FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI
KATEDRA
MATEMATIKY

KMA/GKP GEOMETRIE KŘIVEK A PLOCH

Diferenciální geometrie ploch

Parametrická plocha

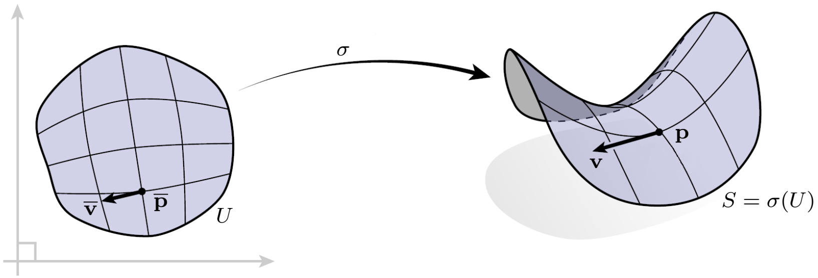
Definice (Parametrická plocha)

Parametrická plocha je zobrazení třídy alespoň C^1

$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$

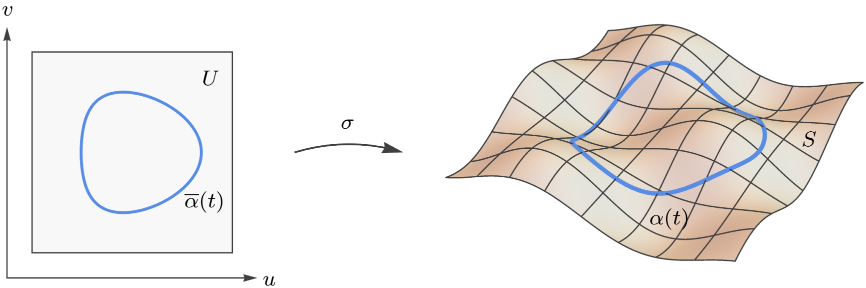
kde $U \subset \mathbb{R}^2$ je oblast. Obraz $S = \sigma(U) \subset \mathbb{R}^3$ budeme nazývat plocha.

- Zobrazení σ je třídy C^k, pokud má spojité parciální derivace do řádu k.
- Zobrazení σ přiřazuje bodům $\overline{\mathbf{p}} = [u, v] \in U$ body $\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}}) = [x, y, z] \in S$.
- Dvojice $[u, v] \in U$ se nazývá lokální souřadnice bodu $\mathbf{p} \in S$ vzhledem k parametrizaci σ.



Křivka na ploše

- Nechť je dána parametrická plocha
$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.$$
- Uvažujme křivku v parametrické oblasti
$$\overline{\alpha} : I \to U, \qquad \overline{\alpha}(t) = [u(t), v(t)].$$
- Její obraz na ploše získáme složením zobrazení:
$$\alpha(t) = (\sigma \circ \overline{\alpha})(t) = \sigma(u(t), v(t)).$$



Regulární parametrická plocha

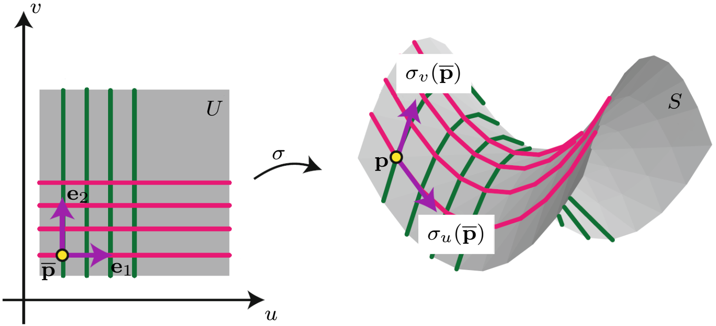
Definice (Regulární parametrická plocha)

Plocha $S = \sigma(U)$ se nazývá regulární, pokud v každém bodě $\overline{\mathbf{p}} \in U$ jsou vektory

$$\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \quad \text{a} \quad \sigma_v(\overline{\mathbf{p}})$$

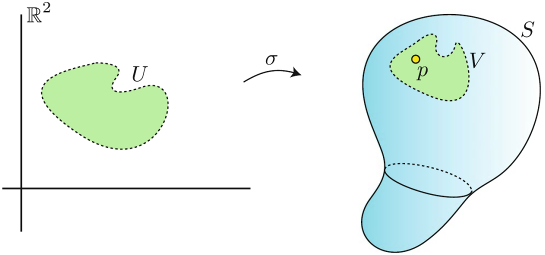
lineárně nezávislé, kde σ_u a σ_v jsou parciální derivace funkce σ podle u, resp. v.

- Vektory σ_u, σ_v dávají v bodě tečné směry na ploše.
- Křivky na ploše odpovídající rovnici $u =$ konst. a $v =$ konst. se nazývají parametrické křivky.



Obecnější definice plochy (nebudeme používat)

- Obecně se regulární plocha $S \subset \mathbb{R}^3$ definuje tak, že každý bod $\mathbf{p} \in S$ má okolí $V \subset S$, které je hladce bijektivně zobrazené (difeomorfně) na nějakou otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^2$:
$$\sigma : U \to V.$$
Tomuto zobrazení říkáme mapa.



- Jedna parametrizace obvykle nestačí – například kouli nelze pokrýt jedinou hladkou mapou bez degenerace (např. na pólech).
- Obecné plochy proto vyžadují více map, které se hladce překrývají. Soubor všech těchto map tvoří atlas plochy.
- V tomto kurzu budeme ale vždy pracovat jen s jednou globální parametrizací:
$$\sigma : U \to S, \qquad S = \sigma(U).$$

Tečný prostor

Definice (Tečný prostor)

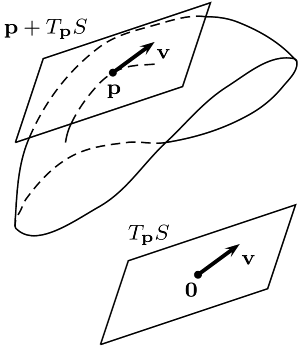
Nechť $S = \sigma(U)$ je regulární plocha a $\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}})$. Tečný prostor plochy S v bodě $\mathbf{p}$ je

$$T_{\mathbf{p}}S = \operatorname{span}\{\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}),\ \sigma_v(\overline{\mathbf{p}})\}\,.$$

- Jde o dvourozměrný podprostor vektorového zaměření $\mathbb{R}^3$ afinního prostoru $\mathbb{R}^3$.
- Každý tečný vektor $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ lze vyjádřit jako

$$\mathbf{v} = v_1\,\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) + v_2\,\sigma_v(\overline{\mathbf{p}}), \qquad v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

- Tečná rovina je potom afinní rovina $\mathbf{p} + T_{\mathbf{p}}S$, která vznikne posunutím tečného prostoru $T_{\mathbf{p}}S$ do bodu $\mathbf{p}$.



Tečná rovina

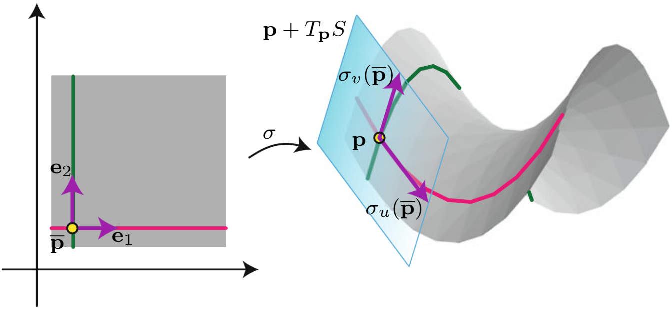
Definice (Tečná rovina)

Tečná rovina plochy S v bodě $\mathbf{p}$ je afinní rovina vzniklá posunutím tečného prostoru do bodu $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} + T_{\mathbf{p}}S = \{\, \mathbf{p} + \mathbf{v} \,;\, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S \,\}.$$

- Jde o afinní podprostor afinního prostoru $\mathbb{R}^3$.
- Parametricky ji lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{p} + u\,\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) + v\,\sigma_v(\overline{\mathbf{p}}), \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$



Diferenciál

- Množina $U \subset \mathbb{R}^2$ může být chápána jako regulární plocha, přičemž v každém bodě $\overline{\mathbf{p}} \in U$ platí: $T_{\overline{\mathbf{p}}}U \cong \mathbb{R}^2$.

Definice (Diferenciál parametrizace)

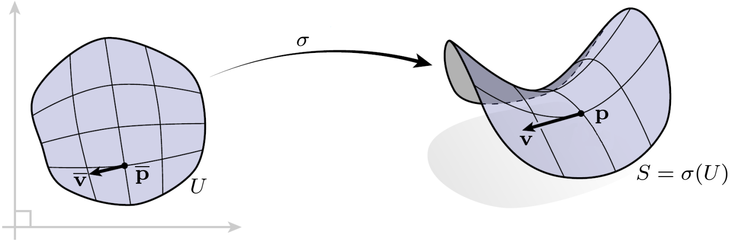
Mějme parametrickou plochu

$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \overline{\mathbf{p}} \mapsto \mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}}).$$

Diferenciál v bodě $\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}})$ je lineární zobrazení

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{p}} : T_{\overline{\mathbf{p}}}U \to T_{\mathbf{p}}S, \qquad \overline{\mathbf{v}} \mapsto \mathbf{v} = \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{p}}(\overline{\mathbf{v}}).$$

- Diferenciál zobrazuje „vektory v parametrické rovině“ na tečné vektory na ploše.



Diferenciál – Jacobiho matice

Definice (Matice diferenciálu)

Diferenciál $\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{p}}$ parametrizace

$$\sigma(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$$

v bodě $\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}})$ je vzhledem ke standardní bázi v $\mathbb{R}^2$ a standardní bázi v $\mathbb{R}^3$ určen Jacobiho maticí

$$\mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\overline{\mathbf{p}}) & \frac{\partial x}{\partial v}(\overline{\mathbf{p}}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\overline{\mathbf{p}}) & \frac{\partial y}{\partial v}(\overline{\mathbf{p}}) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\overline{\mathbf{p}}) & \frac{\partial z}{\partial v}(\overline{\mathbf{p}}) \end{pmatrix}.$$

- Připomeňme, že sloupce této matice $\sigma_u(\overline{\mathbf{p}})$ a $\sigma_v(\overline{\mathbf{p}})$ generují tečný prostor $T_{\mathbf{p}}S$.
- Vektor $\overline{\mathbf{v}} \in T_{\overline{\mathbf{p}}}U$ se zobrazí na vektor $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ podle vztahu
$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}})\,\overline{\mathbf{v}},$$
kde vektory v maticovém násobení chápeme vždy jako sloupcové.
- Souřadnice vektoru $\overline{\mathbf{v}}$ jsou tedy souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ v bázi $\{\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}), \sigma_v(\overline{\mathbf{p}})\}$.

Tvrzení

Parametrická plocha $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ je regulární v bodě $\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}})$, pokud má Jacobiho matice $\mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}})$ hodnost 2.

Příklad: Parametrická plocha, tečná rovina a diferenciál

Příklad (Paraboloid)

Mějme parametrizaci paraboloidu

$$\sigma(u, v) = [u, v, u^2 + v^2], \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

- Bod s lokálními souřadnicemi $\overline{\mathbf{p}} = [1, 2]$ se zobrazí na bod plochy

$$\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}}) = [1, 2, 5].$$

- Parciální derivace v bodě $\overline{\mathbf{p}}$ generují tečnou rovinu $T_{\mathbf{p}}S$

$$\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) = (1, 0, 2), \qquad \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = (0, 1, 4).$$

- Diferenciál $\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{p}}$ je popsán Jacobiho maticí

$$\mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Vektor $\overline{\mathbf{v}} = (1, -1) \in T_{\overline{\mathbf{p}}}U$ se zobrazí jako

$$\mathbf{v} = \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{p}}(\overline{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Normálový vektor k ploše

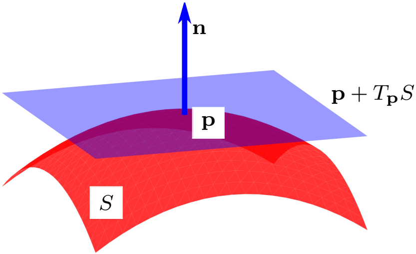
Definice (Normálový vektor)

Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ se nazývá normálový vektor k ploše S v bodě $\mathbf{p} \in S$, pokud platí:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{pro všechna } \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

- Jednotkový normálový vektor je normálový vektor délky 1.
- Pokud $S = \sigma(U)$ je regulární plocha a $\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}})$, potom jednotkový normálový vektor k ploše v bodě $\mathbf{p}$ je dán vztahem:

$$\mathbf{n} = \frac{\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\overline{\mathbf{p}})}{\|\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\overline{\mathbf{p}})\|}.$$



Vektorová pole na ploše

Definice (Vektorové pole na ploše)

Vektorové pole na regulární ploše S je zobrazení třídy alespoň C^1

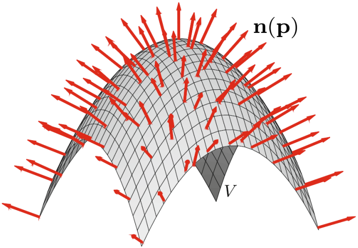
$$\mathbf{v} : S \to \mathbb{R}^3.$$

Nazývá se:

- tečné pole, pokud $\mathbf{v}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}S$,
- normálové pole, pokud $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ je normálový vektor k ploše S v bodě $\mathbf{p}$,

pro všechna $\mathbf{p} \in S$.

- Jednotkové normálové pole typicky značíme $\mathbf{n}(\mathbf{p})$.



Orientace na ploše

Definice (Orientace plochy)

Orientace regulární plochy znamená jednotkové normálové pole na ní.

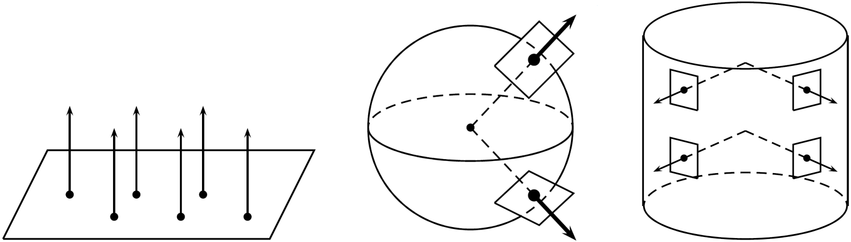
- Plocha S se nazývá orientovatelná, pokud na ní existuje orientace.
- Orientovatelná plocha spolu s volbou konkrétní orientace se nazývá orientovaná plocha.

- Orientace určuje, která strana plochy je považována za „horní“.
- Každý jednotkový normálový vektor si lze představit jako šipku ukazující „směr ven“ z plochy.
- Každá orientovatelná plocha má přesně dvě orientace, které se liší volbou pole $\mathbf{n}$ nebo $-\mathbf{n}$.

Příklady orientovatelných ploch

Příklad (Rovina, sféra, válec)

- Rovina xy má konstantní normálové pole $\mathbf{n}(\mathbf{p}) = (0, 0, 1)$.
- Sféra S^2 má přirozené normálové pole $\mathbf{n}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ (pokud zvolíme orientaci „ven z koule“).
- Válec $S^1 \times \mathbb{R}$ má normálové pole $\mathbf{n}(x, y, z) = (x, y, 0)$ (pokud osa válce je z-ová osa).

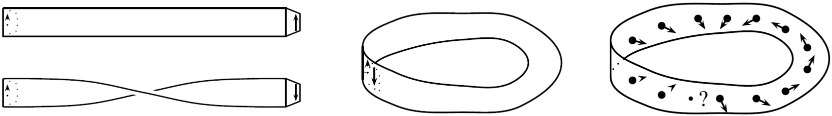


Neorientovatelnost Möbiova listu

Příklad

Möbiův list S není orientovatelný.

- Neexistuje spojité jednotkové normálové pole definované na celém listu.
- Pokud se pokusíme definovat normálový vektor a oběhneme celý list, po návratu se orientace vektoru obrátí.
- Möbiův list má jen jednu stranu a jednu hranu, což znemožňuje globální volbu jednotkové normály – tedy globální orientaci.



- Orientace plochy je nezbytná pro určení např. druhé fundamentální formy, hlavních křivostí a střední křivosti.

První fundamentální forma – motivace

- Nechť máme dva tečné vektory plochy $S = \sigma(U)$ v bodě $\mathbf{p}$ dané svými lokálními souřadnicemi $\overline{\mathbf{u}}$, $\overline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2$.
- Skutečné tečné vektory v $T_{\mathbf{p}}S$ dostaneme pomocí Jacobiho matice:

$$\mathbf{u} = \mathbf{J}_\sigma\, \overline{\mathbf{u}}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{J}_\sigma\, \overline{\mathbf{v}}.$$

- Jejich skalární součin v $\mathbb{R}^3$ spočteme jako

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{J}_\sigma \overline{\mathbf{u}})^\top (\mathbf{J}_\sigma \overline{\mathbf{v}}) = \overline{\mathbf{u}}^\top \underbrace{\mathbf{J}_\sigma^\top \mathbf{J}_\sigma}_{\mathbf{I}} \overline{\mathbf{v}}.$$

- Matice $\mathbf{I} = \mathbf{J}_\sigma^\top \mathbf{J}_\sigma$ je Gramova matice bázových vektorů σ_u, σ_v a určuje skalární součin v lokálních souřadnicích.
- Zobrazení, které dvojici lokálních souřadnic $\overline{\mathbf{u}}, \overline{\mathbf{v}}$ přiřazuje skalární součin odpovídajících vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$, se nazývá první fundamentální forma.
- Matici $\mathbf{I}$ budeme nazývat matice první fundamentální formy.

První fundamentální forma (v lokálních souřadnicích)

- První fundamentální forma popisuje vnitřní geometrii plochy – umožňuje měřit délky, úhly a obsahy přímo na ploše pouze pomocí lokálních souřadnic.

Definice (Koeficienty první fundamentální formy)

Nechť $S = \sigma(U)$ je regulární plocha. Čísla

$$E = \sigma_u \cdot \sigma_u, \quad F = \sigma_u \cdot \sigma_v, \quad G = \sigma_v \cdot \sigma_v$$

se nazývají koeficienty první fundamentální formy v bázi $\{\sigma_u, \sigma_v\}$.

- První fundamentální forma je popsána maticí

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

- Pro dva tečné vektory

$$\mathbf{u} = a\,\sigma_u + b\,\sigma_v, \qquad \mathbf{v} = c\,\sigma_u + d\,\sigma_v$$

plati

$$\mathrm{I}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}^\top} \underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{\overline{\mathbf{v}}}.$$

Výpočty pomocí první fundamentální formy

- Matice první fundamentální formy $\mathbf{I}(u,v)$ nám umožňuje měřit délky, úhly a obsahy na ploše, pouze pomocí údajů z parametrické roviny.

Tvrzení

Mějme křivky $\alpha(t) = \sigma(\overline{\alpha}(t)), t \in I$ a $\beta(s) = \sigma(\overline{\beta}(s)), s \in J$ na ploše $S = \sigma(U)$ takové, že $\alpha(t_0) = \beta(s_0) = \mathbf{p}$. Potom:

- Délka křivky α:

$$L = \int_I \sqrt{\overline{\alpha}'(t)^\top \, \mathbf{I}(\overline{\alpha}(t)) \, \overline{\alpha}'(t)} \, \mathrm{d}t$$

- Úhel mezi křivkami α, β v bodě $\mathbf{p}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{\alpha}'(t_0)^\top \, \mathbf{I}(\overline{\mathbf{p}}) \, \overline{\beta}'(s_0)}{\sqrt{\overline{\alpha}'(t_0)^\top \, \mathbf{I}(\overline{\mathbf{p}}) \, \overline{\alpha}'(t_0)} \sqrt{\overline{\beta}'(s_0)^\top \, \mathbf{I}(\overline{\mathbf{p}}) \, \overline{\beta}'(s_0)}}.$$

- Plocha obrazu oblasti $D \subset U$ na ploše:

$$\mathrm{Area}(\sigma(D)) = \iint_D \sqrt{\det \mathbf{I}(u,v)} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

- Všechny tyto výpočty jsou vnitřní – nezávisí na uložení plochy v prostoru.

Příklad: délka křivky na paraboloidu

Příklad (Paraboloid)

Mějme parametrizaci $\sigma(u,v)$ a křivku $\alpha(t) = \sigma(\overline{\alpha}(t))$, kde

$$\sigma(u,v) = [u, v, u^2 + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}, \qquad \overline{\alpha}(t) = [t, t], \quad t \in [0,1].$$

- Parciální derivace:

$$\sigma_u = (1, 0, 2u), \quad \sigma_v = (0, 1, 2v).$$

- Matice první fundamentální formy:

$$\mathbf{I}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & 4uv \\ 4uv & 1 + 4v^2 \end{pmatrix}.$$

- 1) Délka křivky přes 1FF:

$$L = \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{I}(t,t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{2 + 16t^2}\, \mathrm{d}t \approx 1{,}864.$$

- 2) Jako prostorová (3D) křivka:

$$\alpha'(t) = (1, 1, 4t), \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{2 + 16t^2},$$

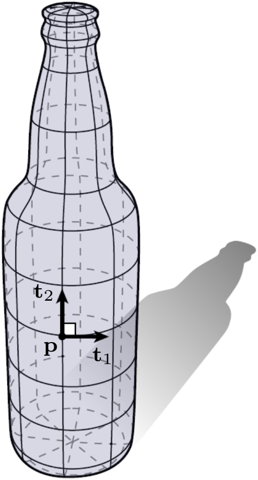
takže dostáváme stejný integrál.

Motivace: normálová křivost

- Když mluvíme o křivosti plochy, máme většinou jasnou představu, např.

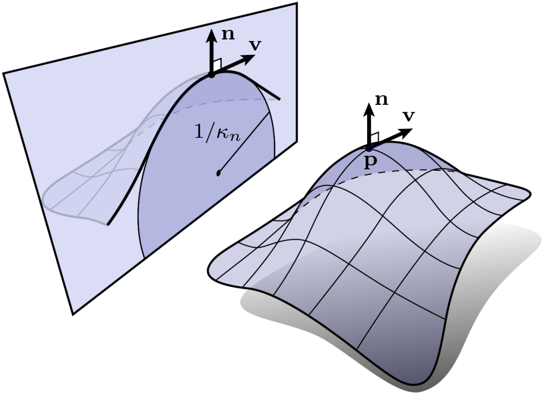
  míč je křivý, vs. stůl je rovný.

- Ale co třeba pivní láhev?
  - V jednom směru (kolem láhve) je zakřivená,
  - ve druhém směru (podél láhve) je rovná.
- Na ploše proto nestačí říct „má křivost", je třeba měřit křivost ve zvoleném směru v daném bodě.
- Tento pojem nazýváme normálová křivost.
- Z normálové křivosti získáme další typy křivostí, jako je Gaussova nebo střední.



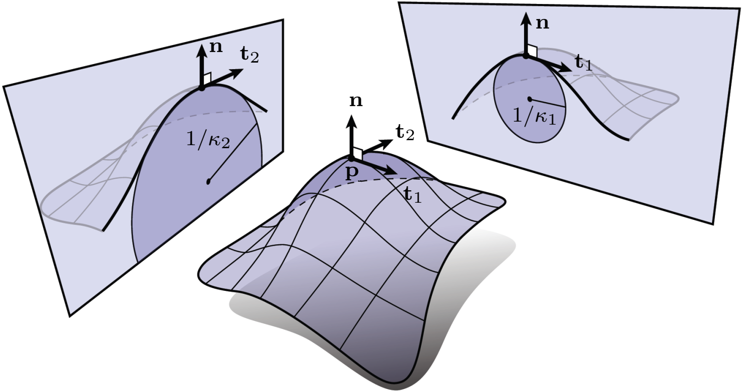
Co to je normálová křivost

- Uvažujme normálovou rovinu plochy S v bodě $\mathbf{p}$, která je určena
  - bodem $\mathbf{p}$ na ploše,
  - vektorem $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ (směr v tečné rovině),
  - normálovým vektorem $\mathbf{n}$ plochy S v bodě $\mathbf{p}$.
- Průnikem této roviny s plochou je rovinná křivka, jejíž znaménková křivost v bodě $\mathbf{p}$ je normálová křivost $\kappa_n(\mathbf{v})$.



Hlavní směry a hlavní křivosti

- V každém bodě $\mathbf{p}$ se můžeme ptát: ve kterých směrech se plocha zakřivuje nejvíce a ve kterých nejméně?
- Směry, kde je normálová křivost maximální a minimální, nazýváme hlavní směry $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$.
- Odpovídající křivosti se nazývají hlavní křivosti κ_1, κ_2.



Druhá fundamentální forma (v lokálních souřadnicích)

- Od tohoto místa dál budeme předpokládat, že σ je třídy alespoň C^2.
- První fundamentální forma popisuje měření v tečné rovině (délky, úhly).
- Druhá fundamentální forma popisuje zakřivení plochy vzhledem k normále.

Definice (Koeficienty druhé fundamentální formy)

Nechť $S = \sigma(U)$ je regulární orientovaná plocha a $\mathbf{n}(u, v)$ je její jednotkové normálové pole. Čísla

$$e = \sigma_{uu} \cdot \mathbf{n}, \quad f = \sigma_{uv} \cdot \mathbf{n}, \quad g = \sigma_{vv} \cdot \mathbf{n}$$

se nazývají koeficienty druhé fundamentální formy v bázi $\{\sigma_u, \sigma_v\}$.

- Druhá fundamentální forma je popsána maticí

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

- Pro dva tečné vektory

$$\mathbf{u} = a\,\sigma_u + b\,\sigma_v, \qquad \mathbf{v} = c\,\sigma_u + d\,\sigma_v$$

platí

$$\mathrm{II}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}}_{\overline{\mathbf{u}}^\top} \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}}_{\mathbf{II}} \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{\overline{\mathbf{v}}}.$$

Normálová křivost v souřadnicích

Definice (Normálová křivost)

Normálová křivost plochy $S = \sigma(U)$ v bodě $\mathbf{p}$ ve směru $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ je definována jako:

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{II}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{\mathrm{I}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

- V bázi $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ zapíšeme směr

$$\mathbf{v} = a\,\sigma_u + b\,\sigma_v.$$

- Pak platí:

$$\mathrm{I}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2, \qquad \mathrm{II}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = ea^2 + 2fab + gb^2.$$

- Normálová křivost ve směru $\mathbf{v}$ je tedy dána vztahem

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}.$$

Hlavní křivosti a hlavní směry

Definice (Hlavní křivosti a hlavní směry)

Nechť S je orientovaná regulární plocha a $\mathbf{p} \in S$.

- Hlavní křivosti κ_1, κ_2 v bodě $\mathbf{p}$ jsou maximální a minimální hodnoty normálové křivosti $\kappa_n(\mathbf{v})$ pro tečné vektory $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$.
- Směry, ve kterých je normálová křivost těchto hodnot dosažena, se nazývají hlavní směry.

- Normálová křivost ve směru $\mathbf{v} = a\,\sigma_u + b\,\sigma_v$ je dána vztahem

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}.$$

- Lze ukázat, že hledání extrémů této funkce vede na kvadratickou rovnici pro κ:

$$(EG - F^2)\,\kappa^2 - (eG - 2fF + gE)\,\kappa + (eg - f^2) = 0.$$

- Kořeny této rovnice jsou hlavní křivosti κ_1, κ_2.

Gaussova a střední křivost

Definice (Gaussova a střední křivost)

Mějme hlavní křivosti κ_1, κ_2 v bodě $\mathbf{p} \in S$.

- Gaussova křivost je součin hlavních křivostí:

$$K = \kappa_1 \, \kappa_2$$

- Střední křivost je aritmetický průměr hlavních křivostí:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

- Gaussovu a střední křivost lze spočítat přímo z koeficientů první a druhé fundamentální formy:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

- Hlavní křivosti jsou pak kořeny kvadratické rovnice

$$\kappa^2 - 2H\,\kappa + K = 0,$$

tedy

$$\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Určení hlavních směrů

- Hlavní směry jsou směry v tečné rovině, ve kterých normálová křivost nabývá svých extrémních hodnot – hlavních křivostí κ_1, κ_2.
- Hledáme tedy tečné vektory $\mathbf{t}_i \in T_{\mathbf{p}}S$ takové, že platí

$$\mathrm{II}_{\mathbf{p}}(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_i) = \kappa_i \, \mathrm{I}_{\mathbf{p}}(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_i), \qquad i = 1, 2.$$

- Po úpravě dostáváme maticovou rovnici v lokálních souřadnicích

$$(\mathbf{II} - \kappa_i \mathbf{I}) \, \overline{\mathbf{t}}_i = \mathbf{0}.$$

- Po rozepsání, kde $\overline{\mathbf{t}}_i = (a_i, b_i)$, dostaneme explicitní tvar homogenní soustavy rovnic:

$$\begin{pmatrix} e - \kappa_i E & f - \kappa_i F \\ f - \kappa_i F & g - \kappa_i G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2.$$

- Nenulová řešení $\overline{\mathbf{t}}_i = (a_i, b_i)$ určují hlavní směry v bodě $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{t}_i = a_i \, \sigma_u + b_i \, \sigma_v \, .$$

Alternativní výpočet hlavních křivostí a směrů

- Hlavní křivosti a hlavní směry lze získat také jako vlastní čísla a vlastní vektory Weingartenova zobrazení.
- Nechť $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ je regulární parametrická plocha a $\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}})$.
- Weingartenovo zobrazení popisuje, jak se vektor normály mění při pohybu po ploše.
- V bázi $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ je reprezentováno maticí

$$\mathbf{W}(\overline{\mathbf{p}}) = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{II} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

kde

$$E = \sigma_u \cdot \sigma_u, \quad F = \sigma_u \cdot \sigma_v, \quad G = \sigma_v \cdot \sigma_v,$$
$$e = \sigma_{uu} \cdot \mathbf{n}, \quad f = \sigma_{uv} \cdot \mathbf{n}, \quad g = \sigma_{vv} \cdot \mathbf{n}.$$

- Vlastní čísla matice $\mathbf{W}$ jsou hlavní křivosti κ_1, κ_2.
- Vlastní vektory $\overline{\mathbf{t}}_1, \overline{\mathbf{t}}_2$ udávají hlavní směry v parametrických souřadnicích a skutečné směry na ploše jsou

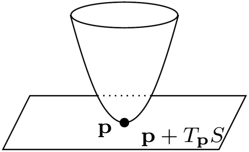
$$\mathbf{t}_i = \mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}})\,\overline{\mathbf{t}}_i, \qquad i = 1, 2.$$

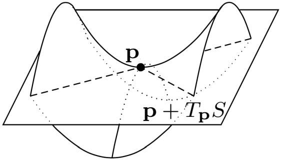
Typy bodů na ploše podle Gaussovy křivosti

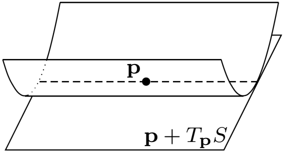
Definice (Klasifikace bodů)

Body $\mathbf{p} \in S$ rozlišujeme podle hodnoty Gaussovy křivosti $K(\mathbf{p})$:

- eliptický bod – $K > 0$,
- hyperbolický bod – $K < 0$,
- parabolický bod – $K = 0$.



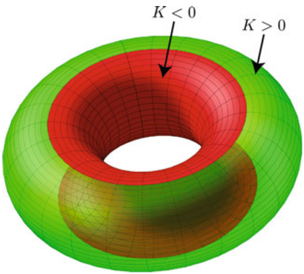




Příklady ploch podle typu bodů

Příklad

- Plocha pouze s eliptickými body: sféra.
- Plocha pouze s hyperbolickými body: hyperbolický paraboloid.
- Plocha pouze s parabolickými body: kužel (mimo vrchol), válec.
- Plocha obsahující všechny typy bodů: torus.



Kolmost hlavních směrů a Eulerova identita

Tvrzení (Kolmost hlavních směrů)

Pokud jsou hlavní křivosti v bodě $\mathbf{p}$ různé, $\kappa_1 \neq \kappa_2$, pak odpovídající hlavní směry $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ jsou v tečné rovině $T_{\mathbf{p}}S$ navzájem kolmé.

Tvrzení (Eulerova identita)

Pro libovolný jednotkový vektor

$$\mathbf{v}_\varphi = \cos\varphi\,\mathbf{t}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{t}_2 \in T_{\mathbf{p}}S$$

platí

$$\kappa_n(\varphi) = \kappa_1 \cos^2\varphi + \kappa_2 \sin^2\varphi.$$

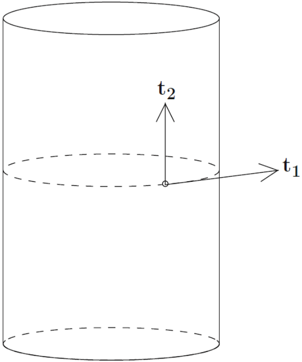
- Normálová křivost v libovolném směru je „vážený průměr“ hlavních křivostí.
- Extrémy normálové křivosti nastávají právě v hlavních směrech $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$.

Hlavní směry na válci

Příklad (Hlavní směry na válci)

Na rotačním válci jsou hlavní směry dány

- směrem $\mathbf{t}_1$ podél kružnic, kde $\kappa_1 = \dfrac{1}{r}$,
- směrem $\mathbf{t}_2$ podél osy válce, kde $\kappa_2 = 0$.



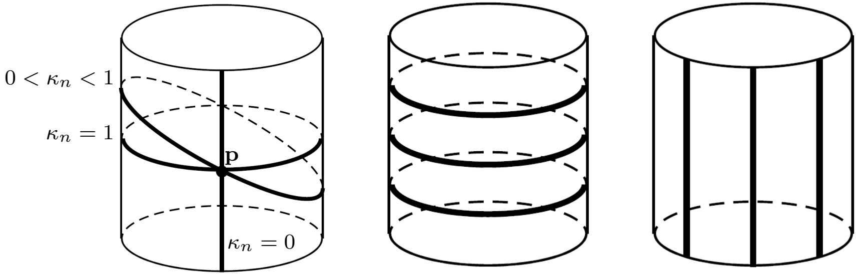
Hlavní křivky

Definice (Hlavní křivka)

Parametrizovaná křivka $\gamma : I \to S$ na orientované regulární ploše S se nazývá hlavní křivka, jestliže v každém bodě platí, že tečný vektor $\gamma'(t)$ je hlavní směr.

Příklad

Hlavní křivky na válci jsou přímky (podél osy) a kružnice (kolmé na osu).



Asymptotické směry a křivky

Definice (Asymptotický směr)

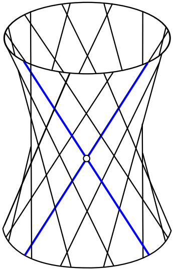
Vektor $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ na orientované regulární ploše S se nazývá asymptotický směr v bodě $\mathbf{p}$, pokud pro něj platí
$$\kappa_n(\mathbf{v}) = 0.$$

Definice (Asymptotická křivka)

Parametrizovaná křivka $\gamma : I \to S$ na orientované regulární ploše S se nazývá asymptotická křivka, jestliže v každém bodě platí, že tečný vektor $\gamma'(t)$ je asymptotický směr.

Příklad

Na jednodílném rotačním hyperboloidu tvoří asymptotické křivky dvě navzájem sdružené rodiny přímek.



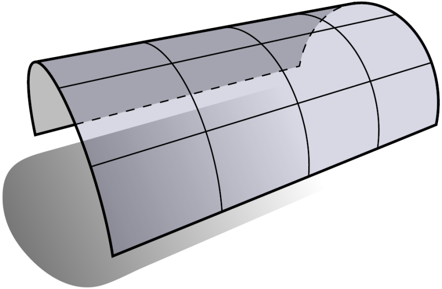
Rozvinutelné plochy

Definice (Rozvinutelná plocha)

Orientovaná regulární plocha S se nazývá rozvinutelná, pokud je její Gaussova křivost identicky nulová, tj. $K(\mathbf{p}) = 0$ pro všechna $\mathbf{p} \in S$.

Příklad

Příklady rozvinutelných ploch: válec, kužel, plocha tečen prostorové křivky.



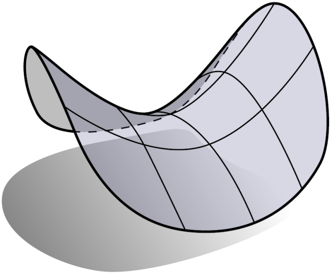
Minimální plochy

Definice (Minimální plocha)

Orientovaná regulární plocha S se nazývá minimální, pokud je její střední křivost identicky nulová, tj. $H(\mathbf{p}) = 0$ pro všechna $\mathbf{p} \in S$.

Příklad

Příklady minimálních ploch: rovina, helicoid, catenoid.



Theorema egregium

Věta (Gaussovo theorema egregium)

Gaussova křivost orientované regulární plochy S je vnitřní veličina: lze ji vyjádřit pouze pomocí první fundamentální formy (jejích koeficientů a jejich derivací), tedy jen z vnitřních měření na ploše.

- Gaussova křivost je invariantní vůči izometriím – nezávisí na tom, jak je plocha ohnuta v okolním prostoru, pokud se při ohnutí nezmění délky a úhly na ploše.
- Lze ji určit pouze z měření na ploše (např. délky, úhly), aniž bychom znali, jak je plocha uložena v prostoru.

Příklad

Například nelze rozvinout část sféry do roviny beze zkreslení, protože sféra má kladnou Gaussovu křivost, zatímco rovina nulovou.