MATICE

Matice typu m/n nad tělesem T je soubor $m{\cdot}n$ prvků z tělesa T uspořádaných do m řádků a n sloupců:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

Prvek $a_{i,j}$ je **prvek matice A** na místě (i, j), tj. v řádku i a v sloupci j. První index i je index řádkový, druhý index j je index sloupcový.
Těleso T může být těleso komplexních čísel **C**, těleso reálných čísel **R** či jiné těleso. Matici nad tělesem reálných čísel **R** nazýváme **reálná matice**.
Typ matice udává počet řádků a počet sloupců matice (v tomto pořadí).

Prvky a_{kk}, pro které je řádkový index stejný jako index sloupcový, se nazývají prvky **diagonální**.

Matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu m/n se nazývá matice **nulová** a značí se **0**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i = 1, ..., m$ a pro každé $j = 1, ..., n$, t.j. jestliže na každém místě matice je prvek 0.

Matice **A** typu m/n se nazývá matice **čtvercová řádu** n, jestliže $m = n$, t.j. jestliže má stejný počet řádků a sloupců.

Matice **A** typu m/n se nazývá matice **obdélníková**, jestliže $m \neq n$.

Čtvercová matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ řádu n se nazývá matice **diagonální**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i \neq j$. Potom píšeme $\mathbf{A} = \mathrm{diag}\,[a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}]$.

Jednotková matice řádu n je matice $\mathbf{I} = \mathrm{diag}[\underbrace{1, 1, ..., 1}_{n}]$,

$$\text{t.j. } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Řekneme, že čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n je **symetrická**, jestliže $a_{ij} = a_{ji}$ pro každé $i, j = 1, ..., n$.

Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ typu m/n je **horní (resp. dolní) trojúhelníková matice**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i > j$ (resp. $i < j$).

Rovnost matic:
Matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ jsou si **rovny**, jestliže to jsou matice stejného typu m/n a jestliže $a_{ij} = b_{ij}$ pro každé $i = 1, ..., m$ a pro každé $j = 1, ..., n$. Píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Operace s maticemi

Transponování matice
Je-li $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ matice typu m/n, potom matice typu n/m tvaru $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$ se nazývá **matice transponovaná** k matici $\mathbf{A}$.

Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ je } \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Tvrzení:

1. Matice $\mathbf{A}$ je symetrická právě tehdy, když $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.
2. Pro každou matici $\mathbf{A}$ platí: $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Sčítání matic
Jsou-li matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ matice stejného typu m/n nad tělesem T, potom jejich **součet** je matice typu m/n nad tělesem T tvaru

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Vlastnosti sčítání matic:
Jsou-li $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ matice téhož typu m/n nad tělesem T a $\mathbf{0}$ je nulová matice typu m/n nad T, platí:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$,
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$,
4. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

Násobení matice prvkem z tělesa
Je-li λ prvek z tělesa T, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ matice typu m/n nad tělesem T, potom matice typu m/n tvaru

$$\lambda\mathbf{A} = [\lambda a_{ij}]$$

se nazývá **násobek** matice $\mathbf{A}$ prvkem λ.

Matice **opačná** k matici $\mathbf{A}$ je násobek matice $\mathbf{A}$ číslem -1, tedy
$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}$.

Odečítání matic je součet matice a matice opačné, t.j. $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

Vlastnosti násobení matice prvkem z tělesa:
Jsou-li $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ matice typu m/n nad tělesem T, $\mathbf{0}$ nulová matice téhož typu m/n nad T a λ, λ_1, λ_2 jsou libovolné prvky z tělesa T, platí:

1. $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$,
2. $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{A} + \lambda_2\mathbf{A}$,
3. $(\lambda_1.\lambda_2)\mathbf{A} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{A})$,
4. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
5. $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$,
6. $(\lambda\mathbf{A})^T = \lambda\mathbf{A}^T$.

n**-členný aritmetický vektor** nad tělesem T je matice typu $n/1$ nad tělesem T.

Při zápisu n-členného aritmetického vektoru budeme vynechávat druhý index, budeme psát

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [a_1, a_2, ..., a_n]^T .$$

Symbolem $\mathbf{R}_n$ budeme označovat množinu všech n-členných aritmetických vektorů nad tělesem $\mathbf{R}$ reálných čísel.

Násobení matic
Jsou-li $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ matice typu m/n nad tělesem T, $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ matice typu n/p nad tělesem T, potom matice $\mathbf{C} = [c_{ik}]$ typu m/p se nazývá **součin matic** $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, jestliže pro každé $i = 1, ..., m,\ k = 1, ..., p$ platí:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Poznámka:

1. Jestliže $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, potom prvek v matici $\mathbf{C}$ na místě (i, k) je vlastně skalární součin i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ s k-tým sloupcem matice $\mathbf{B}$.
2. Lze násobit pouze matice vhodných typů, t.j. existuje součin $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, jestliže počet sloupců matice $\mathbf{A}$ se rovná počtu řádků matice $\mathbf{B}$.
3. POZOR!!! Násobení matic **není komutativní operace**, t.j. pro mnoho matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ je $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Vlastnosti násobení matic:
Pro každé tři matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ nad tělesem T a pro libovolný prvek $\lambda \in T$ platí, pokud je alespoň jedna strana rovnosti definována:

1. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$,
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$,
3. $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$,

4. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$,

5. $(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{AB})$.

Dále platí pro jednotkovou matici $\mathbf{I}$ a nulovou matici $\mathbf{0}$ a pro každou matici $\mathbf{A}$ nad tělesem T, kdykoliv je definována levá strana rovnosti:

(a) $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$, $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$,

(b) $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$, $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$.

Definice:
Jestliže $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n nad tělesem T, potom čtvercová matice $\mathbf{A}^{-1}$ řádu n nad T se nazývá **inverzní matice** k matici $\mathbf{A}$, jestliže $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ a $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice řádu n.

Věta:
Ke čtvercové matici existuje **nejvýše jedna** inverzní matice.

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC I (GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA - využití redukovaného stupňovitého tvaru matice)

Nechť je dána matice $\mathbf{A}$ typu m/n nad tělesem $\mathbf{R}$ reálných čísel, n-členný aritmetický vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ nad $\mathbf{R}$ a m-členný aritmetický vektor $\mathbf{b} = [b_1, b_2, ..., b_m]^T$ nad $\mathbf{R}$. Potom

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

je **soustava** m **lineárních algebraických rovnic o** n **neznámých**.

Jestliže $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, potom $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ rozepíšeme do tvaru:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

t.j.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = &\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = &\ b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = &\ b_m. \end{aligned}$$

Matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ se nazývá **matice soustavy**.

Vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ **vektor neznámých**.

Vektor $\mathbf{b} = [b_1, b_2, ..., b_m]^T$ **vektor pravých stran**.

Matici $[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ nazýváme **rozšířená matice soustavy**.

Definice:
Nechť $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je soustava m lineárních rovnic o n neznámých. Potom každý n-členný aritmetický vektor $\mathbf{x}$ nad tělesem $\mathbf{R}$, pro který platí $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, nazýváme **řešení soustavy rovnic**.
Dvě soustavy lineárních rovnic nazýváme **ekvivalentní soustavy**, jestliže mají stejné množiny řešení.

Definice:
Následující úpravy matice $\mathbf{A}$ (typu m/n)

1. vzájemná výměna dvou řádků matice,
2. vynásobení řádku matice **nenulovým** číslem,
3. přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku,

se nazývají **elementární řádkové úpravy matice $\mathbf{A}$**.

Věta:
Jestliže matice $[\mathbf{C}|\mathbf{d}]$ vznikne z matice $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ užitím řádkových elementárních úprav, potom soustavy lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$ jsou ekvivalentní.

Definice:
Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je ve **stupňovitém tvaru s pivoty 1**, jestliže platí:

1. Jestliže řádek není nulový, potom první nenulové číslo je 1. Toto číslo se nazývá **pivot** neboli **vedoucí prvek**.
2. Všechny nulové řádky jsou až za řádky nenulovými.
3. V každých dvou nenulových řádcích $i, j, i < j$, je pivot v řádku j více vpravo než pivot v řádku i.

Říkáme, že matice je v **redukovaném stupňovitém tvaru s pivoty 1**, jestliže navíc platí:
Každý sloupec obsahující pivot 1 má všude jinde 0.

Věta:
Každou matici lze převést pomocí řádkových elementárních úprav na matici ve stupňovitém tvaru s pivoty 1 a také na matici v redukovaném stupňovitém tvaru s pivoty 1.

LINEÁRNÍ VEKTOROVÝ PROSTOR

Definice:
Neprázdná množina $\mathcal{L}$ se nazývá **lineární vektorový prostor** nad tělesem T, jestliže platí:

1. Pro libovolné dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}$ existuje jednoznačně určený prvek $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{L}$ nazývaný **součet prvků u** a **v**.
2. Pro libovolný prvek $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ a pro libovolný prvek $\lambda \in T$ existuje jednoznačně určený prvek $\lambda\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ nazývaný **násobek prvku u prvkem** λ z tělesa T.
3. Pro každé dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}$ platí $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.
(komutativita sčítání)
4. Pro každé tři prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{L}$ platí $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
(asociativita sčítání)
5. Existuje prvek $\mathbf{0} \in \mathcal{L}$ takový, že pro každý prvek $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ platí
$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$.
(existence nulového prvku)
6. Pro každý prvek $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ existuje prvek $(-\mathbf{u}) \in \mathcal{L}$ takový, že
$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$. (existence opačného prvku k prvku)
7. Pro každé dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}$ a pro každý prvek $\lambda \in T$ platí
$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$.
8. Pro každý prvek $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ a pro každé dva prvky $\lambda, \alpha \in T$ platí
$(\lambda + \alpha)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u}$.
9. Pro každý prvek $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ a pro každé dva prvky $\lambda, \alpha \in T$ platí
$(\lambda\alpha)\mathbf{u} = \lambda(\alpha\mathbf{u})$.
10. Pro každý prvek $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ platí $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Uveďme příklady lineárních vektorových prostorů nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$.

1. Množina všech orientovaných úseček v rovině, t.j.
   $\mathbf{R}_2 = \{[u_1, u_2]^T; u_1, u_2 \in \mathbf{R}\}$.
2. Množina všech orientovaných úseček v prostoru, t.j.
   $\mathbf{R}_3 = \{[u_1, u_2, u_3]^T; u_1, u_2, u_3 \in \mathbf{R}\}$.
3. Množina všech reálných čísel, t.j. $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1$
4. $\mathbf{R}_n = \{[u_1, u_2, ..., u_n]^T; u_1, u_2, ..., u_n \in \mathbf{R}\}$ pro libovolné přirozené n, jestliže sčítání i násobky reálným číslem definujeme po složkách, t.j.
   $[u_1, ..., u_n]^T + [v_1, ..., v_n]^T = [u_1 + v_1, ..., u_n + v_n]^T$,
   $\lambda[u_1, ..., u_n]^T = [\lambda u_1, ..., \lambda u_n]^T$
   pro každé $[u_1, u_2, ..., u_n]^T, [v_1, v_2, ..., v_n]^T \in \mathbf{R}_n$ a pro každé $\lambda \in \mathbf{R}$.
5. $\mathcal{M}_{m,n} = \{\mathbf{A}; \mathbf{A}$ je reálná matice typu $m/n\}$ pro libovolná přirozená čísla m, n.
6. $\mathcal{P}_n = \{p(x); p(x)$ je polynom do stupně n, včetně nulového polynomu$\}$ pro libovolné celočíselné $n \geq 0$.
7. $\mathcal{P} = \{p(x); p(x)$ je polynom$\}$.
8. $\mathcal{C}(a, b) = \{f(x); f(x)$ je reálná funkce, spojitá naintervalu $< a, b >\}$.

Věta: (základní vlastnosti)
Nechť $\mathcal{L}$ je lineární vektorový prostor nad tělesem T. Potom platí:

1. Nulový prvek je určen jednoznačně.
2. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{L}$: jestliže $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$, potom $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.
3. Ke každému prvku $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ je opačný prvek určen jednoznačně.
4. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{L}$: jestliže $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}$, potom $\mathbf{x} = \mathbf{z} + (-\mathbf{y})$.
5. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}$: $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
   $\forall \lambda \in T$: $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
6. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}$: $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.
7. Jestliže $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$, potom buď $\lambda = 0$ nebo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je lineární vektorový prostor nad tělesem T, nechť $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in \mathcal{L}$, nechť $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in T$.
Prvek

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n \in \mathcal{L}$$

se nazývá **lineární kombinace prvků** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ s koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Lineární kombinace $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n$ se nazývá **netriviální**, jestliže existuje $i \in \{1, 2, ..., n\}$ takové, že $\lambda_i \neq 0$ (tj. existuje alespoň jeden nenulový koeficient).
Lineární kombinace $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n$ se nazývá **triviální**, jestliže $\lambda_i = 0$ pro každé $i = 1, 2, ..., n$ (tj. všechny koeficienty jsou nulové).

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je lineární vektorový prostor nad tělesem T, nechť $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in \mathcal{L}$.
Prvky $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ se nazývají **lineárně nezávislé**, jestliže každá jejich netriviální lineární kombinace je nenulový prvek.

Prvky $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ se nazývají **lineárně závislé**, jestliže nejsou lineárně nezávislé, t.j. jestliže existuje jejich netriviální lineární kombinace, která se rovná nulovému prvku.

Jak tedy určovat, zda prvky $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ lineárního vektorového prostoru $\mathcal{L}$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé? Napíšeme jejich obecnou lineární kombinaci a položíme ji rovnou nulovému prvku prostoru $\mathcal{L}$, tedy $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. Určíme, pro které hodnoty koeficientů $\lambda_1, ..., \lambda_n$ je rovnost splněna. Pokud rovnost platí jen pro $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, ..., \lambda_n = 0$, jsou prvky $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ lineárně nezávislé. Pokud je rovnost splněna i pro nějaké nenulové hodnoty koeficientů $\lambda_1, ..., \lambda_n$, jsou prvky $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ lineárně závislé.

Věta: (charakterizace lineárně závislých prvků)
Nechť $\mathcal{L}$ je lineární vektorový prostor nad tělesem T, nechť $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in \mathcal{L}$ jsou prvky tohoto prostoru.
Prvky $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když alespoň jeden z nich se dá vyjádřit jako lineární kombinace ostatních $n-1$ prvků.

Důsledek:
Každá neprázdná podmnožina množiny lineárně nezávislých prvků lineárního vektorového prostoru je opět lineárně nezávislá.

Definice:
Řekneme, že neprázdná podmnožina $\mathcal{L}'$ lineárního vektorového prostoru $\mathcal{L}$ nad tělesem T je **podprostor prostoru $\mathcal{L}$**, jestliže platí:

1. pro každé dva prvky $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}'$ je $\quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{L}'$,
2. pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{L}'$ a pro každý prvek $\lambda \in T$ je $\quad \lambda\mathbf{x} \in \mathcal{L}'$.

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je lineární vektorový prostor, nechť $M = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k\}$ je konečná podmnožina prostoru $\mathcal{L}$.
Množina všech lineárních kombinací tvaru $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k$ se nazývá **lineární obal konečné množiny** M a značí se $\langle M \rangle$.

Definice:
Řekneme, že množina M **generuje** lineární vektorový prostor $\mathcal{L}$ nad tělesem T (je **množinou generátorů**, je **generující množinou**), jestliže lineární obal množiny M je celý prostor $\mathcal{L}$, t.j. $\langle M \rangle = \mathcal{L}$. (To znamená, že každý prvek prostoru $\mathcal{L}$ lze psát jako lineární kombinaci prvků množiny M.)

Definice:
Existuje-li konečná generující množina M prostoru $\mathcal{L}$, říkáme, že prostor $\mathcal{L}$ je **konečně generovaný prostor**.

Dále se budeme věnovat pouze lineárním vektorovým prostorům, které jsou konečně generované.

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je konečně generovaný lineární vektorový prostor nad tělesem T. Lineárně nezávislá, generující množina (konečná) prostoru $\mathcal{L}$ se nazývá **báze prostoru $\mathcal{L}$**.

Věta: (o existenci lineárně nezávislé podmnožiny generátorů)
Nechť $\mathcal{L}$ je nenulový, konečně generovaný lineární vektorový prostor, nechť konečná množina M je množina generátorů prostoru $\mathcal{L}$.
Potom existuje podmnožina $N \subseteq M$, která je bází prostoru $\mathcal{L}$.

Důsledek: (o existenci báze)
V každém nenulovém, konečně generovaném lineárním vektorovém prostoru existuje báze.

Věta: (Steinitzova věta o výměně)
Nechť $\mathcal{L}$ je nenulový lineární vektorový prostor nad tělesem T, nechť $M = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_m\}$ je množina generátorů prostoru $\mathcal{L}$, nechť $N = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n\}$ je množina lineárně nezávislých prvků prostoru $\mathcal{L}$.
Potom $n \leq m$ a některých n prvků množiny M lze nahradit prvky množiny N tak, že vzniklá množina opět generuje prostor $\mathcal{L}$.

Tato Steinitzova věta má řadu důležitých důsledků, některé uvedeme v následujících větách.

Věta: (počet prvků báze)
Každé dvě báze nenulového, konečně generovaného lineárního vektorového prostoru mají stejný počet prvků.

Tato věta umožňuje definovat pojem dimenze prostoru.

Definice:
Počet prvků báze konečně generovaného lineárního vektorového prostoru se nazývá **dimenze prostoru $\mathcal{L}$** a značí $\dim \mathcal{L}$.
Je-li $\mathcal{L}$ nulový (triviální) prostor, definuje se $\dim \mathcal{L} = 0$.

Věta: (věta o doplnění báze)
Každou neprázdnou, lineárně nezávislou množinu nenulového, konečně generovaného prostoru $\mathcal{L}$ lze doplnit na bázi prostoru $\mathcal{L}$.

Důsledek:
Je-li $\dim \mathcal{L} = n, n \in \mathbf{N}$, a prvky $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in \mathcal{L}$ jsou lineárně nezávislé, potom prvky $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ tvoří jednu možnou bázi prostoru $\mathcal{L}$.

Věta: (jednoznačnost vyjádření prvku v dané bázi)
Každý prvek lineárního vektorového prostoru $\mathcal{L}$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze, tj.
je-li $\mathcal{L}$ nenulový, konečně generovaný lineární vektorový prostor nad tělesem T, dále $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n$ je báze prostoru $\mathcal{L}$, a $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ je libovolný prvek prostoru $\mathcal{L}$, potom pokud je prvek $\mathbf{x}$ zapsán dvěma způsoby jako lineární kombinace prvků báze, t.j. $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{b}_n$, $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{b}_n$, potom musí platit rovnost $\lambda_i = \alpha_i$ pro každé $i = 1, ..., n$.

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je nenulový, konečně generovaný lineární vektorový prostor nad tělesem T, nechť $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n$ je báze prostoru $\mathcal{L}$.
Je-li $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ libovolný prvek, potom jednoznačně určené koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ v lineární kombinaci $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{b}_n$ budeme nazývat **souřadnice prvku x v bázi** $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n$.
Píšeme $\widehat{\mathbf{x}} = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]^T$ a tento vektor nazýváme **souřadnicovým vektorem prvku x**.

Jakmile začneme využívat pojem souřadnic prvku v dané bázi, musíme předpokládat, že pořadí prvků v bázi je pevně dané, tj. předpokládáme, že se jedná o **uspořádanou bázi**.