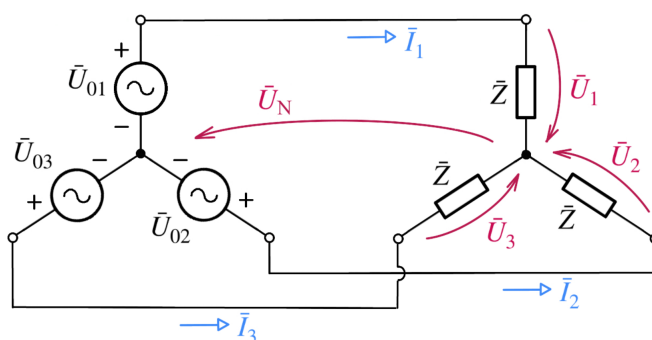


# Trojfázová soustava Y-Y, řešené příklady

## Příklad 1:

Uvažujme symetrickou třífázovou soustavu v zapojení Y-Y. Efektivní hodnota fázového napětí symetrického zdroje je  $U_0 = 230$  V. Impedance každé fáze zátěže je  $\bar{Z} = 80 \angle -25^\circ \Omega$ . Vypočítejte napětí na fázích zátěže, proudy síťovými vodiči a (celkový) komplexní výkon zátěže.



## Řešení:

V zadání je uvedena efektivní hodnota fázového napětí zdroje. Předpokládáme symetrický třífázový zdroj, takže jednotlivá fázová napětí jsou fázově posunuta o  $120^\circ$ .

$$\bar{U}_{01} = 230 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\bar{U}_{02} = 230 \angle -120^\circ \text{ V} \quad (1)$$

$$\bar{U}_{03} = 230 \angle 120^\circ \text{ V}$$

Napětí mezi středou zdroje a zátěže je dáno vztahem

$$\bar{U}_N = \frac{\bar{U}_{01}\bar{Y}_1 + \bar{U}_{02}\bar{Y}_2 + \bar{U}_{03}\bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \bar{Y}_N}, \quad (2)$$

kde  $\bar{Y}_1$ ,  $\bar{Y}_2$  a  $\bar{Y}_3$  jsou admitance jednotlivých fází zátěže, a  $\bar{Y}_N$  je admitance pracovního vodiče. V našem případě tento vodič není vyveden, takže  $\bar{Y}_N = 0$  S.

Pokud je symetrický nejen třífázový zdroj, ale také zátěž, je napětí  $\bar{U}_N$  mezi středou zdroje a zátěže nulové, bez ohledu na to, zda je pracovní vodič vyveden nebo ne. Lze si to ověřit dosazením do uvedeného vzorce (2).

$$\bar{U}_N = 0 \text{ V} \quad (3)$$

Nyní můžeme podle II. Kirchhoffova zákona o napětí v uzavřené smyčce spočítat jednotlivá fázová napětí zátěže. Napětí  $\bar{U}_N = 0$  V, takže na impedancích zátěže jsou příslušná fázová napětí třífázového zdroje.

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_{01} - \bar{U}_N = \bar{U}_{01} = 230 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_{02} - \bar{U}_N = \bar{U}_{02} = 230 \angle -120^\circ \text{ V} \quad (4)$$

$$\bar{U}_3 = \bar{U}_{03} - \bar{U}_N = \bar{U}_{03} = 230 \angle 120^\circ \text{ V}$$

Podle Ohmova zákona pak můžeme spočítat proudy, které procházejí jednotlivými fázemi zátěže. Vzhledem k tomu, že je zátěž zapojená do hvězdy, jsou fázové proudy zátěže zároveň síťovými proudy. Síťové proudy nazýváme také proudy sdruženými.

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}} = \frac{230/0^\circ}{80/-25^\circ} = 2,875/25^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_2 &= \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}} = \frac{230/-120^\circ}{80/-25^\circ} = 2,875/-95^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_3 &= \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}} = \frac{230/120^\circ}{80/-25^\circ} = 2,875/145^\circ \text{ A}\end{aligned}\quad (5)$$

Zátěž je symetrická, takže je možné spočítat pouze proud první fáze zátěže  $\bar{I}_1 = 2,875/25^\circ$  A. Proud  $\bar{I}_2$  a  $\bar{I}_3$  mají stejnou velikost, jsou jen oproti proudu  $\bar{I}_1$  fázově posunuté. Proud  $\bar{I}_2$  je o  $120^\circ$  pozadu za proudem  $\bar{I}_1$  a proud  $\bar{I}_3$  je oproti proudu  $\bar{I}_2$  opožděn o dalších  $120^\circ$ . Zbývá dopočítat komplexní výkon zátěže.

$$\begin{aligned}\bar{S}_1 &= \bar{U}_1\bar{I}_1^* + \bar{U}_2\bar{I}_2^* + \bar{U}_3\bar{I}_3^* = \\ &= 230/0^\circ \cdot 2,875/-25^\circ + 230/-120^\circ \cdot 2,875/95^\circ + 230/120^\circ \cdot 2,875/-145^\circ = \quad (6) \\ &= 1984/-25^\circ = 1798 - j 838 \text{ VA}\end{aligned}$$

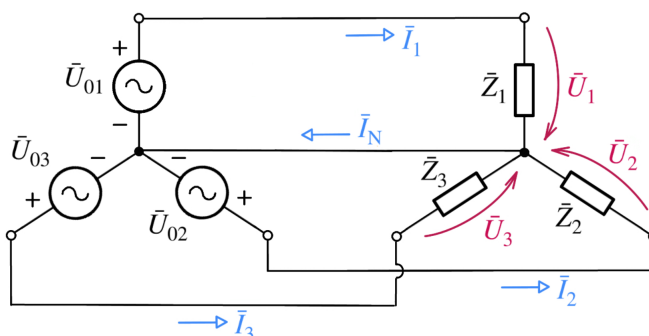
Vzhledem k symetrii zátěže je také možné určit jen komplexní výkon jedné fáze a výsledek vynásobit třemi, protože je komplexní výkon ve všech fázích zátěže stejný.

### Příklad 2:

Uvažujme nesymetrickou třífázovou soustavu v zapojení Y-Y. Efektivní hodnota sdruženého napětí symetrického zdroje je  $U = 600$  V. Mezi středy zdroje a zátěže je vyveden ideální pracovní vodič. Impedance fází zátěže jsou

$$\begin{aligned}\bar{Z}_1 &= 50/-50^\circ \Omega. \\ \bar{Z}_2 &= 60/40^\circ \Omega. \\ \bar{Z}_3 &= 40/35^\circ \Omega.\end{aligned}$$

Vypočítejte napětí na fázích zátěže, proudy síťovými vodiči, proud pracovním vodičem a (celkový) činný výkon zátěže.



### Řešení:

V zadání je uvedena efektivní hodnota sdruženého napětí zdroje. Efektivní hodnota fázového napětí zdroje  $U_0$  je menší:

$$U_0 = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{600}{\sqrt{3}} = 346,41 \text{ V} \quad (7)$$

Napětí jednotlivých fází zdroje je tedy

$$\begin{aligned} \bar{U}_{01} &= 346,41 \angle 0^\circ \text{ V} \\ \bar{U}_{02} &= 346,41 \angle -120^\circ \text{ V} \\ \bar{U}_{03} &= 346,41 \angle 120^\circ \text{ V} \end{aligned} \quad (8)$$

Mezi středy zdroje a zátěže je vyveden ideální pracovní vodič, takže napětí  $\bar{U}_N = 0 \text{ V}$ . Vztah (2) přitom stále platí, admitance ideálního pracovního vodiče směřuje k nekonečnu  $\bar{Y}_N \rightarrow \infty \text{ S}$  a napětí  $\bar{U}_N$  tedy skutečně vychází nulové.

Na jednotlivých impedancích zátěže bude napětí odpovídající příslušné fázi zdroje.

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{U}_{01} - \bar{U}_N = \bar{U}_{01} = 346,41 \angle 0^\circ \text{ V} \\ \bar{U}_2 &= \bar{U}_{02} - \bar{U}_N = \bar{U}_{02} = 346,41 \angle -120^\circ \text{ V} \\ \bar{U}_3 &= \bar{U}_{03} - \bar{U}_N = \bar{U}_{03} = 346,41 \angle 120^\circ \text{ V} \end{aligned} \quad (9)$$

Podle Ohmova zákona určíme proudy, které procházejí jednotlivými fázemi zátěže.

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_1} = \frac{346,41 \angle 0^\circ}{50 \angle -50^\circ} = 6,928 \angle 50^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_2 &= \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_2} = \frac{346,41 \angle -120^\circ}{60 \angle 40^\circ} = 5,773 \angle -160^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_3 &= \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}_3} = \frac{346,41 \angle 120^\circ}{40 \angle 35^\circ} = 8,660 \angle 85^\circ \text{ A} \end{aligned} \quad (10)$$

Nyní můžeme vypočítat proud procházející pracovním vodičem. Ve středu zátěže bude platit I. Kirchhoffův zákon o proudech v uzlu.

$$\bar{I}_N = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 6,928 \angle 50^\circ + 5,773 \angle -160^\circ + 8,660 \angle 85^\circ = 11,962 \angle 91^\circ \text{ A} \quad (11)$$

Zbývá určit činný výkon zátěže. Celkový činný výkon je součtem činných výkonů jednotlivých fází zátěže.

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + P_3 = U_1 I_1 \cos(\varphi_1) + U_2 I_2 \cos(\varphi_2) + U_3 I_3 \cos(\varphi_3) = \\ &= 346,41 \cdot 6,928 \cdot \cos(-50^\circ) + 346,41 \cdot 5,773 \cdot \cos(40^\circ) + \\ &+ 346,41 \cdot 8,660 \cdot \cos(35^\circ) = 5532 \text{ W} \end{aligned} \quad (12)$$

### Příklad 3:

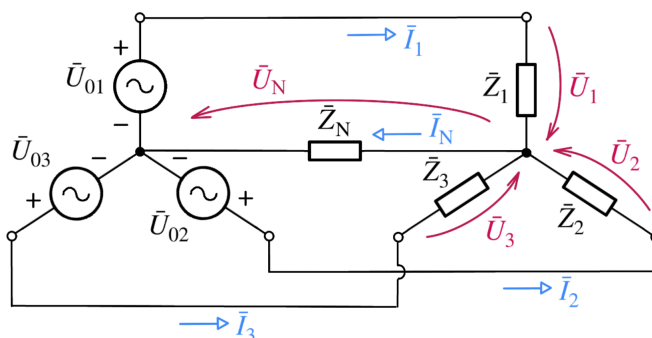
Uvažujme nesymetrickou třífázovou soustavu v zapojení Y-Y. Efektivní hodnota fázového napětí symetrického zdroje je  $U_0 = 500$  V. Mezi středy zdroje a zátěže je vyveden pracovní vodič o impedanci  $\bar{Z}_N = 5 \Omega$ . Impedance fází zátěže jsou

$$\bar{Z}_1 = 40 / -30^\circ \Omega.$$

$$\bar{Z}_2 = 25 / 10^\circ \Omega.$$

$$\bar{Z}_3 = 80 / 50^\circ \Omega.$$

Vypočítejte napětí na fázích zátěže, proudy síťovými vodiči, proud pracovním vodičem a (celkový) komplexní výkon zátěže.



### Řešení:

V zadání je uvedena efektivní hodnota fázového napětí třífázového zdroje. Napětí jednotlivých fází zdroje jsou

$$\bar{U}_{01} = 500 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\bar{U}_{02} = 500 \angle -120^\circ \text{ V} \quad (13)$$

$$\bar{U}_{03} = 500 \angle 120^\circ \text{ V}$$

Admittance jednotlivých fází zátěže a admittance pracovního vodiče jsou

$$\bar{Y}_{01} = \frac{1}{\bar{Z}_1} = \frac{1}{40 / -30^\circ} = 0,025 \angle 30^\circ \text{ S}$$

$$\bar{Y}_{02} = \frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{25 / 10^\circ} = 0,04 \angle -10^\circ \text{ S}$$

$$\bar{Y}_{03} = \frac{1}{\bar{Z}_3} = \frac{1}{80 / 50^\circ} = 0,0125 \angle -50^\circ \text{ S} \quad (14)$$

$$\bar{Y}_N = \frac{1}{\bar{Z}_N} = \frac{1}{5 / 0^\circ} = 0,2 \angle 0^\circ \text{ S}$$

Nyní můžeme použít vztah pro napětí  $\bar{U}_N$  mezi středy třífázového zdroje a zátěže.

$$\begin{aligned}\bar{U}_N &= \frac{\bar{U}_{01}\bar{Y}_1 + \bar{U}_{02}\bar{Y}_2 + \bar{U}_{03}\bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \bar{Y}_N} = \\ &= \frac{500/0^\circ \cdot 0,025/30^\circ + 500/-120^\circ \cdot 0,04/-10^\circ + 500/120^\circ \cdot 0,0125/-50^\circ}{0,025/30^\circ + 0,04/-10^\circ + 0,0125/-50^\circ + 0,2/0^\circ} = \quad (15) \\ &= 11,89/\underline{-87,2^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

Podle II. Kirchhoffova zákona pro napětí v uzavřené smyčce můžeme určit napětí na jednotlivých fázích zátěže.

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= \bar{U}_{01} - \bar{U}_N = 500/0^\circ - 11,89/\underline{-87,2^\circ} = 499,6/\underline{1,36^\circ} \text{ V} \\ \bar{U}_2 &= \bar{U}_{02} - \bar{U}_N = 500/\underline{-120^\circ} - 11,89/\underline{-87,2^\circ} = 490,0/\underline{-120,75^\circ} \text{ V} \quad (16) \\ \bar{U}_3 &= \bar{U}_{03} - \bar{U}_N = 500/\underline{120^\circ} - 11,89/\underline{-87,2^\circ} = 510,6/\underline{119,39^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

Proudy jednotlivými fázemi zátěže vypočítáme podle Ohmova zákona.

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_1} = \frac{499,6/\underline{1,36^\circ}}{40/\underline{-30^\circ}} = 12,49/\underline{31,4^\circ} \text{ A} \\ \bar{I}_2 &= \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_2} = \frac{490,0/\underline{-120,75^\circ}}{25/\underline{10^\circ}} = 19,60/\underline{-130,8^\circ} \text{ A} \quad (17) \\ \bar{I}_3 &= \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}_3} = \frac{510,6/\underline{119,39^\circ}}{80/\underline{50^\circ}} = 6,38/\underline{69,4^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

Proud  $I_N$  protékající pracovním vodičem lze vypočítat buď pomocí Ohmova zákona, a nebo pomocí I. Kirchhoffova zákona o proudech v uzlu. Případné rozdíly v číselných výsledcích by měly být velmi malé, jednalo by se o důsledek zaokrouhlování během předchozích výpočtů.

$$\bar{I}_N = \frac{\bar{U}_N}{\bar{Z}_N} = \frac{11,89/\underline{-87,2^\circ}}{5/\underline{0^\circ}} = 2,38/\underline{-87,2^\circ} \text{ A} \quad (18)$$

Nakonec vypočítáme komplexní výkon zátěže.

$$\begin{aligned}\bar{S}_1 &= \bar{U}_1\bar{I}_1^* + \bar{U}_2\bar{I}_2^* + \bar{U}_3\bar{I}_3^* = \\ &= 499,6/\underline{1,36^\circ} \cdot 12,49/\underline{-31,4^\circ} + 490,0/\underline{-120,75^\circ} \cdot 19,60/\underline{130,8^\circ} + \\ &\quad + 510,6/\underline{119,39^\circ} \cdot 6,38/\underline{-69,4^\circ} = 16990/\underline{3,5^\circ} = 16958 + j 1045 \text{ VA}\end{aligned} \quad (19)$$

*Poznámka: Zde zapsané číselné výsledky jsou získány výpočtem ve větší přesnosti, než jaká je uvedena v textu. Výpočet hodnot proběhl v Matlabu. Odlišnosti, které vzniknou používáním nižšího počtu desetinných míst při výpočtu na kalkulačce, by měly být malé (v řádu nízkých jednotek procent).*

#### Příklad 4:

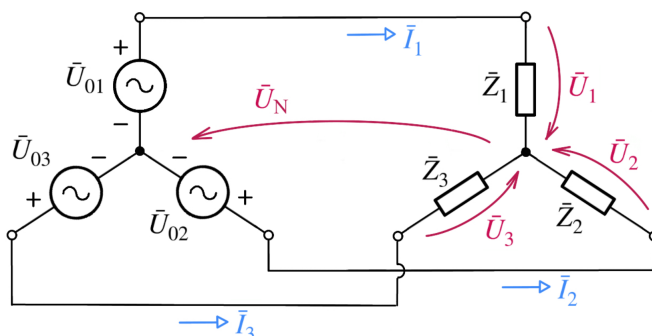
Uvažujme nesymetrickou třífázovou soustavu v zapojení Y-Y. Efektivní hodnota sdruženého napětí symetrického zdroje je  $U = 400$  V. Pracovní vodič není vyveden. Impedance fází zátěže jsou

$$\bar{Z}_1 = 25/25^\circ \Omega.$$

$$\bar{Z}_2 = 20/40^\circ \Omega.$$

$$\bar{Z}_3 = 40/-30^\circ \Omega.$$

Vypočítejte napětí mezi středy třífázového zdroje a zátěže, dále napětí na fázích zátěže, proudy síťovými vodiči a (celkový) činný výkon zátěže.



#### Řešení:

V zadání je uvedena efektivní hodnota sdruženého napětí třífázového zdroje. Efektivní hodnota napětí jednotlivých fází zdroje je menší:

$$U_0 = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}} = 231 \text{ V} \quad (20)$$

Napětí fází třífázového zdroje jsou

$$\bar{U}_{01} = 231 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\bar{U}_{02} = 231 \angle -120^\circ \text{ V} \quad (21)$$

$$\bar{U}_{03} = 231 \angle 120^\circ \text{ V}$$

Určíme admitance jednotlivých fází zátěže:

$$\bar{Y}_{01} = \frac{1}{\bar{Z}_1} = \frac{1}{25/25^\circ} = 0,04 \angle -25^\circ \text{ S}$$

$$\bar{Y}_{02} = \frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{20/40^\circ} = 0,05 \angle -40^\circ \text{ S} \quad (22)$$

$$\bar{Y}_{03} = \frac{1}{\bar{Z}_3} = \frac{1}{40/-30^\circ} = 0,025 \angle 30^\circ \text{ S}$$

Pracovní vodič není vyveden, což znamená, že do vztahu pro napětí  $\bar{U}_N$  mezi středy třífázového zdroje a zátěže dosazujeme za jeho admitanci nulu:  $\bar{Y}_N = 0 \text{ S}$ .

Použijeme vtaħ pro  $\bar{U}_N$  a dosadíme do něj číselné hodnoty:

$$\begin{aligned}\bar{U}_N &= \frac{\bar{U}_{01}\bar{Y}_1 + \bar{U}_{02}\bar{Y}_2 + \bar{U}_{03}\bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \bar{Y}_N} = \\ &= \frac{231/0^\circ \cdot 0,04/-25^\circ + 231/-120^\circ \cdot 0,05/-40^\circ + 231/120^\circ \cdot 0,025/30^\circ}{0,04/-25^\circ + 0,05/-40^\circ + 0,025/30^\circ + 0} = \quad (23) \\ &= 87,23/-125,6^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Podle II. Kirchhoffova zákona pro napětí v uzavřené smyčce určíme napětí na jednotlivých fázích zátěže.

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= \bar{U}_{01} - \bar{U}_N = 231/0^\circ - 87,23/-125,6^\circ = 290,5/14,1^\circ \text{ V} \\ \bar{U}_2 &= \bar{U}_{02} - \bar{U}_N = 231/-120^\circ - 87,23/-125,6^\circ = 144,4/-116,6^\circ \text{ V} \quad (24) \\ \bar{U}_3 &= \bar{U}_{03} - \bar{U}_N = 231/120^\circ - 87,23/-125,6^\circ = 278,5/103,4^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Proudy jednotlivými fázemi zátěže vypočítáme podle Ohmova zákona.

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_1} = \frac{290,5/14,1^\circ}{25/25^\circ} = 11,62/-10,9^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_2 &= \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_2} = \frac{144,4/-116,6^\circ}{20/40^\circ} = 7,22/-156,6^\circ \text{ A} \quad (25) \\ \bar{I}_3 &= \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}_3} = \frac{278,5/103,4^\circ}{40/-30^\circ} = 6,96/133,4^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Nakonec vypočítáme činný výkon zátěže.

$$\begin{aligned}P &= P_1 + P_2 + P_3 = U_1 I_1 \cos(\varphi_1) + U_2 I_2 \cos(\varphi_2) + U_3 I_3 \cos(\varphi_3) = \\ &= 290,5 \cdot 11,62 \cdot \cos(25^\circ) + 144,4 \cdot 7,22 \cdot \cos(40^\circ) + \\ &\quad + 278,5 \cdot 6,96 \cdot \cos(-30^\circ) = 5538 \text{ W}\end{aligned} \quad (26)$$

*Poznámka: Text neprošel žádnou kontrolou. Pokud v něm najdete chyby nebo překlepy, můžete mi napsat mail na adresu lahoda@fel.zcu.cz - nalezené nedostatky opravím a vydám další verzi :o)*  
*Jiří Lahoda, 27. 2. 2022*