ESF II projekt Západočeské univerzity v Plzni

reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/18_056/0013239

Chyby a nejistoty měření

Přednáška KET/ELM

J. Švarný

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Chyby a nejistoty měření

Obsah:

- Chyby měření – definice
- Chyby měření – matematické vyjádření
- Chyby měření – rozdělení dle příčiny vzniku
- Systematické chyby
- Náhodné chyby
- Elektromechanické přístroje – vlastnosti a chyby
- Digitální přístroje – vlastnosti a chyby
- Chyby nepřímých měření
- Nejistoty měření – definice
- Standardní nejistota typu A
- Standardní nejistota typu B
- Kombinovaná nejistota
- Rozšířená nejistota
- Literatura

Chyby měření

Definice

- Chyba měření – rozdíl mezi změřenou a pravou (skutečnou) hodnotou.
- Pravá (skutečná) hodnota není známa a není ji možné měřením určit.

Příčiny vzniku chyb:

- Nedokonalosti měřicích přístrojů
- Nedokonalost měřicích metod
- Variabilita podmínek měření
- Nezkušenost měřiče

Chyby měření

Matematické vyjádření

Absolutní chyba Δ

$$\boxed{\Delta = x - x_0}$$

kde: x ... změřená hodnota

x_0 ... pravá (skutečná) hodnota

Relativní chyba δ

$$\boxed{\delta = \frac{\Delta}{x_0} \cong \frac{\Delta}{x} \quad (\text{ - })}$$

Relativní chyba v **procentch** resp. **ppm** (parts per million)

$$\boxed{\delta_{\%} = \frac{\Delta}{x_0} 100 \quad (\text{ - })}$$

$$\boxed{\delta_{ppm} = \frac{\Delta}{x_0} 10^6 \quad (\text{ - })}$$

Chyby měření

Rozdělení podle příčin vzniku

Systematické – zkreslují výsledek pravidelným způsobem. Při opakování měření (za stejných podmínek) nemění znaménko ani velikost. Vznikají nedokonalostí metod a přístrojů, popř. chybou pozorovatele.

Náhodné – velikost a znaménko chyby se při opakovaném měření (za stejných podmínek) mění náhodně a nepředvídatelně. Vznikají kombinací velkého počtu náhodných vlivů (teplotní výkyvy, rušivá elektromagnetická pole, šum)

Hrubé – zkreslují výsledek zjevně nereálným způsobem. Vznikají většinou chybou pozorovatele.

Systematické chyby

Charakteristika

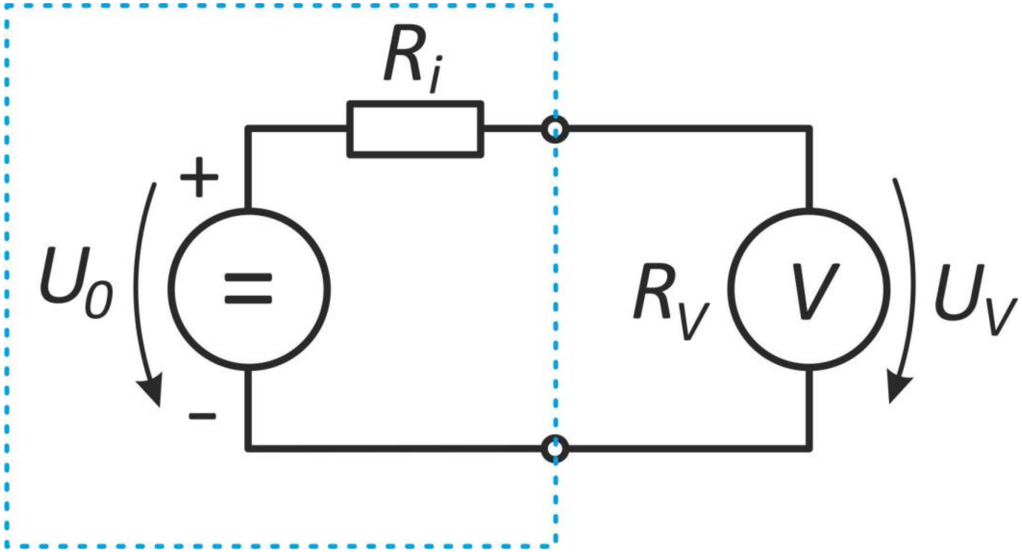
- Při opakovaném měření nemění znaménko ani velikost.
- Výsledek je zkreslen pravidelným způsobem.
- Většinou můžeme určit příčinu jejich vzniku.
- Lze je účinně potlačit – volbou vhodnější metody nebo vhodnějšího přístroje (viz příklad dále)
- Lze je odstranit – matematickou korekcí výsledku měření (viz příklad dále)

Systematické chyby

Příklad: Měření napětí skutečným voltmetrem

Pro $R_V < \infty$ a $R_i > 0$

je vždy: $U_V < U_0$



Absolutní chyba metody:

$\Delta = U_V - U_0$

Relativní chyba metody:

$$\delta = \frac{\Delta}{U_0} = \frac{U_V - U_0}{U_0} = \frac{-R_i}{R_i + R_V}$$

Chybu metody lze zde potlačit volbou voltmetru s větším R_V.

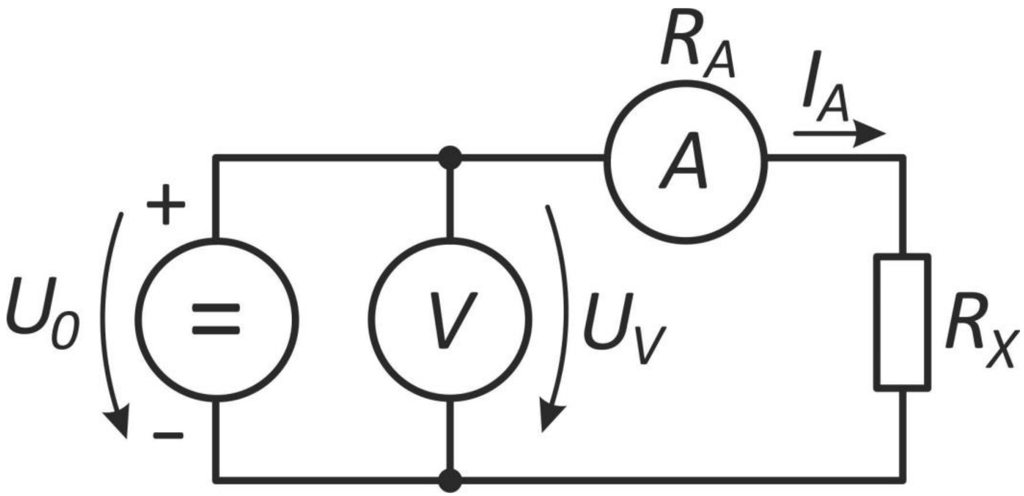
Systematické chyby

Příklad: Ohmova metoda měření odporů

S reálnými přístroji je vždy:

$$R_x^* = \frac{U_V}{I_A} \ , R_x^* \neq R_x$$

$$R_x = \frac{U_V - \ U_A}{I_A} = R_x^* - R_A$$



Absolutní chyba metody:

$$\Delta = R_x^* - R_x = R_A$$

Relativní chyba metody:

$$\delta = \frac{\Delta}{R_x} = \frac{R_A}{R_x}$$

Chybu metody lze zde odstranit korekcí: $\boldsymbol{R_x = R_x^* - R_A}$.

Náhodné chyby
Charakteristika

- Při opakovaném měření mění velikost i znaménko.
- Vyskytují se při každém měření.
- Jsou způsobeny kombinací vnějších vlivů.
- Není možné je předvídat.
- Jejich výskyt popisuje normální (Gaussovo) rozdělení.
- Lze je charakterizovat směrodatnou odchylkou nebo rozptylem.

Náhodné chyby

Pro nekonečný počet opakování měření veličiny x (za stejných podmínek měření) tj. $n \to \infty$ (tzv. základní soubor) platí:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

kde:

x…hodnota některého z provedených měření

$f(x)$…hustota pravděpodobnosti výskytu hodnoty o velikosti x

x_0…skutečná hodnota měřené veličiny

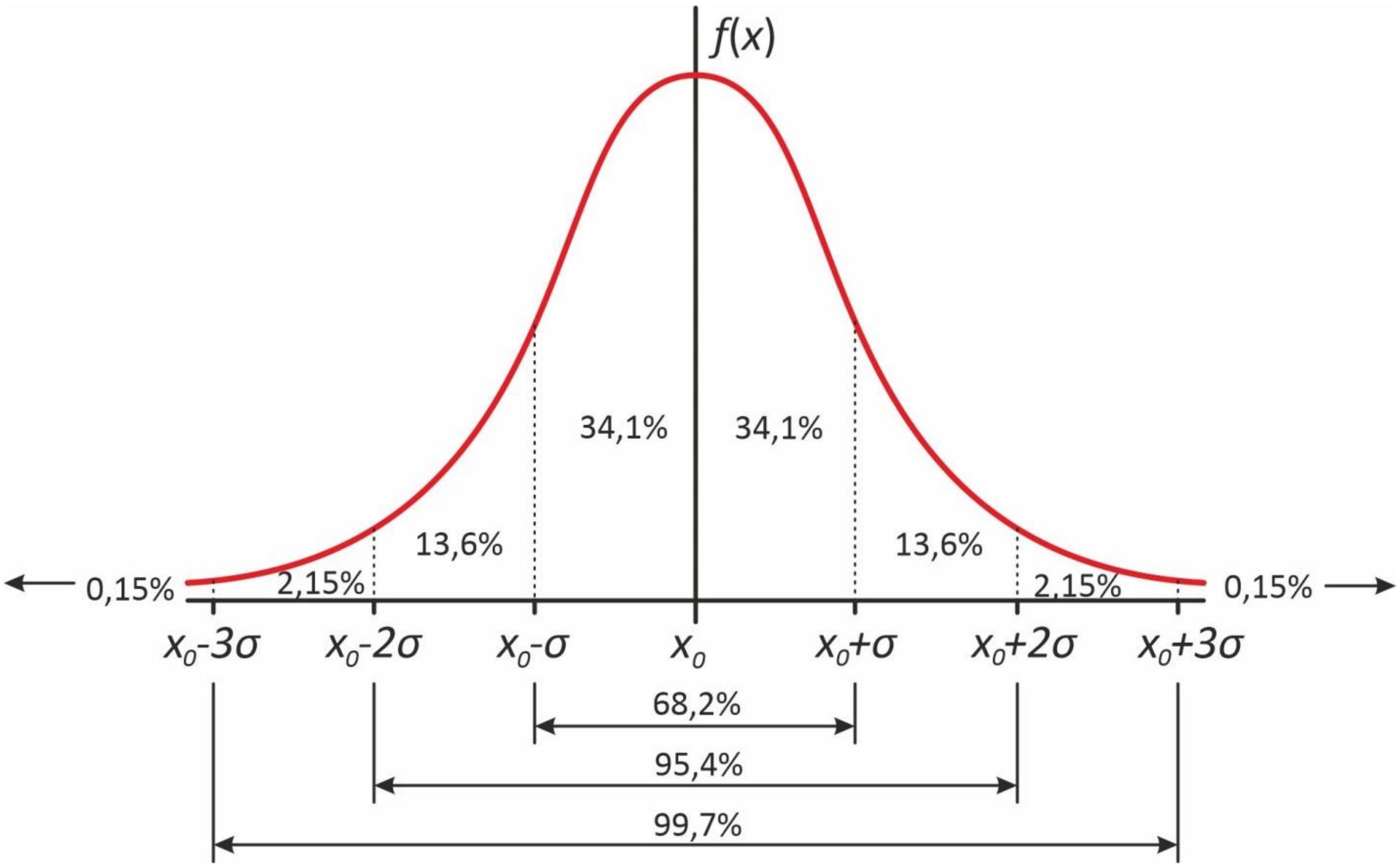
σ…směrodatná odchylka – průměrná odchylka naměřené hodnoty x od skutečné hodnoty x_0

σ^2 …rozptyl

Náhodné chyby

Gaussova křivka

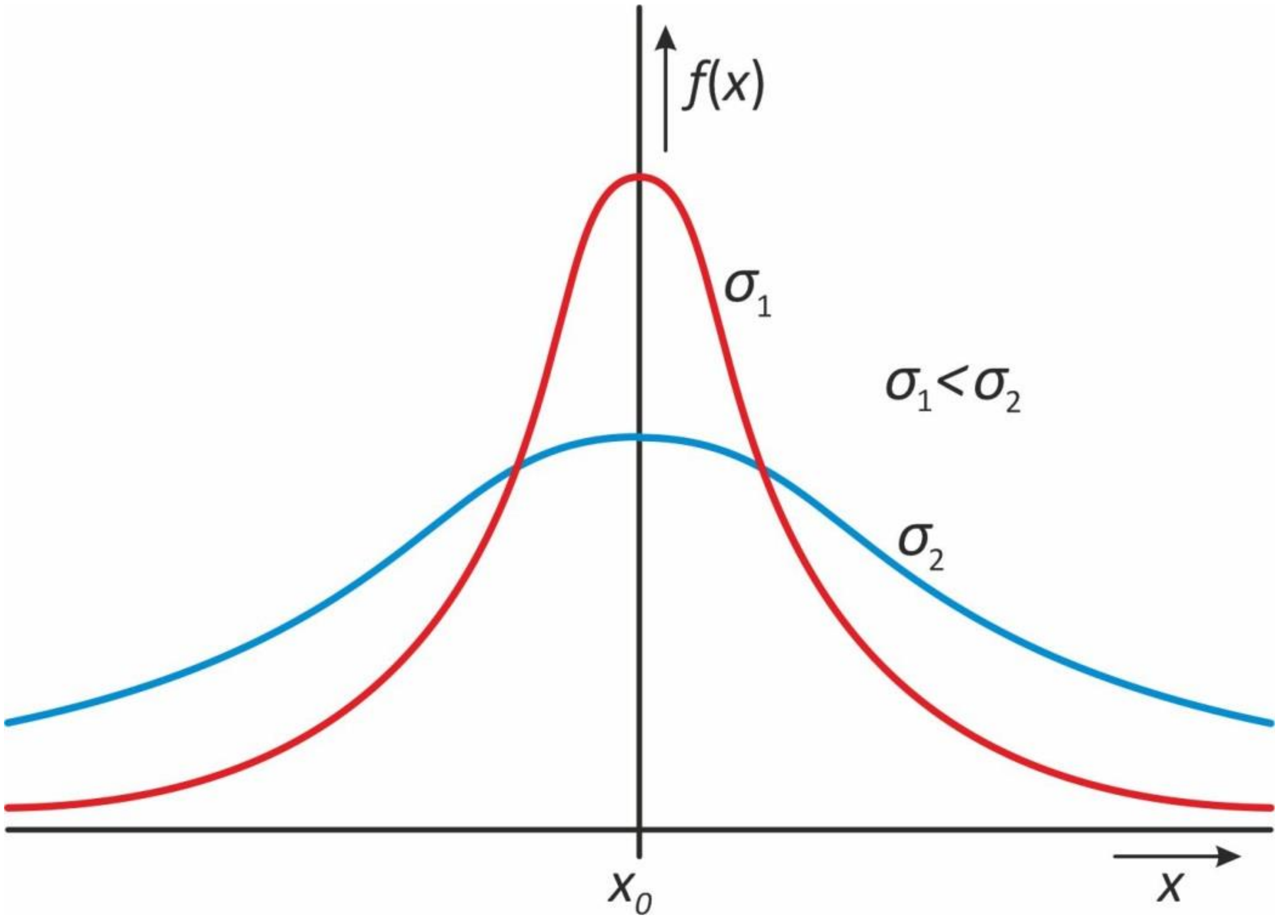
Interval výskytu měřené hodnoty	Pravděpodobnost výskytu x v intervalu
$\langle x_0 - \sigma\ ;\ x_0 + \sigma \rangle$	$68,2\ \%$
$\langle x_0 - 2\sigma\ ;\ x_0 + 2\sigma \rangle$	$95,4\ \%$
$\langle x_0 - 3\sigma\ ;\ x_0 + 3\sigma \rangle$	$99,7\ \%$



Náhodné chyby

Gaussova křivka

Velikost rozptylu σ^2 resp. směrodatné odchylky σ má vliv na tvar Gaussova rozdělení:



Náhodné chyby

Reálná situace

- Pracujeme se souborem složeným z konečného počtu změřených hodnot (tzv. **výběrový soubor**).
- Reálně nelze změřit nekonečně mnoho hodnot.
- Nelze proto určit skutečnou hodnotu x_0.
- Lze určit pouze **nejpravděpodobnější** hodnotu – aritmetický průměr $\bar{x}$ z n změřených hodnot $x_1, x_2, \dots x_n$.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

kde:

$\bar{x}$…aritmetický průměr (výběrový)

n…počet měření

x_i…hodnoty měřené veličiny
$(i = 1, 2, \dots n)$

Náhodné chyby

Reálná situace

Rozptyl hodnot výběrového souboru (okolo výběrového aritmetického průměru) charakterizuje tzv. **výběrová směrodatná odchylka** jednoho měření (s).

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}}$$

kde:

s…výběrová směrodatná odchylka jednoho měření

x_i…hodnoty měřené veličiny ($i = 1, 2, \dots n$) tj. hodnoty výběrového souboru

n…počet měření

Náhodné chyby

Reálná situace

Pro posouzení výsledků opakovaného měření je podstatná znalost odchylky výběrového průměru od skutečné hodnoty. Zavádí se proto tzv. **výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru** ($\bar{s}$).

$$\boxed{\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}}$$

kde:

$\bar{s}$…výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru

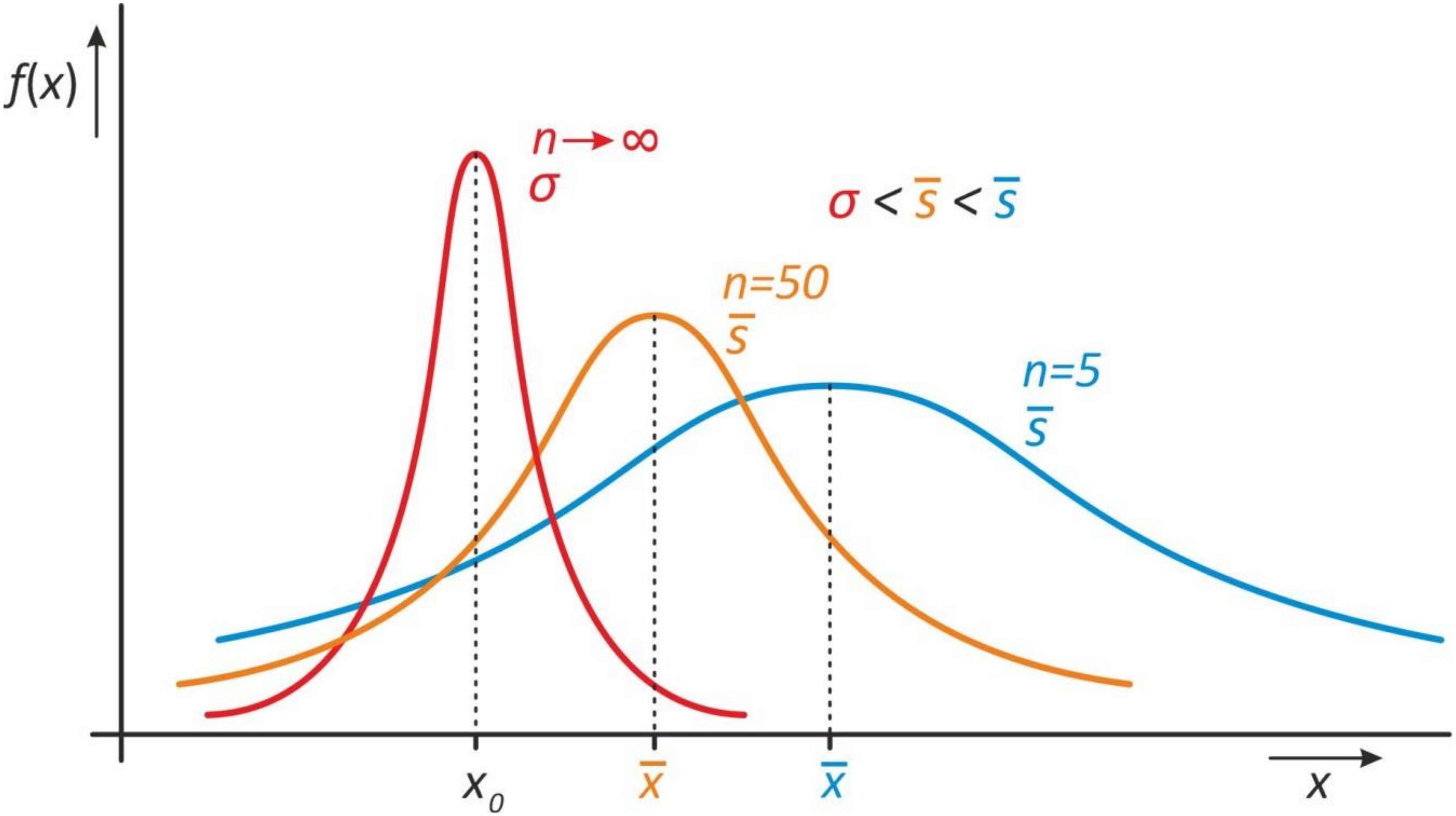
$\bar{x}$…aritmetický průměr (výběrový)

n…počet měření

x_i…hodnoty měřené veličiny ($i = 1, 2, \dots n$) tj. hodnoty výběrového souboru

Náhodné chyby

Reálná situace

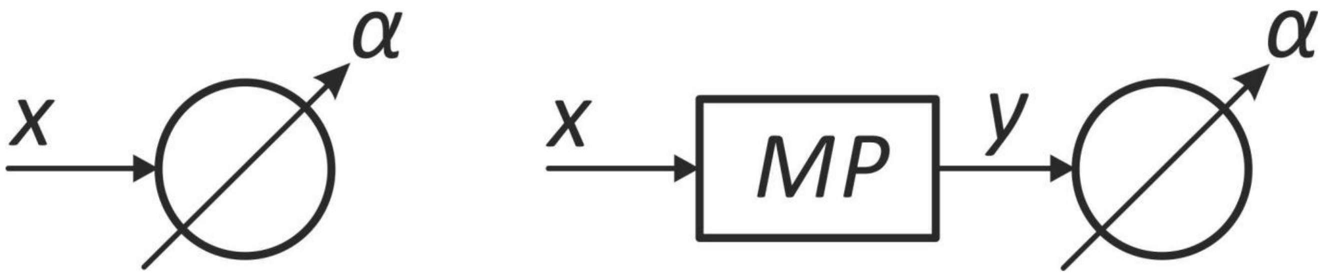


Vliv počtu měření na hodnotu aritmetického průměru $\bar{x}$ *a směrodatnou odchylku* $\bar{s}$

Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

Blokové uspořádání



MP…měřicí převodník

x…měřená veličina

y…veličina na výstupu měřicího převodníku

α…výchylka ručky

α_m…maximální výchylka ručky

Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

Základní pojmy

Rozsah (R) – celkový rozsah měřitelných hodnot

Měřicí rozsah (M) – část rozsahu umožňující měření s předepsanou přesností $(M \leq R)$

Konstanta měřicího rozsahu (K)– koeficient přepočtu výchylky na měřenou hodnotu

$$\boxed{K = \frac{M}{\alpha_m}}$$

Citlivost (C) – poměr změny údaje přístroje a měřené veličiny

$$\boxed{C = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\alpha_m}{M}\bigg|_{lin.stupnice}}$$

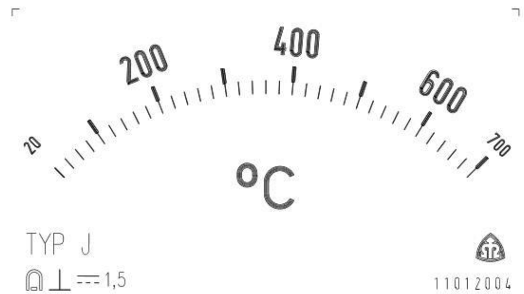
Vlastní spotřeba – výkon odebíraný z měřeného obvodu

Rozlišení – dáno dělením stupnice

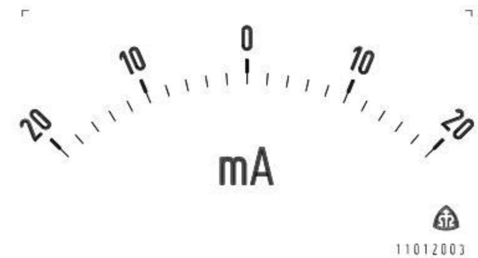
Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

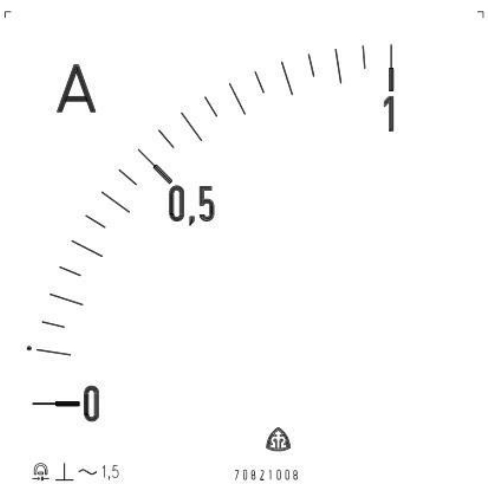
Lineární (rovnoměrná)

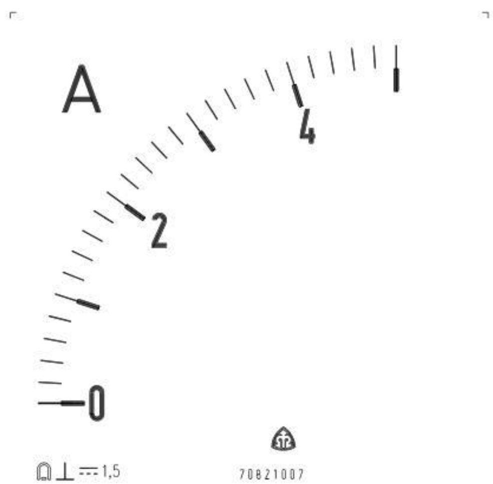


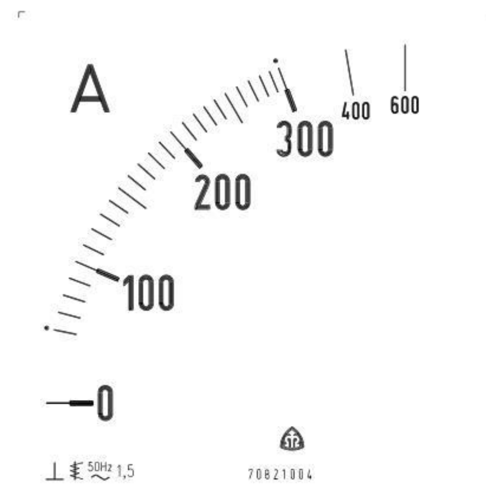
S potlačenou nulou



S nulou uprostřed





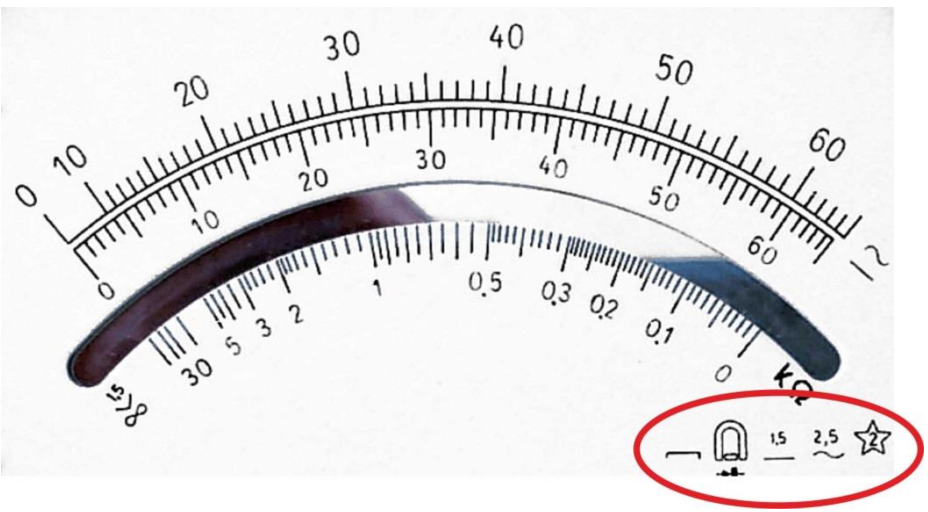


Příklady stupnic s různě vymezeným měřicím rozsahem

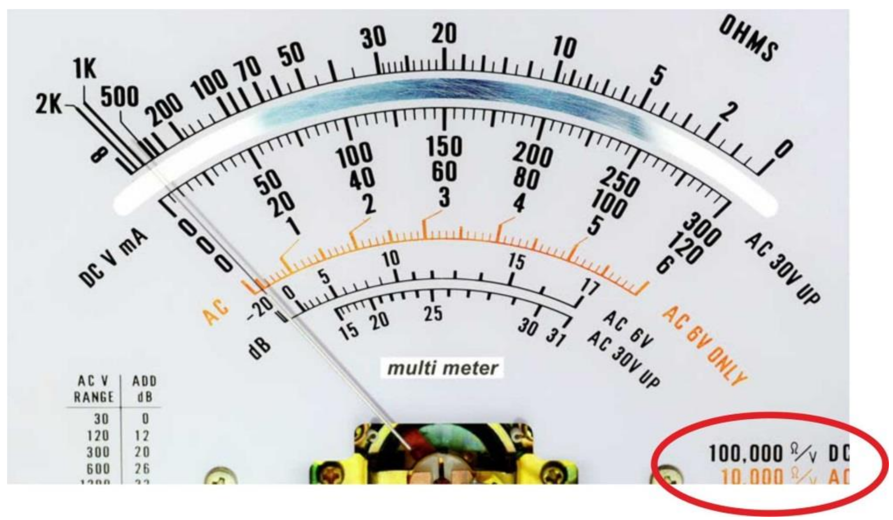
Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

Na stupnici bývají umístěny také důležité **značky** a další doplňující **údaje** charakterizující přístroj



Značky na přístrojích

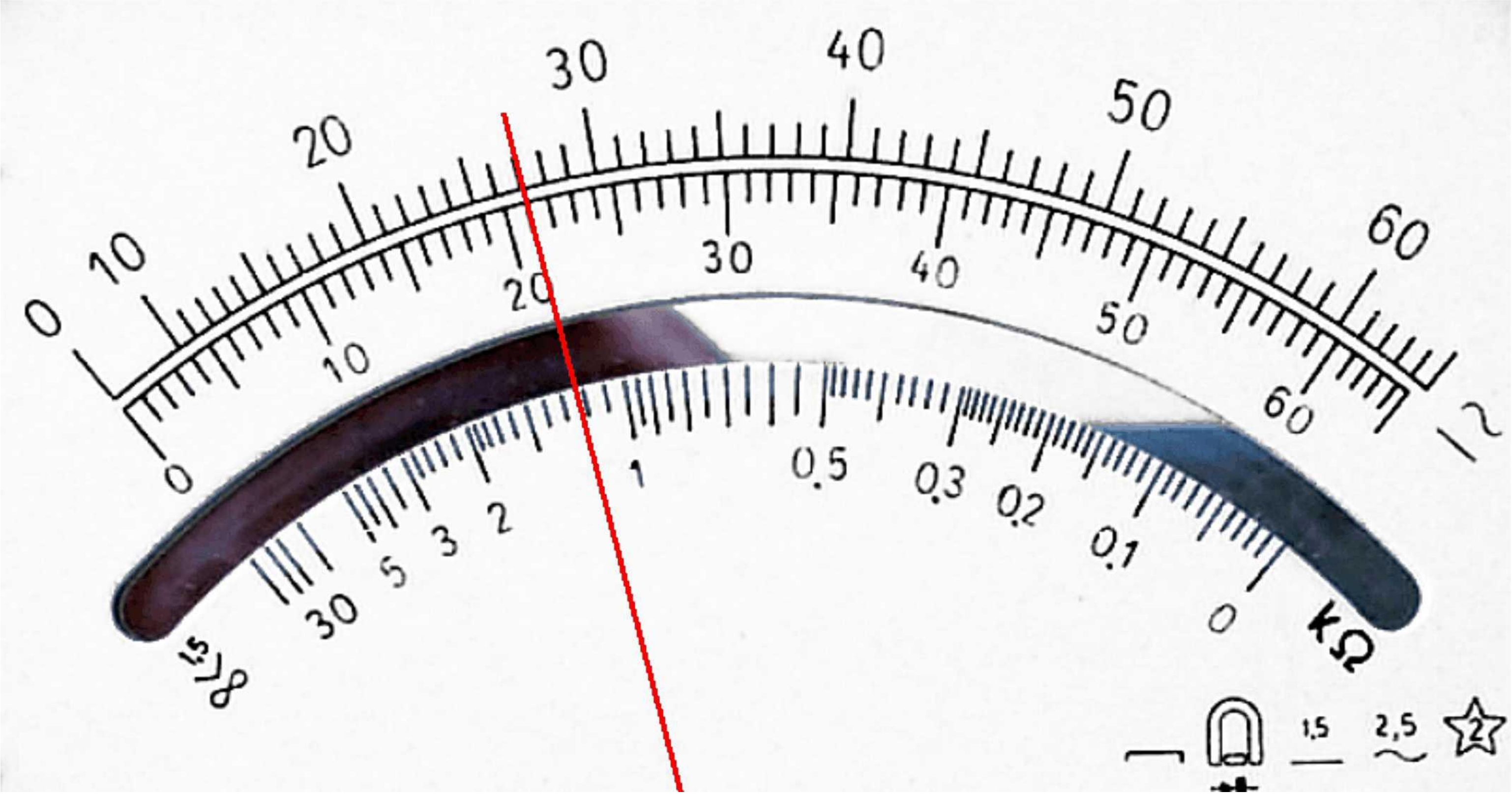


Vnitřní odpory

Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

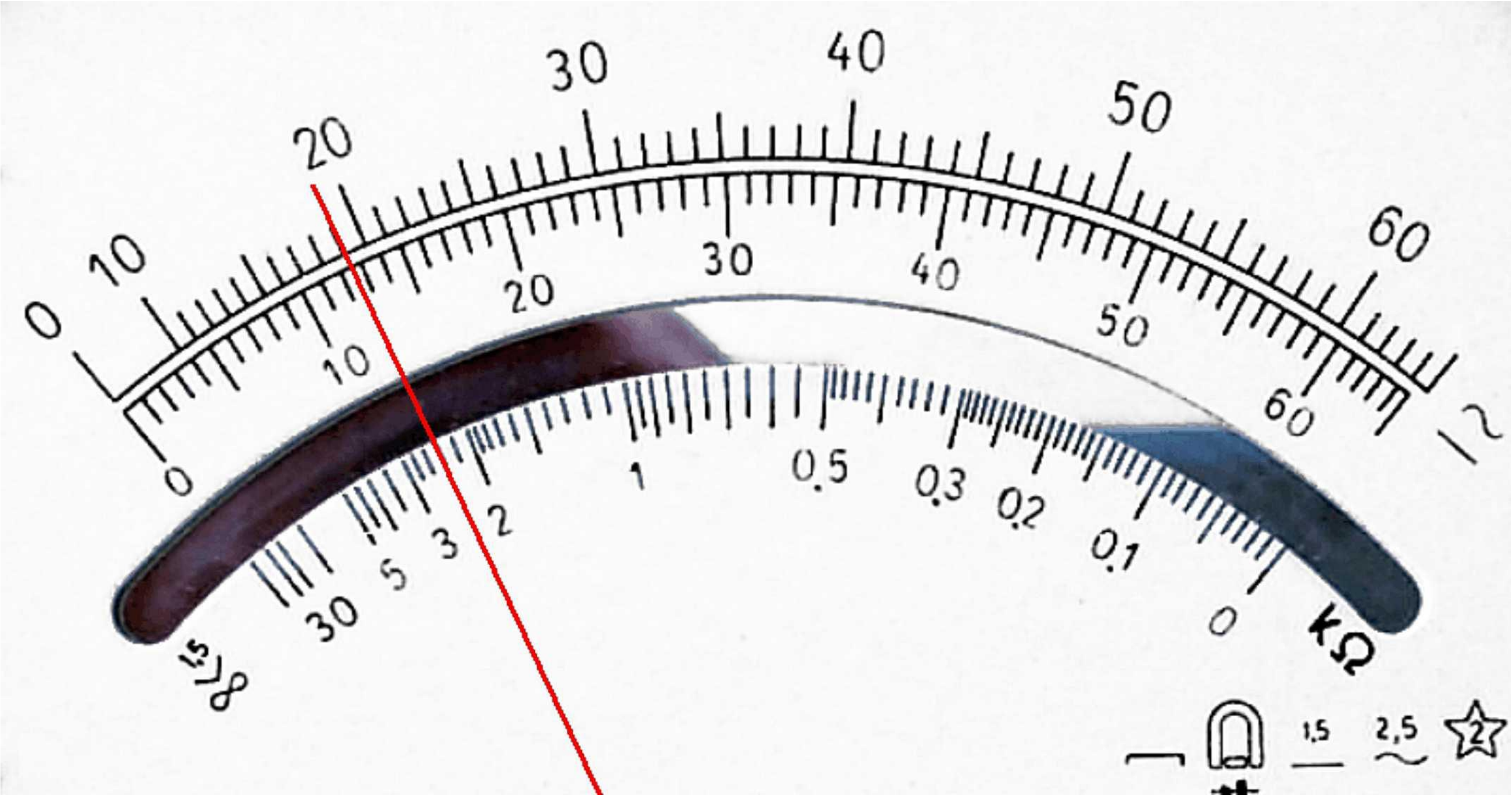
Příklad: Čtení údaje ze stupnice ručkového přístroje. Jakou hodnotu ukazuje přístroj, je-li na stejnosměrném rozsahu 60 V?



Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

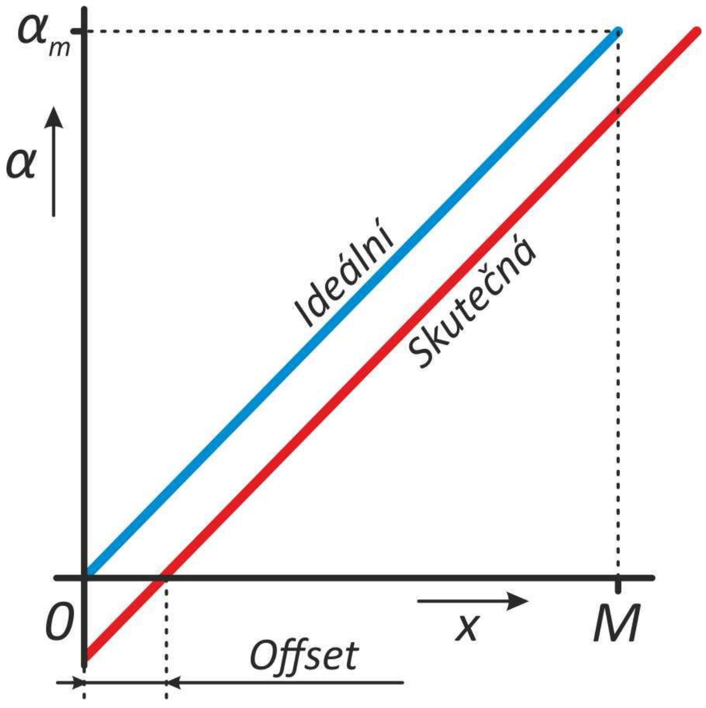
Příklad: Čtení údaje ze stupnice ručkového přístroje. Jakou hodnotu ukazuje přístroj, je-li na střídavém rozsahu 0,12 mA?



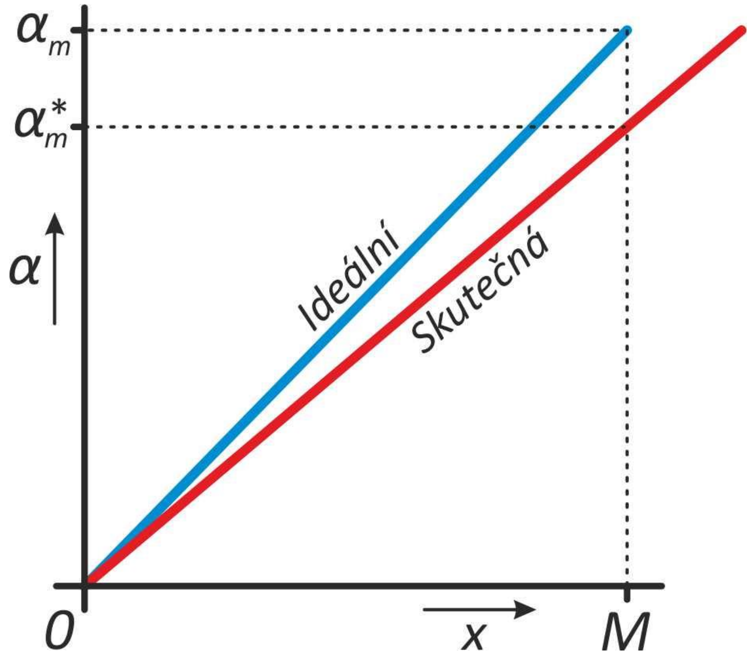
Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

- Chyba elektromechanického přístroje je udávána tzv. **třídou přesnosti** (*TP*).
- Na velikost *TP* má vliv kumulace nedokonalostí měřidla.



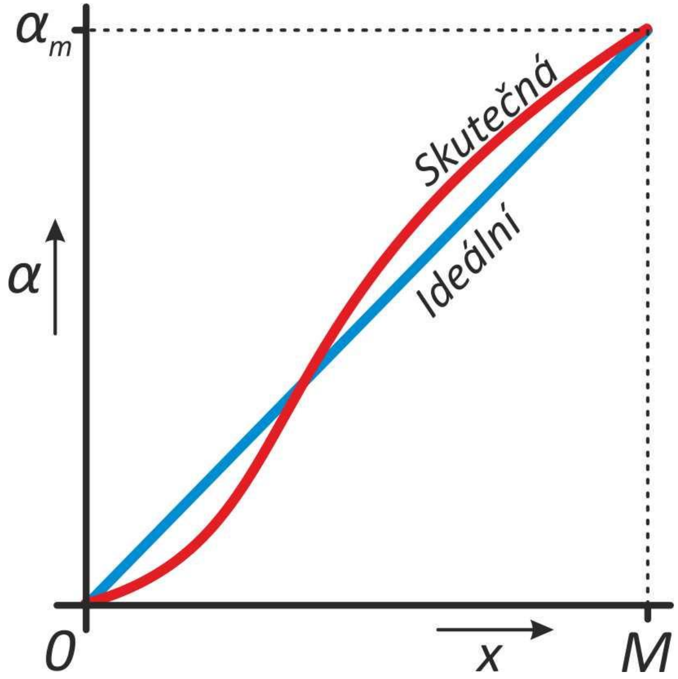
Chyba nuly



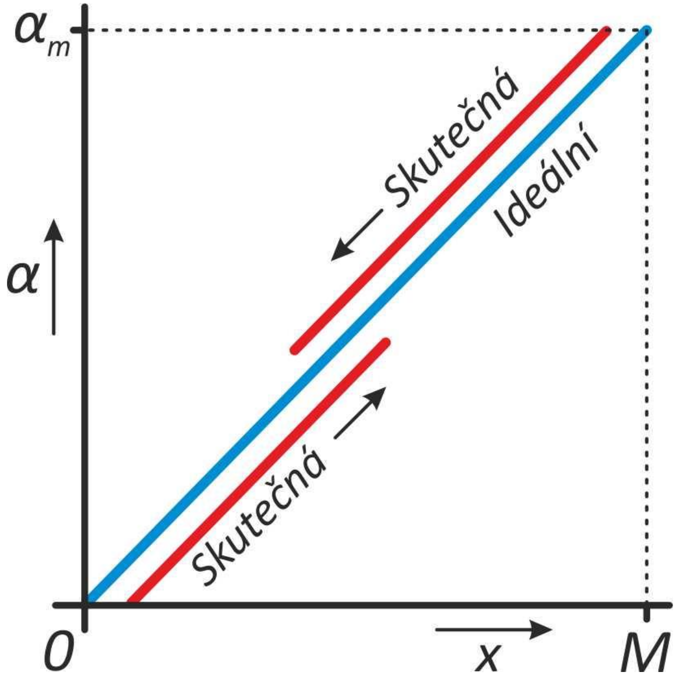
Chyba zisku

Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby



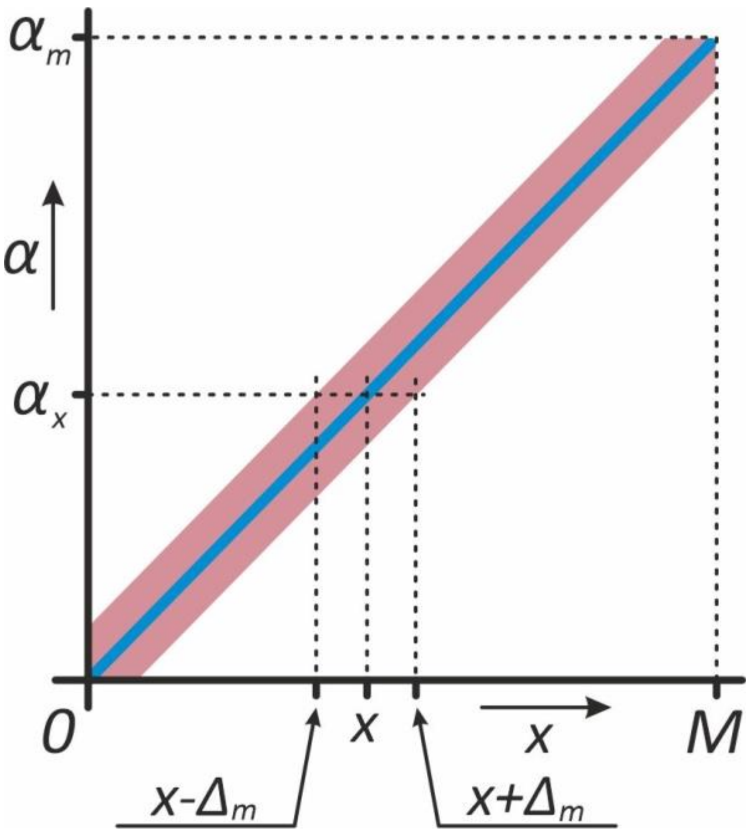
Chyba linearity



Chyba reverzibility

Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby



Třída přesnosti (TP)

$$\boxed{TP \doteq \frac{|\Delta_m|}{M} 100}$$

kde:

M...měřicí rozsah

Δ_m...maximální absolutní chyba zjištěná v rámci měřicího rozsahu

Řada tříd přesnosti: **0,05 - 0,1 - 0,2 - 0,5 - 1 - 1,5 - 2,5 - 5**

Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

Příklad: Voltmetr má *TP*=1 a stupnici 60 d. Na rozsahu 12 V ukazoval výchylku 23 d. Určete velikost změřeného napětí a maximální absolutní chybu a relativní chybu změřené hodnoty.

$$K = \frac{M}{\alpha_m} = \frac{12}{60} = 0{,}2\ \mathrm{V/d}$$

$$U = K\alpha = 0{,}2 \cdot 23 = \underline{4{,}6\ \mathrm{V}}$$

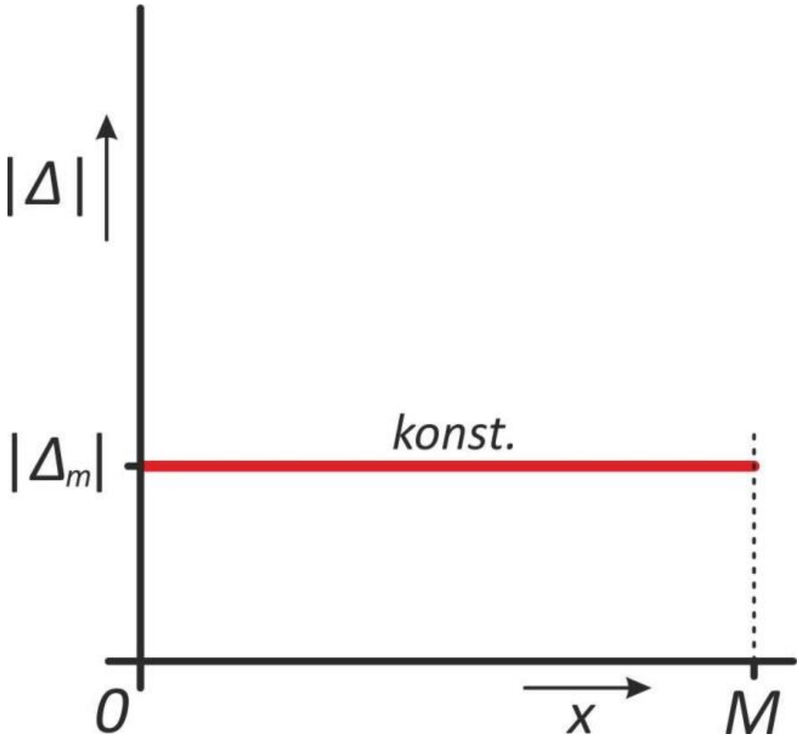
$$TP = \frac{|\Delta_m|}{M} 100 \Rightarrow \Delta_m = \pm\frac{TP\ M}{100} = \pm\frac{1 \cdot 12}{100} = \underline{\pm 0{,}12\ \mathrm{V}}$$

$$\delta_m = \frac{\Delta_m}{U} 100 = \frac{\pm 0{,}12}{4{,}6} 100 = \underline{\pm 2{,}6\ \%}$$

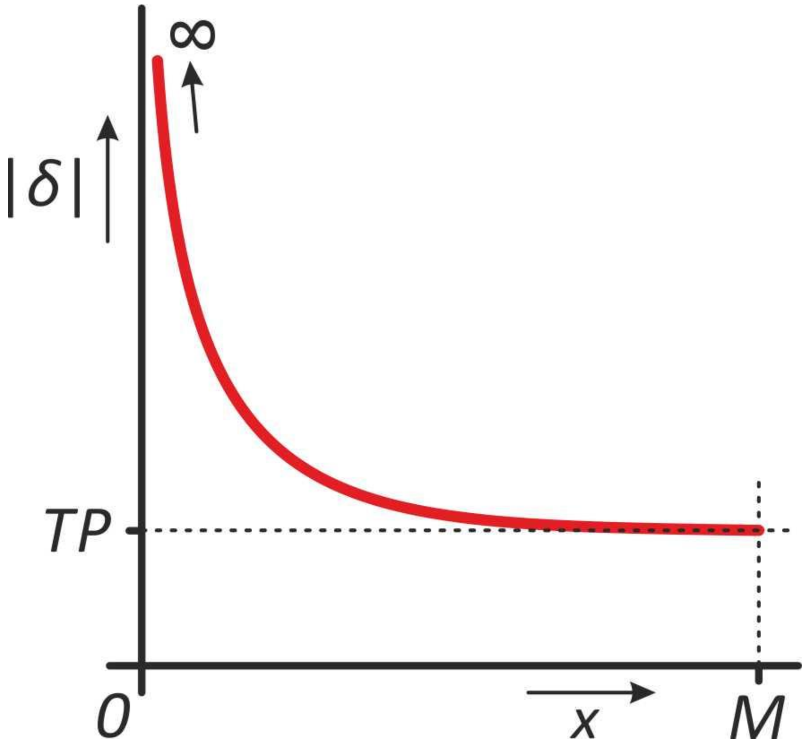
Elektromechanické přístroje

Vlastnosti a chyby

Průběh chyby ručkového přístroje v závislosti na změřené hodnotě



Absolutní chyba

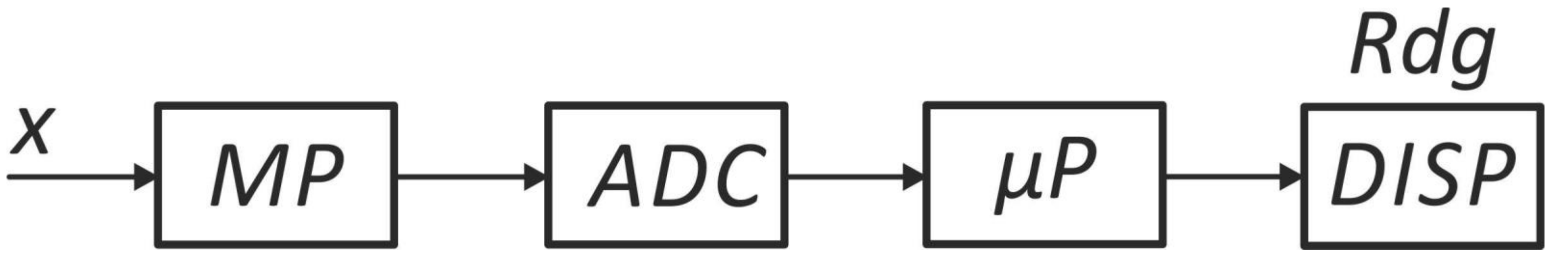


Relativní chyba

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Zjednodušené blokové schéma digitálního přístroje



MP...měřicí převodník

ADC...analogově-digitální převodník

μP...mikropočítač

$DISP$...displej

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Základní pojmy:

Rozlišení – nejmenší změna měřené veličiny detekovatelná přístrojem na daném rozsahu

Kvantovací krok ADC – rozdíl dvou sousedních kvantovacích hladin tj. nejmenší přírůstek, který je schopen ADC detekovat

Přesnost měření – Udává se pro každý rozsah, měřenou veličinu a konkrétní nastavení přístroje zvláštním samostatným předpisem. Zpravidla má dvě složky:

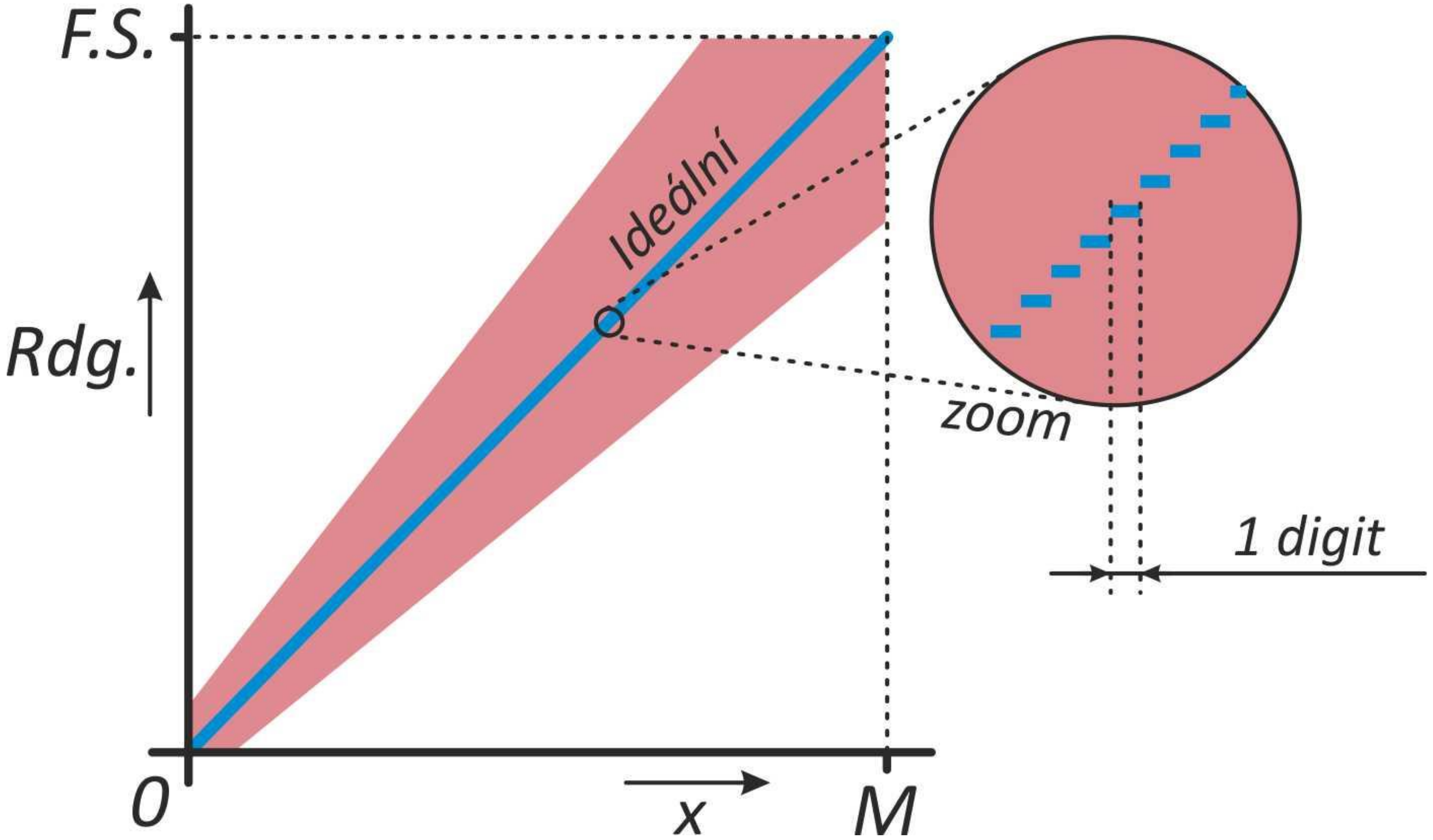
- Pohyblivá složka - chyba čtení – v procentech změřené hodnoty ($\boldsymbol{\delta_{Rdg}}$)
- Pevná složka - chyba z rozsahu – v procentech z hodnoty rozsahu ($\boldsymbol{\delta_{FS}}$)popř. v tzv. **digitech** ($No.\,of\,Digits$)

Digit - váha posledního místa displeje na zvoleném rozsahu

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Výsledná převodní charakteristika je opět ovlivněna různými chybami (chyba nuly, zisku, linearity atd.).



Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Vyjádření chyby digitálního přístroje v procentech (1. způsob)

$$\boxed{\Delta_x = \pm(|\Delta_{RDG}| + |\Delta_{FS}|) = \pm\left(\frac{x}{100}|\delta_{RDG}| + \frac{M}{100}|\delta_{FS}|\right)}$$

kde:

$\Delta_{RDG}, \delta_{RDG}$...absolutní resp. relativní chyba čtení

Δ_{FS}, δ_{FS}... absolutní resp. relativní chyba z rozsahu

x...čtená (změřená) hodnota

M...měřicí rozsah

Δ_x...absolutní chyba změřené hodnoty

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Příklad: Chyba DMM udaná v % (specifikace Agilent 34405)

DC Specifications[1]

Table 24 DC Accuracy ± (% of reading + % of range)

Function	Range [2]	Test Current or Burden Voltage	Input Impedance [13]	1 Year 23° C ± 5° C	Temperature Coefficient 0° C - 18° C 28° C - 55° C
DC Voltage	100.000mV	-	10MΩ ±2%	0.025+0.008	0.0015+0.0005
	1.00000V	-	10MΩ ±2%	0.025+0.006	0.0010+0.0005
	10.0000V	-	10.1MΩ ±2%	0.025+0.005	0.0020+0.0005
	100.000V	-	10.1MΩ ±2%	0.025+0.005	0.0020+0.0005
	1000.00V	-	10MΩ ±2%	0.025+0.005	0.0015+0.0005
Resistance	100.000Ω	1.0mA	-	0.05+0.008 [3]	0.0060+0.0008
	1.00000kΩ	0.83mA	-	0.05+0.005 [3]	0.0060+0.0005
	10.0000kΩ	100µA	-	0.05+0.006 [3]	0.0060+0.0005

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Vyjádření chyby DMM v procentech a digitech (2. způsob)

$$\boxed{\Delta_x = \pm(|\Delta_{RDG}| + |\Delta_{FS}|) = \pm\left(\frac{x}{100}|\delta_{RDG}| + DIGS \cdot VPM\right)}$$

kde:

$\Delta_{RDG}, \delta_{RDG}$…absolutní resp. relativní chyba čtení

Δ_{FS}, δ_{FS}… absolutní resp. relativní chyba z rozsahu

x…čtená (změřená) hodnota

$DIGS$…počet digitů

VPM…váha posledního místa

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Příklad: Chyba DMM udaná v % a digitech (spec. Escort 3136A)

- DC Current

Resolution, Full Scale Reading and Accuracy

Range	Resolution	Full Scale Reading	Accuracy (1 year)	Burden Voltage [1] & Shunt Resistor
500μA	10nA	510.00	0.05% + 5	<0.06V / 100Ω
5mA	100nA	5.1000	0.05% + 4	<0.6V / 100Ω
50mA	1μA	51.000	0.05% + 4	<0.08V / 1Ω
500mA	10μA	510.00	0.05% + 4	<0.8V / 1Ω
5A	100μA	5.1000	0.25% + 5	<0.3V / 0.01Ω
10A	1mA	20.000 [2]	0.25% + 5	<0.6V / 0.01Ω

[1] Typical at full scale reading and voltage across the input terminals

[2] In 10A range, >10~20Adc is readable for 20 seconds maximum with audio warning.

- Response Time: Approximately 1.0 second when the displayed reading reaches 99.9% dc value of the tested input signal at the same range.

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Příklad: Multimetrem Agilent 34405 bylo na rozsahu 10 V změřeno stejnosměrné napětí 7,31 V. Určete absolutní a procentní chybu měření (specifikace multimetru viz výše).

$$\Delta_x = \pm(|\Delta_{RDG}| + |\Delta_{FS}|) = \pm\left(\frac{x}{100}|\delta_{RDG}| + \frac{M}{100}|\delta_{FS}|\right) =$$

$$= \pm\left(\frac{7{,}31}{100}0{,}025 + \frac{10}{100}0{,}005\right) = \pm 0{,}0023275\ V \doteq \underline{\pm\ 2{,}3\ \mathrm{mV}}$$

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{x}100 = \frac{\pm 0{,}0023}{7{,}31}100 \doteq \underline{\pm\ 0{,}031\ \%}$$

Pozn.: Chyba je příliš pesimistický údaj. Dnes se uvádí častěji nejistota (viz dále).

Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Příklad: Multimetrem Escort 3136A byl na rozsahu 5 mA změřen stejnosměrný proud 2,16 mA. Určete absolutní a procentní chybu měření (specifikace multimetru viz výše).

$$\Delta_x = \pm(|\Delta_{RDG}| + |\Delta_{FS}|) = \pm\left(\frac{x}{100}|\delta_{RDG}| + DIGS \cdot VPM\right) =$$

$$= \pm\left(\frac{2{,}16}{100}0{,}05 + 4 \cdot 0{,}0001\right) = \pm 0{,}00148\ mA \doteq \underline{\pm\ 1{,}5\ \mu\mathrm{A}}$$

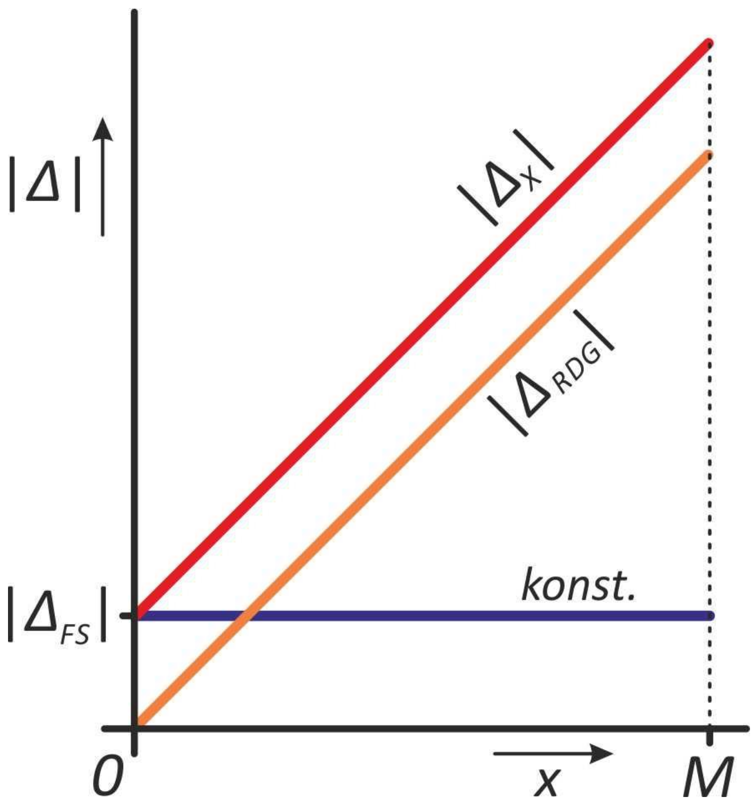
$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{x}100 = \frac{\pm 0{,}0015}{2{,}16}100 \doteq \underline{\pm\ 0{,}069\ \%}$$

Pozn.: Chyba je příliš pesimistický údaj. Dnes se uvádí častěji nejistota (viz dále).

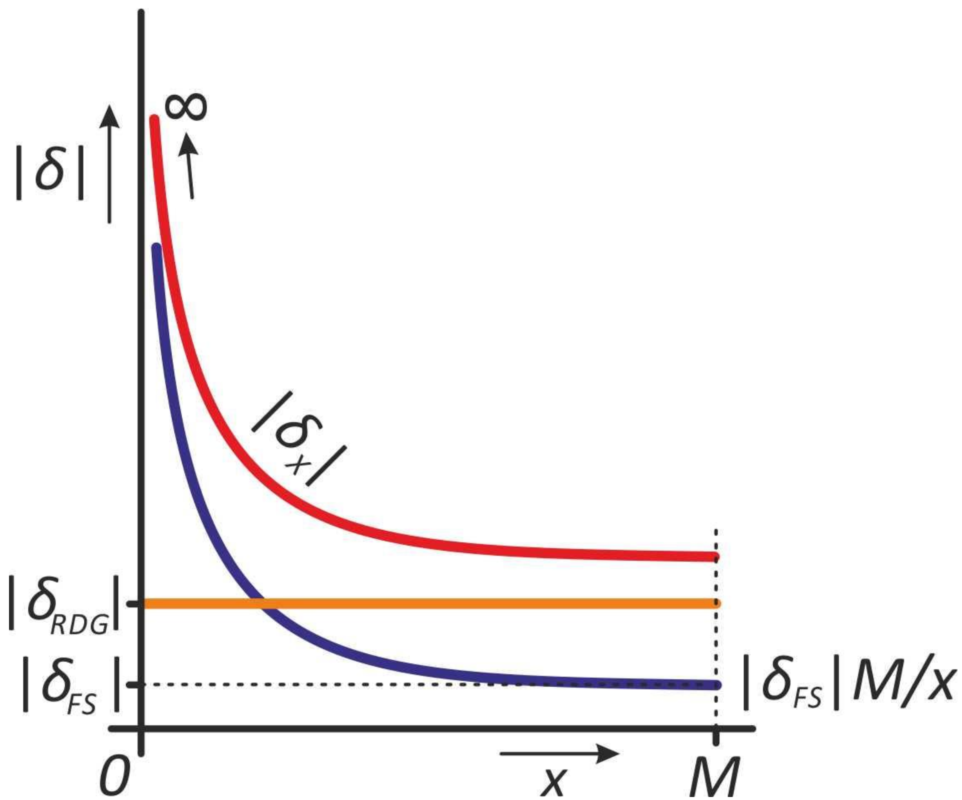
Digitální přístroje

Vlastnosti a chyby

Průběh chyby digitálního přístroje v závislosti na změřené hodnotě:



Absolutní chyba



Relativní chyba

Chyby nepřímých měření

Pokud je výsledek měření určen výpočtem z více měřených hodnot je potřeba brát v úvahu šíření chyb ve výpočtu.

$y = f(x_1, x_2)$

Δ_1, Δ_2 …absolutní chyby proměnných x_1 resp. x_2

δ_1, δ_2… relativní chyby proměnných x_1 resp. x_2

y…výsledná hodnota

Δ_y …absolutní chyba výsledku y

δ_y…relativní chyba výsledku y

Jak určíme hodnotu chybu výsledku v závislosti na tvaru funkce f ?

Chyby nepřímých měření

Operace	Absolutní chyba	Relativní chyba
$y = x_1 + x_2$	$\boxed{\lvert\Delta_y\rvert = \lvert\Delta_1\rvert + \lvert\Delta_2\rvert}$	$\lvert\delta_y\rvert = \dfrac{\lvert\delta_1\rvert\lvert x_1\rvert + \lvert\delta_2\rvert\lvert x_2\rvert}{\lvert x_1 + x_2\rvert}$
$y = x_1 - x_2$	$\boxed{\lvert\Delta_y\rvert = \lvert\Delta_1\rvert + \lvert\Delta_2\rvert}$	$\lvert\delta_y\rvert = \dfrac{\lvert\delta_1\rvert\lvert x_1\rvert + \lvert\delta_2\rvert\lvert x_2\rvert}{\lvert x_1 - x_2\rvert}$
$y = x_1 x_2$	$\lvert\Delta_y\rvert = \lvert\Delta_1\rvert\lvert x_2\rvert + \lvert\Delta_2\rvert\lvert x_1\rvert$	$\boxed{\lvert\delta_y\rvert = \lvert\delta_1\rvert + \lvert\delta_2\rvert}$
$y = \dfrac{x_1}{x_2}$	$\lvert\Delta_y\rvert = \dfrac{\lvert\Delta_1\rvert\lvert x_2\rvert + \lvert\Delta_2\rvert\lvert x_1\rvert}{x_2^2}$	$\boxed{\lvert\delta_y\rvert = \lvert\delta_1\rvert + \lvert\delta_2\rvert}$

Chyby nepřímých měření

Operace	Absolutní chyba	Relativní chyba
$y = nx_1$	$\boxed{\left\lvert\Delta_y\right\rvert = \lvert n\rvert\lvert\Delta_1\rvert}$	$\boxed{\left\lvert\delta_y\right\rvert = \lvert\delta_1\rvert}$
$y = x_1^n$	$\left\lvert\Delta_y\right\rvert = \left\lvert n x_1^{(n-1)}\right\rvert \lvert\Delta_1\rvert$	$\boxed{\left\lvert\delta_y\right\rvert = \lvert n\rvert\lvert\delta_1\rvert}$

Obecný případ:

$$\boxed{y = f(x_1, x_2, \dots x_n), \quad \left\lvert\Delta_y\right\rvert = \sum_{i=1}^{n} \left\lvert\frac{\partial y}{\partial x_i}\right\rvert \lvert\Delta_i\rvert}$$

Chyby nepřímých měření

Příklad: Ohmovou metodou byl měřen odpor. Voltmetr naměřil 10 V s chybou ±0,1 V. Ampérmetr naměřil 1 A s chybou ±0,01 A. Určete velikost odporu a absolutní a procentní chybu výsledku.

$$U_V = 10\ \mathrm{V}\ \pm 0{,}1\ \mathrm{V} \Rightarrow |\Delta_V| = 0{,}1\ \mathrm{V} \qquad R = \frac{U_V}{I_A} = \frac{10}{1} = 10\ \Omega$$

$$I_A = 1\ \mathrm{A}\ \pm 0{,}01\ \mathrm{A} \Rightarrow |\Delta_A| = 0{,}01\ \mathrm{A}$$

$$|\delta_R| = |\delta_V| + |\delta_A| = \frac{|\Delta_V|}{U_V}100 + \frac{|\Delta_A|}{I_A}100 = \frac{0{,}1}{10}100 + \frac{0{,}01}{1}100 =$$

$$= 2\ \Rightarrow \delta_R = \underline{\pm 2\ \%}$$

$$|\delta_R| = \frac{|\Delta_R|}{R}100\ \Rightarrow\ |\Delta_R| = \frac{|\delta_R|R}{100} = \frac{2 \cdot 10}{100} = 0{,}2\ \Rightarrow\ \Delta_R = \underline{\pm 0{,}2\ \Omega}$$

Nejistoty měření

Definice

- **Nejistota** = parametr přiřazený k výsledku měření, udávající interval kolem výsledku měření, v němž se s jistou (přesně danou pravděpodobností) nachází skutečná hodnota x_0.

- Nejistota kombinuje statistický přístup zohledňující opakované měření, vlastnosti použitých měřidel a podmínky měření.

- **Existují dva základní typy nejistot: A, B**
  $u_A(x)$…standardní nejistota typu A
  $u_B(x)$…standardní nejistota typu B

- **Kombinací nejistot typu A a B vzniká:**
  $u_C(x)$…standardní kombinovaná nejistota
  $U(x)$…rozšířená nejistota

Standardní nejistota typu A

- Je způsobena náhodnými jevy – Gaussovo rozdělení.
- Příčiny vzniku jsou neznámé.
- Stanovuje se statistickou analýzou souboru opakovaných měření.
- Hodnota nejistoty typu A klesá s opakováním měření.

Definice: Standardní nejistota typu A výběrového souboru hodnot je směrodatná odchylka $\bar{s}$ aritmetického průměru $\bar{x}$ (násobená případně korekčním koeficientem k_s).

$$\boxed{u_A(x) = k_s \bar{s} = k_s \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad \text{kde} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$$

x_i…hodnota vzorku výběrového souboru
n…počet měření
k_s…korekční koeficient (pro $n \geq 10$ je $k_s = 1$, pro $n < 10$ viz tab.)

n	9	8	7	6	5	4	3	2
k_s	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4	1,7	2,3	7,0

Standardní nejistota typu A

Příklad: Určete odhad měřeného napětí a standardní nejistotu typu A pro 9 změřených hodnot napětí: 8,21 V; 8,26 V; 8,24 V; 8,30 V; 8,27 V; 8,26 V; 8,25 V; 8,24 V; 8,26 V.

- Odhad měřeného napětí:

$$\overline{U} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{1}{9}(8{,}21 + 8{,}26 + 8{,}24 + \cdots + 8{,}26) = 8{,}25\ \mathrm{V}$$

- Nejistota typu A:

$$u_A(U) = k_s\bar{s} = k_s\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \overline{U})^2} = \begin{vmatrix} pro\ n = 9\ je \\ k_s = 1{,}2 \end{vmatrix} =$$

Standardní nejistota typu A

$$= 1{,}2\sqrt{\frac{1}{9(9-1)}\left[(8{,}21-8{,}254)^2+(8{,}26-8{,}254)^2+\cdots+(8{,}26-8{,}254)^2\right]} =$$

$$= 0{,}00982\ \mathrm{V}$$

- Změřené napětí:

$$U = (8{,}25 \pm 0{,}01)\ \mathrm{V}$$

Pozn: Výsledná nejistota se zaokrouhluje na stejný počet míst, kolik má výsledek (viz příklad).

Standardní nejistota typu B

- Příčiny vzniku jsou známé a odhadnutelné (nedokonalosti měřidel – chyby a tolerance, přesnosti použitých konstant, podmínky měření – např. vliv oteplení mimo vztažné podmínky,…).
- Získávají se jiným způsobem než ze statistického vyhodnocení souboru měření.

Obecný postup určení nejistoty typu B:

1) Definovat zdroje nejistot z_k působící na měřenou veličinu x.
2) Určit vztah mezi veličinou x a zdroji nejistot

$$x = f\left(z_1, z_2, \dots z_p\right)$$

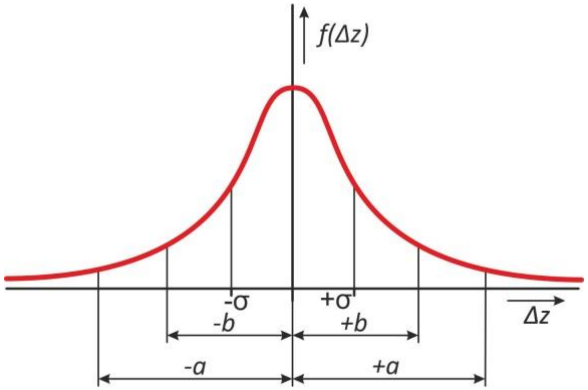
3) Pro každý zdroj nejistoty z_k se určí mezní odchylky Δz_{kmax} k-tého zdroje nejistoty.

Standardní nejistota typu B

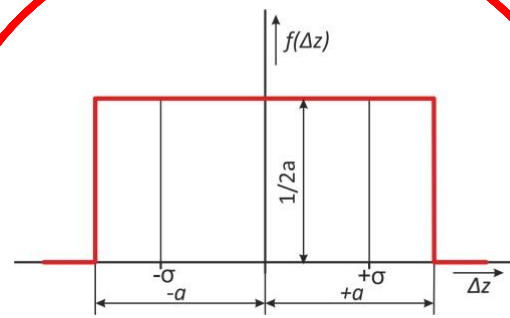
4) Ke každému zdroji nejistoty z_k se určí pravděpodobnostní rozdělení a odpovídající dělicí koeficient χ. Ve většině případů uvažujeme rovnoměrné rozdělení tj. $\chi = \sqrt{3}$.

Typ rozdělení	Mezní odchylka (Δz_{kmax})	Dělicí koeficient χ
Normální	$\boldsymbol{a}$	$\mathbf{3}$
	$\boldsymbol{b}$	$\mathbf{2}$
Rovnoměrné (pravoúhlé)	$\boldsymbol{a}$	$\sqrt{\mathbf{3}}$
Trojúhelníkové-Simpsonovo	$\boldsymbol{a}$	$\sqrt{\mathbf{6}}$
Bimodální-trojúhelníkové	$\boldsymbol{a}$	$\sqrt{\mathbf{2}}$
Lichoběžníkové	$\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b} = {}^{\boldsymbol{a}}/_{\mathbf{3}}$	$\mathbf{2,32}$
	$\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b} = {}^{\boldsymbol{a}}/_{\mathbf{2}}$	$\mathbf{2,19}$
	$\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b} = {}^{\mathbf{2}\boldsymbol{a}}/_{\mathbf{3}}$	$\mathbf{2,04}$
Bimodální-Diracovo	$\boldsymbol{a}$	$\mathbf{1}$

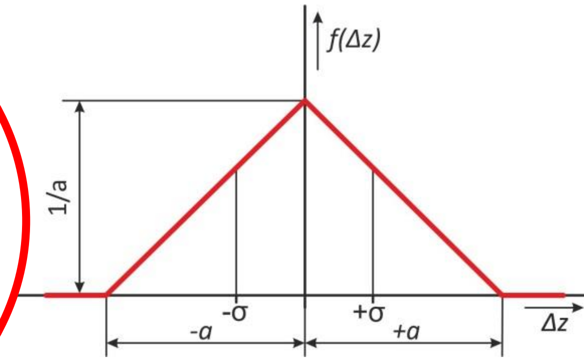
Standardní nejistota typu B



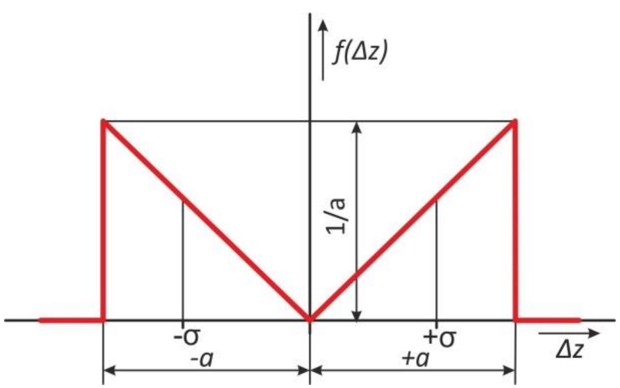
Normální rozd.



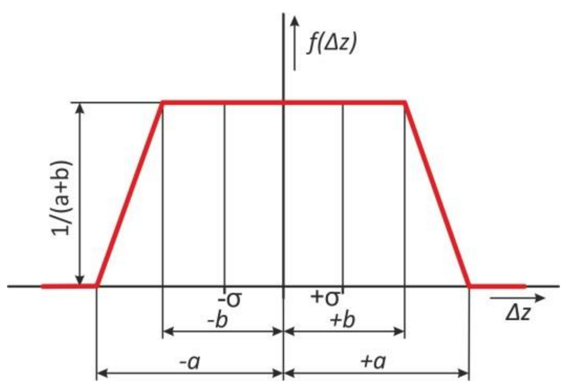
Rovnoměrné rozd.



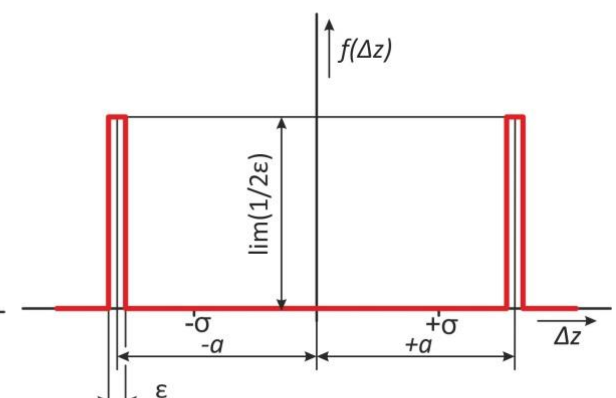
Trojúhelníkové rozd.



Bimodální-trojúhelníkové



Lichoběžníkové



Bimodální-Diracovo

Standardní nejistota typu B

5) Stanoví se dílčí nejistoty pro jednotlivé zdroje z_k.

$$\boxed{u_B(z_k) = \frac{\Delta z_{kmax}}{\chi}}$$

6) Vyčíslí se celková standardní nejistota typu B (zákon šíření nejistot)

$$\boxed{u_B(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} [A_k\, u_B(z_k)]^2} \quad kde \quad A_k = \frac{\partial f(z_1, z_2, \dots z_p)}{\partial z_k}}$$

A_k…citlivostní koeficient k-tého zdroje z_k.

Standardní nejistota typu B

Příklad: Ručkovým V-metrem s třídou přesnosti 1,5 bylo na rozsahu 60 V změřeno napětí 24,5 V. Určete standardní nejistotu typu B.

$$TP = \frac{|\Delta_m|}{M} 100 \quad \rightarrow \quad |\Delta_m| = \frac{TP \cdot M}{100} = \frac{1{,}5 \cdot 60}{100} = 0{,}9\ \mathrm{V}$$

$$u_B(U) = \frac{|\Delta_m|}{\chi} = \frac{0{,}9}{\sqrt{3}} = 0{,}52\ \mathrm{V}$$

$$\underline{U = (24{,}5 \pm 0{,}6)\ \mathrm{V}}$$

Pozn: Nejistoty se zaokrouhlují vždy nahoru (viz příklad).

Standardní nejistota typu B

Příklad: Digitálním V-metrem bylo na rozsahu 200 V změřeno napětí 153,27 V. V manuálu přístroje je udána chyba ±0,01% rdg a ±0,02% F.S. Jaká je nejistota (typu B) změřeného údaje.

$$|\Delta_m| = \left(\frac{U}{100}\%rdg + \frac{M}{100}\%F.S.\right) =$$

$$= \frac{153{,}27}{100}0{,}01 + \frac{200}{100}0{,}02 = 0{,}055\ \mathrm{V}$$

$$u_B(U) = \frac{|\Delta_m|}{\chi} = \frac{0{,}055}{\sqrt{3}} = 0{,}032\ \mathrm{V}$$

$$\underline{U = (153{,}27 \pm 0{,}04)\ \mathrm{V}}$$

Kombinovaná nejistota

- Vznikne kombinací nejistot typu A a B:

$$u_C(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)}$$

- Rozšířená nejistota $U(x)$

$$U(x) = k_r\, u_c(x)$$

kde:

$k_r \in \langle 1; 3\rangle$…koeficient rozšíření

k_r	Pokrytí
1	68,27
2	95,45
2,58	99,00
3	99,73

- Většinou se volí $k_r = 2$.

(Odpovídá cca 95% pokrytí resp. pravděpodobnosti výskytu v případě normálního rozdělení.)

- Koeficient k_r je vždy potřeba uvést k výsledku spolu s nejistotou.

Kombinovaná nejistota

Příklad: Digitálním 3,5-místným V-metrem bylo na rozsahu 20 V změřeno 9 hodnot napětí: 8,21 V; 8,26 V; 8,24 V; 8,30 V; 8,27 V; 8,26 V; 8,25 V; 8,24 V; 8,26 V. Manuál přístroje udává pro daný rozsah chybu: ±0,1%rdg a ±6 digitů. Určete rozšířenou nejistotu ($k_r = 2$) měřeného napětí.

- Odhad měřeného napětí:

$$\bar{U} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{1}{9}(8{,}21 + 8{,}26 + 8{,}24 + \cdots + 8{,}26) = 8{,}25\ \mathrm{V}$$

- Nejistota typu A:

$$u_A(U) = k_s \bar{s} = k_s \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \bar{U})^2} = \left| \begin{matrix} pro\ n = 9\ je \\ k_s = 1{,}2 \end{matrix} \right| =$$

Kombinovaná nejistota

$$= 1{,}2\sqrt{\frac{1}{9(9-1)}\left[(8{,}21-8{,}254)^2+(8{,}26-8{,}254)^2+\cdots+(8{,}26-8{,}254)^2\right]} =$$

$$= 0{,}00982\ \mathrm{V}$$

- Chyba údaje:

$$|\Delta_m| = \left(\frac{U}{100}\%rdg + digs \cdot VPM\right) = \frac{8{,}254}{100}0{,}1 + 6 \cdot 0{,}01 =$$

$$= 0{,}068\ \mathrm{V}$$

- Nejistota typu B:

$$u_B(U) = \frac{|\Delta_m|}{\chi} = \frac{0{,}068}{\sqrt{3}} = 0{,}039\ \mathrm{V}$$

Kombinovaná nejistota

- Kombinovaná nejistota:

$$u_C(U) = \sqrt{u_A^2(U) + u_B^2(U)} = \sqrt{0{,}00982^2 + 0{,}039^2} = 0{,}04\ \mathrm{V}$$

- Rozšířená nejistota:

$$U(U) = k_r\, u_c(U) = 2 \cdot 0{,}04 = 0{,}08\ \mathrm{V}$$

- Změřené napětí:

$$\underline{U = (8{,}25 \pm 0{,}08)\ \mathrm{V};\quad (k_r = 2)}$$

Nejistoty nepřímých měření

Pokud je měřená veličina Y počítána pomocí funkční závislosti m veličin X_j získaných přímým měřením resp. odhad výsledné hodnoty y je počítán funkční závislostí m odhadů hodnot x_i.

$$Y = f(X_1;\ X_2; \dots ; X_m)\ \ resp.\ \ y = f(x_1;\ x_2; \dots ; x_m)$$

pak se výsledná kombinovaná nejistota $u_c(y)$ odhadu y určí z kombinovaných nejistot $u_c(x_j)$ jednotlivých odhadů x_j.

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left[A_j\, u_C\left(x_j\right)\right]^2} \quad kde \qquad A_j = \frac{\partial f(x_1;\ x_2; \dots ; x_m)}{\partial x_j}$$

A_j...citlivostní koeficient j-tého odhadu x_j.

Pozn.: Předpokladem je, že vstupní veličiny jsou **nekorelované** (jinak je nutné stanovit kovariance a korelační koeficienty).

Nejistoty nepřímých měření

Příklad: Ohmovou metodou byl měřen odpor rezistoru. Proud byl měřen digitálním multimetrem na rozsahu 3 A (±0,02%rdg a ±0,5%F.S.). Napětí bylo měřeno digitálním multimetrem na rozsahu 20 V (±0,01%rdg a ±0,02%F.S.). Určete odpor rezistoru a jeho rozšířenou nejistotu $(k_r = 2)$. Měření bylo provedeno celkem 10x viz tabulka hodnot.

Č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I (A)	1,001	1,021	1,001	0,999	1,000	1,005	1,001	1,022	1,001	0,999
U (V)	10,010	10,023	10,000	9,981	9,999	10,012	10,001	10,021	10,001	9,999

- Odhad měřeného proudu:

$$\bar{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i = \frac{1}{10}(1{,}001 + 1{,}021 + \cdots + 0{,}999) = 1{,}005\ \mathrm{A}$$

Nejistoty nepřímých měření

- Nejistota proudu typu A:

$$u_A(I) = k_s\bar{s} = k_s\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(I_i-\bar{I})^2} = \begin{vmatrix} pro\ n = 10\ je \\ k_s = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{10(10-1)}[(1{,}001-1{,}005)^2+\dots+(0{,}999-1{,}005)^2]} =$$

$$= 0{,}0028\ \mathrm{A}$$

- Nejistota proudu typu B:

$$u_B(I) = \frac{|\Delta_m|}{\chi} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1{,}005}{100}0{,}02+\frac{3}{100}0{,}5\right) = 0{,}0098\ \mathrm{A}$$

- Kombinovaná nejistota proudu:

$$u_C(I) = \sqrt{u_A^2(I)+u_B^2(I)} = \sqrt{0{,}0028^2+0{,}0098^2} = 0{,}01\ \mathrm{A}$$

Nejistoty nepřímých měření

- Odhad měřeného napětí:

$$\bar{U} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{1}{10}(10{,}01 + 10{,}023 + \cdots + 9{,}999) = 10{,}0047\ \mathrm{V}$$

- Nejistota napětí typu A:

$$u_A(U) = k_s\bar{s} = k_s\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \bar{U})^2} = \left|\begin{matrix} pro\ n = 10\ je \\ k_s = 1 \end{matrix}\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{10(10-1)}\left[(10{,}01 - 10{,}0047)^2 + \cdots + (9{,}999 - 10{,}0047)^2\right]} =$$

$$= \ 0{,}0039\ \mathrm{V}$$

Nejistoty nepřímých měření

- Nejistota napětí typu B:

$$u_B(U) = \frac{|\Delta_m|}{\chi} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{10{,}0047}{100}0{,}01 + \frac{20}{100}0{,}02\right) = 0{,}0029\ \mathrm{V}$$

- Kombinovaná nejistota napětí:

$$u_C(U) = \sqrt{u_A^2(U) + u_B^2(U)} = \sqrt{0{,}0039^2 + 0{,}0029^2} = 0{,}0049\ \mathrm{V}$$

- Výsledný odpor:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10{,}0047}{1{,}005} = 9{,}955\ \Omega$$

- Výsledná kombinovaná nejistota odporu:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[A_j\, u_C(x_j)\right]^2} \quad kde \quad A_j = \frac{\partial f(x_1;\ x_2; \dots ; x_m)}{\partial x_j}$$

Nejistoty nepřímých měření

$$u_c(R) = \sqrt{\left[\frac{\partial R}{\partial U} u_c(U)\right]^2 + \left[\frac{\partial R}{\partial I} u_c(I)\right]^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I} \\ \frac{\partial R}{\partial I} = \frac{-U}{I^2} \end{array} \right| = \sqrt{\left[\frac{1}{I} u_c(U)\right]^2 + \left[\frac{-U}{I^2} u_c(I)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{1{,}005} 0{,}0049\right)^2 + \left(\frac{-10{,}0047}{1{,}005^2} 0{,}01\right)^2} = 0{,}01\ \Omega$$

- Výsledná rozšířená nejistota odporu:

$$U(R) = k_r u_c(R) = 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02\ \Omega$$

$$\underline{R = (9{,}955 \pm 0{,}020)\ \Omega; (k_r = 2)}$$

Literatura

[1] Haasz V. a kol.: Elektrická měření - přístroje a metody, ČVUT, 2018.

[2] ÚNMZ: Pokyn pro vyjadřování nejistot měření, Sborníky technické harmonizace 2012 http://www.unmz.cz

[3] Bartušek K., Gescheidtová E., Kubásek R., Mikulka J., Rez J., Steinbauer M., Měření v elektrotechnice, skripta VUT Brno

[4] Zuth D., Vdoleček F.: Zdroje nejistot ve vibrodiagnostice, Automa 6/2010

[5] Tůmová O.: Metrologie a hodnocení procesů. BEN, Praha, 2009

[6] Tůmová O., Panc T.: Možnosti vyjádření přesnosti měření I: teoretický základ, Automa 7/2013

[7] Tůmová O.: Nejistoty měření v teorii a praxi, seminář ČSJ, Praha 15.3.2012, www.csq.cz

[8] Drechsler R., Gyarfáš J., Jakl M., Vítovec J.: Elektrická měření II – Základní metody, SNTL/ALFA 1973

[9] Fajt V.: Elektrická měření, SNTL/ALFA 1987