadlení vyplývá z věty o existenci a jednoznačnosti Dirichletovy resp. Neumannovy úlohy pro potenciál. Princip a použití metody je vysvětlen v řešení příkladů **P–78** až **P–84**.