Poznámky k obyčejným lineárním diferenciálním rovnicím n-tého řádu s konstantními koeficienty

Obyčejná lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

Pro $f(t) \not\equiv 0$ hovoříme o *nehomogenní* lineární diferenciální rovnici.

Přidružená *homogenní* diferenciální rovnice:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Charakteristická rovnice příslušná k homogenní diferenciální rovnici:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Na levé straně rovnice je tzv. charakteristický polynom n-tého stupně, má n kořenů λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Obecné řešení homogenní diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty:

$$y_H(t) = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) + \cdots + K_n y_n(t)$$

kde K_1, $K_2, \ldots, K_n$ jsou libovolné reálné konstanty, tzv. integrační konstanty, a $y_1(t)$, $y_2(t), \ldots, y_n(t)$ jsou lineárně nezávislé funkce. Každá z nich je řešením homogenní diferenciální rovnice a jejich soustava představuje tzv. fundamentální systém řešení.

- Pokud jsou kořeny charakteristického polynomu navzájem různá reálná čísla λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, potom jsou funkce

  $$y_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \quad \cdots \quad y_n(t) = \mathrm{e}^{\lambda_n t}$$

  lineárně nezávislá řešení homogenní diferenciální rovnice a tvoří fundamentální systém řešení.

- Předpokládejme, že má charakteristický polynom k-násobný reálný kořen λ. Potom funkce

  $$y_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad y_2(t) = t\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \cdots \quad y_k(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

  jsou lineárně nezávislá řešení homogenní diferenciální rovnice.

- Pokud má charakteristický polynom dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, pak funkce

  $$y_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

  jsou lineárně nezávislá řešení homogenní diferenciální rovnice.

- Předpokládejme, že má charakteristický polynom k-násobné dvojice komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Potom funkce

  $$y_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

  $$y_3(t) = t\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad y_4(t) = t\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

  $$\ldots$$

  $$y_{2k-1}(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad y_{2k}(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

  jsou lineárně nezávislá řešení homogenní diferenciální rovnice.

Obecné řešení *nehomogenní* diferenciální rovnice:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) + \cdots + K_n y_n(t) + y_P(t)$$

kde $y_P(t)$ je libovolné, tzv. partikulární řešení nehomogenní diferenciální rovnice.