

POLYNOMY

Definice Necht $\mathbb{C}$ je těleso komplexních čísel, necht $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$. Funkce $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná předpisem $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ se nazývá **polynom (mnohočlen) stupně n** . Píšeme $\text{st}(p) = n$.

Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ se nazývají **koefficienty polynomu**.

Jestliže pro každé $i = 0, 1, \dots, n$ je $a_i \in \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}$ označuje těleso reálných čísel, potom mluvíme o **polynomu s reálnými koeficienty**.

Jestliže $a_i = 0$ pro každé i , potom $p = 0$ se nazývá **nulový polynom**. (U nulového polynomu nebudeme mluvit o stupni.)

Číslo $c \in \mathbb{C}$ se nazývá **kořen** polynomu $p(x)$, jestliže $p(c) = 0$.

Věta - Základní věta algebry.

Každý polynom stupně alespoň 1 má v oboru komplexních čísel alespoň jeden kořen.

Základní operace s polynomy jsou **sčítání, odčítání, násobení, dělení**.

Věta Jsou-li $a(x), b(x)$ dva polynomy, $b(x)$ není nulový, potom existují a jsou jednoznačně určeny polynomy $q(x), r(x)$ takové, že $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$ a platí $\text{st}(r) < \text{st}(b)$ nebo $r = 0$.

Speciálně, je-li $b(x) = x - c$, potom existuje polynom $q(x)$ tak, že $a(x) = (x - c)q(x) + a(c)$.

Věta Je-li c kořen polynomu $a(x)$, potom existuje polynom $q(x)$ tak, že $a(x) = (x - c)q(x)$, kde $\text{st}(q) = \text{st}(a) - 1$.

Věta Každý polynom stupně n ($n \geq 1$) tvaru $a(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ lze v komplexním oboru vyjádřit ve tvaru

$$a(x) = a_0(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ jsou kořeny polynomu $a(x)$.

Tento zápis polynomu se nazývá **rozklad polynomu na kořenové činitele**.

Věta Je-li číslo $c \in \mathbb{C}$ kořenem polynomu $a(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ s **reálnými** koeficienty, potom také číslo komplexně sdružené $\bar{c} \in \mathbb{C}$ je kořenem polynomu $a(x)$.

Důsledek Každý polynom s reálnými koeficienty lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.

Reálný rozklad polynomu.

Jestliže v rozkladu polynomu na kořenové činitele roznásobíme každé dva kořenové činitele, které odpovídají dvojici komplexně sdružených kořenů, získáme **reálný rozklad polynomu**.

Hornerovo schéma

Dělení polynomu $a(x)$ polynomem $x - c$ lze jednoduše zapsat do tabulky. Tento způsob dělení polynomu polynomem $x - c$ bývá nazýván **Hornerovo schéma**.

Označme

$$a(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$q(x) = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \cdots + q_{n-2}x + q_{n-1}.$$

Dělení $\mathbf{a(x) = (x - c)q(x) + r}$ zapíšeme do tabulky takto:

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
		+	+	+		+	+
c		q_0c	q_1c	q_2c	$\cdots$	$q_{n-2}c$	$q_{n-1}c$
	q_0	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_{n-1}	r

MATICE

Matice typu m/n je soubor $m \cdot n$ prvků uspořádaných do m řádků a n sloupců:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

Prvky a_{kk} , pro které je řádkový index stejný jako index sloupcový, se nazývají prvky **diagonální**.

Matice $\mathbf{A}$ typu m/n se nazývá matice **čtvercová řádu n** , jestliže $m = n$, t.j. jestliže má stejný počet řádků a sloupců.

Matice $\mathbf{A}$ typu m/n se nazývá matice **obdélníková**, jestliže $m \neq n$.

Matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu m/n se nazývá matice **nulová** a značí se $\mathbf{0}$, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i = 1, \dots, m$ a pro každé $j = 1, \dots, n$, t.j. jestliže na každém místě matice je prvek 0.

Čtvercová matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ řádu n se nazývá matice **diagonální**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i \neq j$. Potom píšeme $\mathbf{A} = \text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$.

Jednotková matice řádu n je matice $\mathbf{I} = \text{diag}[\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n]$, t.j. $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ typu m/n je **horní (resp. dolní) trojúhelníková** matice, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i > j$ (resp. $i < j$).

Řekneme, že čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n je **symetrická**, jestliže $a_{ij} = a_{ji}$ pro každé $i, j = 1, \dots, n$.

Matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ jsou si **rovny**, jestliže to jsou matice stejného typu m/n a jestliže $a_{ij} = b_{ij}$ pro každé $i = 1, \dots, m$ a pro každé $j = 1, \dots, n$. Píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Transponování matice

Je-li $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ matice typu m/n , potom matice typu n/m tvaru $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$ se nazývá matice **transponovaná**.

Věta

1. Matice $\mathbf{A}$ je symetrická $\iff \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

2. Pro každou matici $\mathbf{A}$ platí: $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Sčítání matic

Jsou-li matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ matice stejného typu m/n , potom jejich **součet** je matice typu m/n tvaru $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Násobení matice číslem

Je-li λ číslo, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ matice typu m/n , potom matice typu m/n tvaru $\lambda\mathbf{A} = [\lambda a_{ij}]$ se nazývá **násobek** matice $\mathbf{A}$ číslem λ .

Matice **opačná** k matici $\mathbf{A}$ je násobek matice $\mathbf{A}$ číslem -1 , tedy $-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}$.

Odečítání matic je součet matice a matice opačné, t.j. $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

n -členný aritmetický vektor je matice typu $n/1$.

Při zápisu n -členného aritmetického vektoru budeme vynechávat druhý index, budeme psát

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T.$$

Násobení matic

Jsou-li $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ matice typu m/n , $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ matice typu n/p , potom matice $\mathbf{C} = [c_{ik}]$ typu m/p se nazývá **součin** matic $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, jestliže pro každé $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, p$ platí:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}.$$

Věta Pro každé tři matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a pro libovolné číslo λ platí, kdykoliv alespoň jedna strana rovnosti je definována:

1. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$,
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$,
3. $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$,
4. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$,
5. $(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{AB})$.

Pro jednotkovou matici $\mathbf{I}$ a nulovou matici $\mathbf{0}$ a pro každou matici $\mathbf{A}$ platí, kdykoliv levá strana rovnosti je definována:

6. $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$, $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$,
7. $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$, $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$.

Jestliže $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n , potom čtvercová matice $\mathbf{A}^{-1}$ řádu n se nazývá **inverzní matice** k matici $\mathbf{A}$, jestliže $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

DETERMINANTY

Permutace konečné množiny $M = \{1, 2, \dots, n\}$ je prosté zobrazení množiny M na sebe. Jestliže $i, j \in M = \{1, 2, \dots, n\}$, potom permutace π taková, že $\pi(i) = j$, $\pi(j) = i$ a pro každé $s \in M \setminus \{i, j\}$ je $\pi(s) = s$, se nazývá **transpozice**.

Každá permutace se dá vyjádřit jako složení konečného počtu transpozic.

Permutace se nazývá **sudá**, je-li složením sudého počtu transpozic. Permutace se nazývá **lichá**, je-li složením lichého počtu transpozic.

Znaménko permutace je 1, je-li permutace sudá, -1 , je-li permutace lichá. Píšeme

$$\text{zn}(\pi) = \begin{cases} 1 & , \text{ je-li permutace } \pi \text{ sudá} \\ -1 & , \text{ je-li permutace } \pi \text{ lichá.} \end{cases}$$

Definice Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu n . Potom **determinant matice $\mathbf{A}$** je prvek

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi} \text{zn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

kde sčítáme přes všechny permutace π na množině $\{1, 2, \dots, n\}$.

Pro $n = 2$ máme: $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

Pro $n = 3$ máme:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Tato metoda výpočtu determinantu matice řádu 3 se nazývá **Sarrusovo pravidlo**.

Věta Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ platí

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}.$$

Definice Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu n , nechť $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Potom $\mathbf{A}_{ij}$ bude značit matici řádu $n-1$, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ tím, že vyškrtíme i -tý řádek a j -tý sloupec. Prvek $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$ nazýváme **algebraický doplněk matice $\mathbf{A}$ k místu (i, j)** .

Věta (o rozvoji determinantu podle řádku)

Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu n , nechť i je číslo zvoleného řádku, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Potom

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}.$$

Definice *Následující úpravy matice $\mathbf{A}$ typu m/n*

1. *vyměnění dvou řádků (resp. sloupců) matice,*
2. *vynásobení řádku (resp. sloupce) matice nenulovým číslem,*
3. *přičtení k -násobku j -tého řádku (resp. sloupce) k řádku (resp. sloupci) i -tému, $i \neq j, 1 \leq i, j \leq m$ (resp. $1 \leq i, j \leq n$)*

se nazývají elementární řádkové (resp. sloupcové) úpravy matice $\mathbf{A}$.

Věta *Jestliže čtvercová matice $\mathbf{B}$ řádu n vznikne ze čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n tím, že vyměníme i -tý a j -tý řádek (resp. sloupec) ($i \neq j$), potom*

$$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}.$$

Důsledek *Jsou-li ve čtvercové matici $\mathbf{A}$ řádu n dva řádky (resp. sloupce) stejné, potom $\det \mathbf{A} = 0$.*

Věta *Nechť matice $\mathbf{B}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ řádu n tím, že řádek (resp. sloupec) i vynásobíme číslem c . Potom*

$$\det \mathbf{B} = c \cdot \det \mathbf{A}.$$

Důsledek *Je-li v matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ řádu n celý řádek (resp. sloupec) nulový, potom $\det \mathbf{A} = 0$.*

Věta *Nechť matice $\mathbf{B}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ řádu n tím, že k řádku (resp. sloupci) i přičteme k -násobek řádku (resp. sloupce) j , $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Potom*

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}.$$

Věta *Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou matice řádu n . Potom*

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.$$