FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

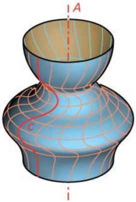
KATEDRA
MATEMATIKY

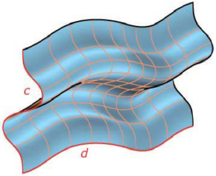
KMA/GKP GEOMETRIE KŘIVEK A PLOCH

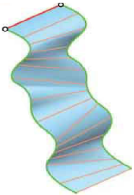
Tradiční třídy ploch

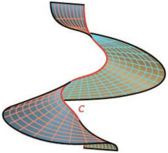
Tradiční třídy ploch

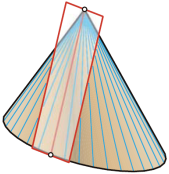
- Tradiční třídy ploch vznikají pomocí jednoduchých kinematických konstrukcí: generující křivka se hladce pohybuje v prostoru.
- Podle typu pohybu rozlišujeme:
  - Rotační plochy – vznikají rotací křivky kolem přímky.
  - Translační plochy – profilová křivka se posouvá podél jiné křivky.
  - Přímkové plochy – plocha je generována pohybem přímky.
  - Šroubové plochy – kombinace rotace a translace.
- Rozvinutelné plochy tvoří speciální podtřídu přímkových ploch: lze je izometricky rozvinout do roviny.
- Další třídou jsou obalové plochy – vznikají jako obal rodiny elementárních ploch (koulí, rovin, válců, . . .), např. potrubní plochy.







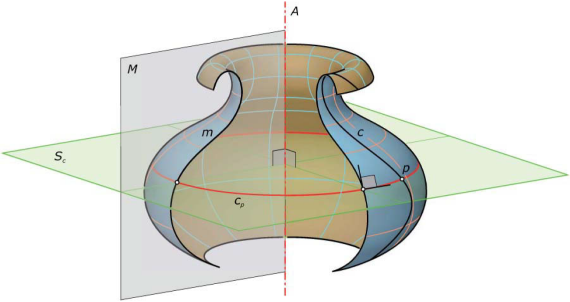




Osnova

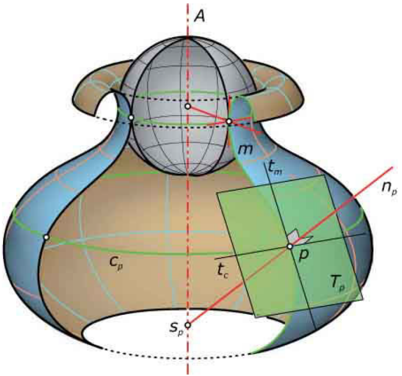
Rotační plochy

- Rotační plochy vznikají rotací křivky c (rovinné nebo prostorové) kolem osy A.
- Každý bod p křivky c při rotaci opisuje kružnici c_p. Její rovina S_c je kolmá k ose A.
- Rotační plocha tak nese systém kružnic ležících v rovnoběžných rovinách – rovnoběžkové kružnice.
- Každá rovina M, která obsahuje osu A, protíná rotační plochu v meridiánu – rovinné křivce m. Všechny meridiány jsou shodné.
- Roviny S_c rovnoběžkových kružnic a roviny M meridiánů jsou navzájem kolmé. Proto se meridiány a rovnoběžkové kružnice protínají v pravých úhlech. Na ploše tak vzniká ortogonální síť křivek.



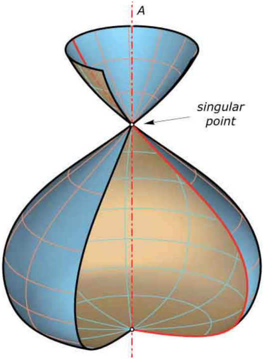
Rotační plochy – tečná rovina a normála

- Tečná rovina T_p v bodě p je určena:
  - tečnou t_c rovnoběžkové kružnice c_p,
  - tečnou t_m meridiánu m.
- Normála n_p musí být kolmá k tečně kružnice t_c. Proto leží v meridiánové rovině M a protíná osu A.
- Průsečík normály s osou je střed koule tečné k rotační ploše podél rovnoběžkové kružnice.



Rotační plochy – meridiány a singularity

- Meridiány lépe vystihují tvar rotační plochy než libovolné prostorové generující křivky, proto preferujeme rovinné meridiány.
- Meridiány jsou symetrické k ose A:
  - celý meridián $\rightarrow$ rotace o 180°,
  - polovina meridiánu $\rightarrow$ rotace o 360°.
- Pokud meridián protíná osu A pod jiným než pravým úhlem, vzniká singulární bod.



Rotační plochy – matematický popis

- Parametrické vyjádření rotační plochy získáme spojitou rotací generující křivky $c(v)$ kolem osy.
- Rotace kolem osy z je dána:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos u - y \sin u, \\ y_1 &= x \sin u + y \cos u, \\ z_1 &= z. \end{aligned}$$

- Dosazením $c(v) = [x(v), y(v), z(v)]$ získáme:

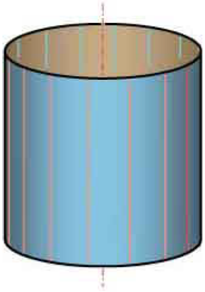
$$\begin{aligned} x(u,v) &= x(v) \cos u - y(v) \sin u, \\ y(u,v) &= x(v) \sin u + y(v) \cos u, \\ z(u,v) &= z(v). \end{aligned}$$

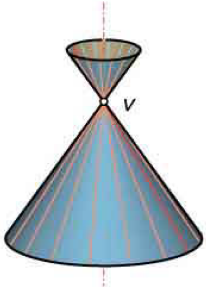
- Použijeme-li meridián $m(v) = [x(v), 0, z(v)]$, dostaneme standardní tvar:

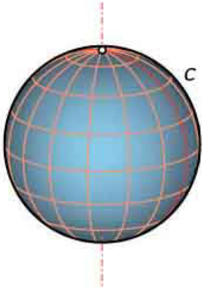
$$\begin{aligned} x(u,v) &= x(v) \cos u, \\ y(u,v) &= x(v) \sin u, \\ z(u,v) &= z(v). \end{aligned}$$

Rotační plochy – základní příklady

- Mnoho tvarů v designu jsou speciální případy rotačních ploch. Vznikají rotací kružnice nebo přímky kolem osy.
- Válec: vzniká rotací **přímky rovnoběžné** s osou rotace.
- Kužel: generuje jej **přímka protínající** osu rotace A. Průsečík je vrchol v kužele.
- Koule: vzniká rotací **kružnice** kolem jejího **průměru**.

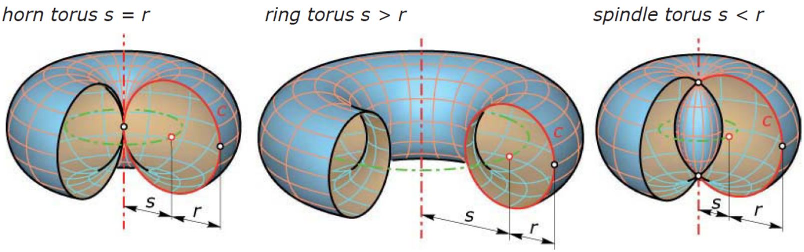






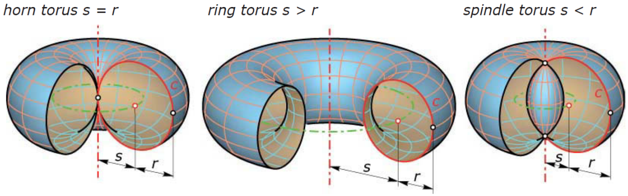
Rotační plochy – anuloid

- Anuloid (torus) vzniká rotací **kružnice** c kolem libovolné přímky ležící v její nosné rovině.
- Typ anuloidu je určen počtem průsečíků kružnice c s osou rotace:
  - žádný průsečík $\rightarrow$ ring torus,
  - jeden průsečík $\rightarrow$ horn torus,
  - dva průsečíky $\rightarrow$ spindle torus.



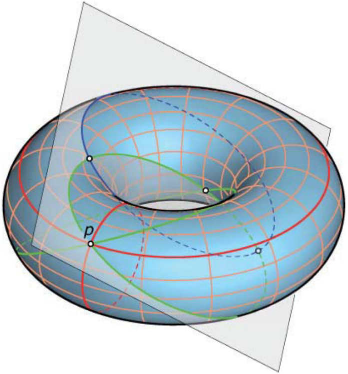
Parametrické vyjádření anuloidu

- Uvažujme kružnici c v rovině xz o poloměru r, jejíž střed leží na ose x. Při rotaci kolem osy z opisuje její střed kružnici o poloměru s.
- Parametrizace generující kružnice:
$$c(v) = [s + r\cos v,\ 0,\ r\sin v], \qquad v \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$
- Parametrizace toru rotací kolem osy z:
$$\begin{aligned} x(u,v) &= (s + r\cos v)\cos u, \\ y(u,v) &= (s + r\cos v)\sin u, \qquad u, v \in \langle 0, 2\pi\rangle. \\ z(u,v) &= r\sin v, \end{aligned}$$
- Typ toru podle poměru s a r:
  - $s > r \rightarrow$ *ring torus*,
  - $s = r \rightarrow$ *horn torus*,
  - $s < r \rightarrow$ *self-intersecting spindle torus*.



Villarceauovy kružnice na prstencovém toru

- Mezi třemi typy torů má ring torus mimořádnou vlastnost: kromě meridiánů a rovnoběžkových kružnic nese ještě dvě další rodiny kružnic.
- Každá dvojitá tečná rovina (tj. rovina tečná k toru ve dvou různých bodech) protíná torus ve dvou Villarceauových kružnicích.
- Na prstencovém toru lze každým bodem p vést čtyři kružnice: meridián, rovnoběžkovou kružnici a dvě Villarceauovy kružnice.

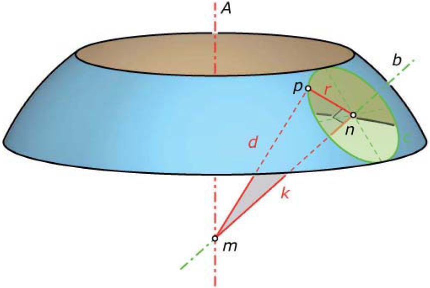


Sférický pás jako rotační plocha

- Mějme kružnici c, jejíž osa rotace b protíná hlavní osu rotace A v bodě m.
- Pro každý bod $p \in c$ platí podle pravoúhlého trojúhelníka s vrcholy p, m, n, že vzdálenost od průsečíku os je konstantní:

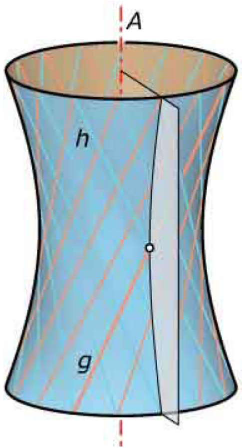
$$d = \mathrm{dist}(p, m) = \sqrt{r^2 + k^2},$$

  kde r je poloměr kružnice c a k je vzdálenost její osy od osy A.
- Při rotaci kolem osy A opíše kružnice c část kulové plochy o poloměru d, vymezenou dvěma rovnoběžkovými kružnicemi.
- Pokud jsou osy b a A mimoběžné, vzniká obecná rotační plocha – nikoliv část sféry.



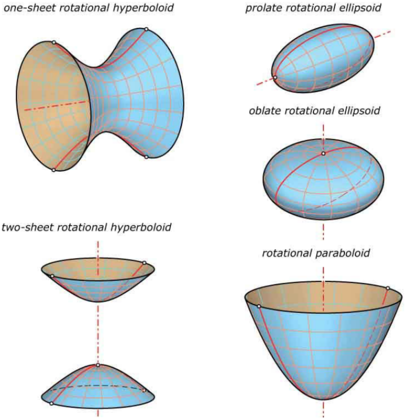
Rotační plochy – jednodílný rotační hyperboloid

- Generující přímka g, která je mimoběžná s osou rotace A, opisuje při rotaci jednodílný rotační hyperboloid.
- Provedeme-li zrcadlení přímky g podle libovolné meridiánové roviny, obdržíme další přímku h ležící na téže ploše.
- Jednodílný rotační hyperboloid obsahuje dvě soustavy přímek, a je tedy dvojpřímkovou plochou.
- Meridiány této plochy jsou hyperboly.
- Jednodílný rotační hyperboloid lze také získat rotací hyperboly kolem její vedlejší osy.



Rotační kvadriky

- Rotační kvadriky vznikají rotací kuželoseček kolem jedné z jejich os.
- Jednodílný rotační hyperboloid vzniká rotací hyperboly kolem její vedlejší osy a obsahuje dvě soustavy přímek.
- Dvoudílný rotační hyperboloid dostaneme rotací hyperboly kolem její hlavní osy.
- Protože elipsa má dvě různé osy souměrnosti, existují dva rotační elipsoidy:
  - zploštělý – rotace kolem vedlejší osy,
  - protažený – rotace kolem hlavní osy.
- Rotační paraboloid vzniká rotací paraboly kolem její osy.



Rotační kvadriky – standardní rovnice

- Zploštělý rotační elipsoid (oblate):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a^2 > c^2$$

- Protažený rotační elipsoid (prolate):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a^2 < c^2$$

- Dvoudílný rotační hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

- Jednodílný rotační hyperboloid:

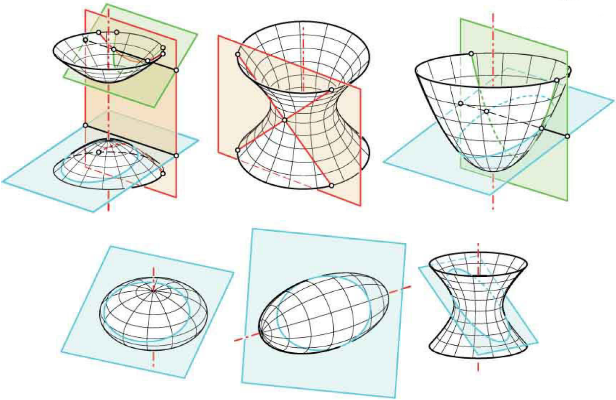
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = +1$$

- Rotační paraboloid:

$$z = a\,(x^2 + y^2)$$

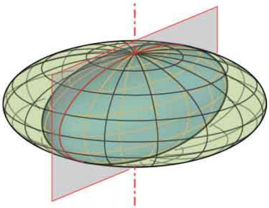
Průniky rotačních kvadrik s rovinami

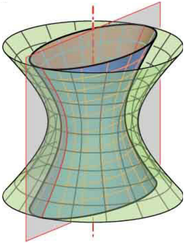
- Průnik rotační kvadriky s rovinou (pokud existuje) je obecně kuželosečka.
- Průnik rotačního elipsoidu s rovinou je vždy elipsa.
- Průnik rotačního paraboloidu s rovinou je elipsa nebo parabola.
- Průnik rotačního hyperboloidu s rovinou může být elipsa, parabola nebo hyperbola.
- Průnik jednodílného rotačního hyperboloidu s tečnou rovinou je dvojice generujících přímek.

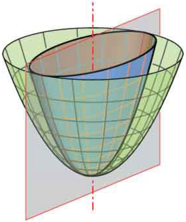


Obecné kvadriky a jejich symetrie

- Aplikací nezávislého škálování (scaling) ve směrech souřadných os na rotační kvadriky získáme obecné regulární kvadriky.
- Z rotačního paraboloidu vzniká nezávislým škálováním eliptický paraboloid.
- Další důležitý typ kvadriky je hyperbolický paraboloid (ukážeme v části o translačních plochách).
- Každá kvadrika má alespoň dvě roviny souměrnosti; hyperboloidy a elipsoidy mají tři.
- Průsečík jejich os symetrie je střed plochy.





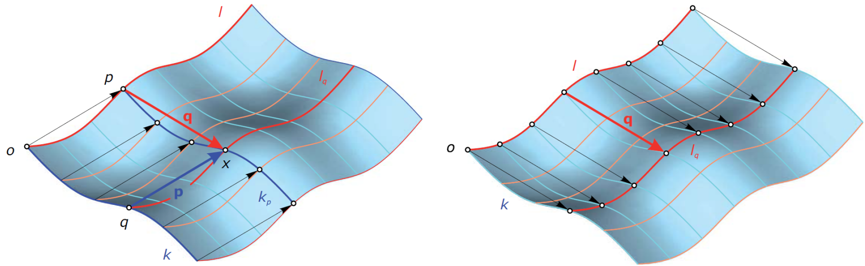


Osnova

Translační plochy

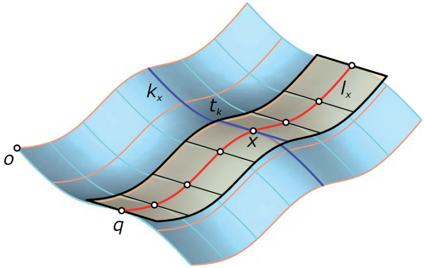
- Mějme dvě křivky k a l, které se protínají v jediném bodě – počátku o. Posouváním profilové křivky k podél vodiče l vzniká translační plocha.
- Plocha obsahuje množinu křivek k_p, které jsou shodné s profilovou křivkou k. Každá z nich protíná vodič l v bodě p.
- Bod x na křivce k_p získáme posunutím bodu $q \in k$ o vektor p. Ekvivalentně jej získáme jako $x = p + q$.
- Přičtením vektoru q ke všem bodům vodiče l dostaneme křivku l_q, shodnou s vodičem l. Profil a vodič lze tedy v konstrukci vzájemně zaměnit.
- Obecný bod translační plochy získáme s využitím parametrizací $k(u)$ a $l(v)$:

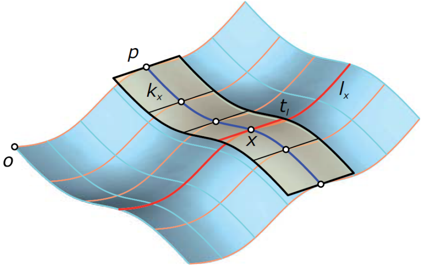
$$x(u,v) = k(u) + l(v). \tag{T}$$



Translační plochy – tečná rovina

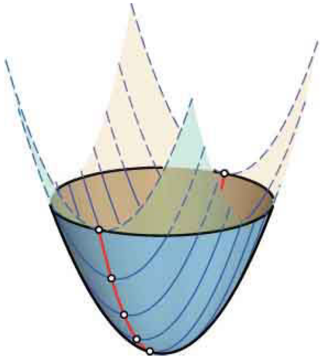
- V bodě x je tečná rovina translační plochy určena tečnami t_k a t_l ke generujícím křivkám k a l.
- Podél parametrické křivky $k_x = k(u)$ jsou tečny druhé rodiny parametrických křivek rovnoběžné.
- Tvoří tedy válcovou plochu s profilovou křivkou k_x, která je podél této křivky tečná k translační ploše.
- Protože k a l mohou v konstrukci translační plochy zaměnit své role, platí totéž i pro parametrickou křivku l_x.





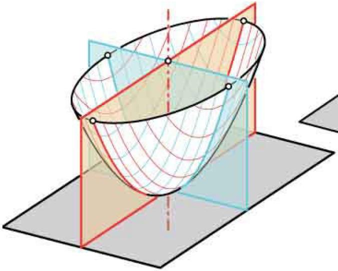
Rotační paraboloid jako translační plocha

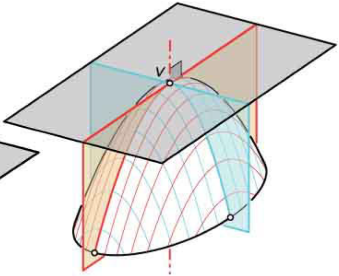
- Rotační paraboloid je dán rovnicí
$$z = a(x^2 + y^2).$$
- Po zavedení parametrů $u = x$, $v = y$ platí
$$\left[u, v, a(u^2 + v^2)\right] = \left[u, 0, au^2\right] + \left[0, v, av^2\right].$$
- Jde o speciální případ rovnice (T):
$$x(u, v) = k(u) + l(v),$$
kde
$$k(u) = \left[u, 0, au^2\right], \qquad l(v) = \left[0, v, av^2\right].$$
- Rotační paraboloid tedy získáme jako translační plochu dvou shodných parabol v kolmých rovinách.



Eliptický paraboloid

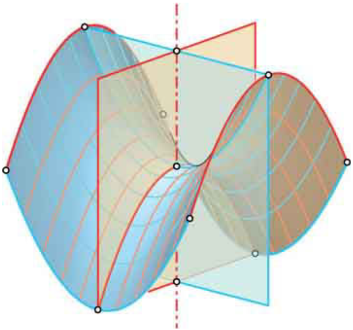
- Eliptický paraboloid vznikne nezávislým škálováním rotačního paraboloidu.
- Dvě shodné paraboly v kolmých rovinách se změní na nezhodné paraboly s rovnoběžnými osami. Jejich translací vzniká eliptický paraboloid.
- Nesingulární rovinné řezy jsou paraboly (roviny rovnoběžné s osou) nebo elipsy (ostatní průniky).
- Plocha obsahuje pouze eliptické body. Má dvě roviny symetrie; jejich průsečnice je osa paraboloidu.
- Průsečík osy s plochou je vrchol v; tečná rovina ve vrcholu je kolmá k ose.





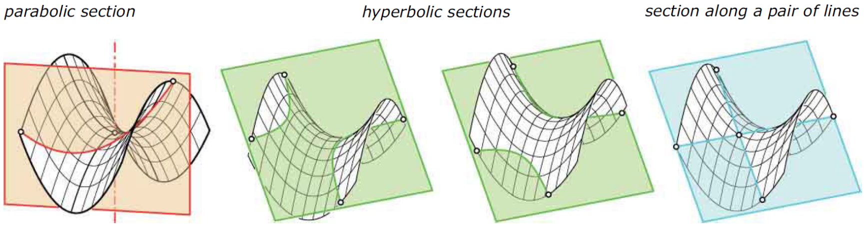
Hyperbolický paraboloid

- Zrcadlením jedné z generujících parabol podle její tečny ve vrcholu získáme translační plochu se dvěma soustavami shodných parabol – hyperbolický paraboloid.
- Oba typy paraboloidů jsou kvadriky, ale hyperbolický paraboloid nelze získat škálováním rotačního paraboloidu.
- Tato plocha obsahuje výhradně hyperbolické body; celý tvar je sedlový.
- Má dvě roviny symetrie; jejich průsečnice je osa hyperbolického paraboloidu.
- Průsečík osy s plochou je vrchol v; tečná rovina ve vrcholu je kolmá k ose.



Průniky hyperbolického paraboloidu s rovinami

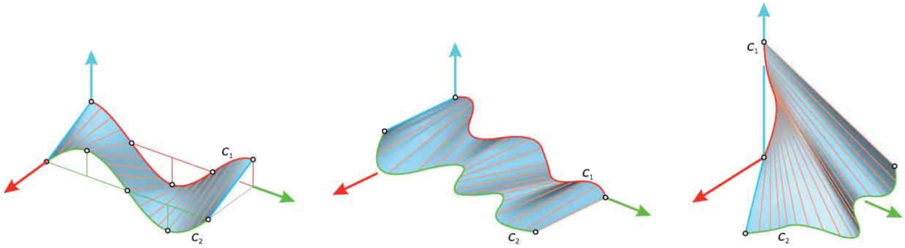
- Existují tři typy rovinných průniků:
    - Rovnoběžné s osou → paraboly.
    - Tečné roviny → dvě přímky.
    - Ostatní roviny → hyperboly.
- Každá tečná rovina protíná plochu ve dvou přímkách → hyperbolický paraboloid má dvě soustavy přímek.
- Hyperbolický paraboloid je tedy dalším příkladem přímkové plochy.



Osnova

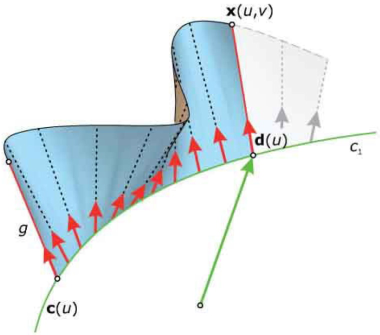
Přímkové plochy

- Válec, kužel, jednodílný rotační hyperboloid a hyperbolický paraboloid obsahují rodiny přímek $\rightarrow$ lze je generovat posuvem přímky.
- Přímkové plochy jsou plochy vzniklé pohybem přímky. Obsahují souvislou množinu přímek zvaných generátory (rulings).
- Existuje více způsobů, jak popsat pohyb generující přímky; každý má své výhody, ale může omezit typy výsledných ploch.
- Geometricky jsou přímkové plochy neomezené, protože generující přímky jsou nekonečné. V praxi používáme pouze jejich konečné úseky.



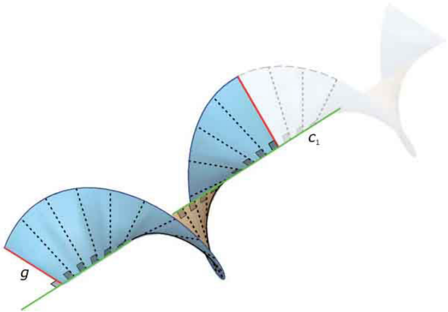
Přímkové plochy – posuv přímky podél vodicí křivky

- Začneme vodicí křivkou c_1, po které posouváme jeden bod generující přímky (úsečky). K určení polohy přímky potřebujeme také směrový vektor, který se podél c_1 plynule mění.
- Mějme parametrizaci
$$c(u) \quad \text{vodicí křivky,} \qquad d(u) \quad \text{směrového vektoru.}$$
- Bod plochy dostaneme součtem
$$x(u,v) = c(u) + v\,d(u).$$
- Pro $d(u) =$ konst dostáváme válcovou plochu.



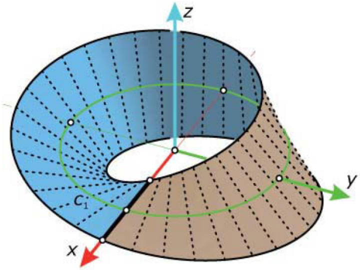
Příklad: konoida

- Vodicí křivku zvolíme jako přímku (osu z). Generátory g ji protínají kolmo a mohou se kolem ní otáčet.
- Parametrizace vodicí křivky:
$$c(u) = [0, 0, u].$$
- Směrové vektory generátorů (nulová z-souřadnice):
$$d(u) = [\cos f(u),\ \sin g(u),\ 0].$$
- Speciální případy:
  - $f, g =$ konst $\rightarrow$ rovina,
  - $f = g = au + b \rightarrow$ šroubová plocha.



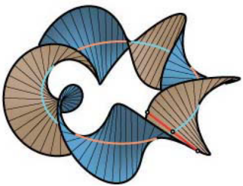
Příklad: Möbiova páska

- Vodicí křivku c_1 zvolíme jako kružnici. Generátor g se po ní posouvá a zároveň se plynule otáčí tak, že zůstává kolmý na c_1.
- Po jednom oběhu generátor vykoná půlotáčku $\rightarrow$ konce generátoru splývají $\rightarrow$ Möbiova páska.
- Parametrizace kružnice:
$$c(u) = [r\cos u,\ r\sin u,\ 0].$$
- Směrový vektor generátoru (rotace o $u/2$):
$$d(u) = [\cos(u/2)\cos u,\ \cos(u/2)\sin u,\ \sin(u/2)].$$

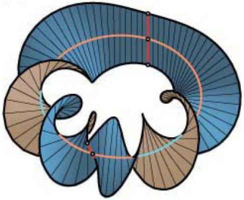


Obecnější přímkové plochy na kružnici

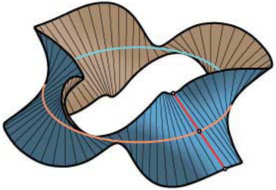
- Stejně jako u příkladu konoidy můžeme nahradit pevnou rotaci $u/2$ libovolnou funkcí $f(u)$.
- Volba funkce $f(u)$ určuje, jak se generátor otáčí v normálových rovinách kružnice a výrazně tak mění výsledný tvar přímkové plochy.
- Různé volby $f(u)$ vedou k široké škále tvarů.



$f(u) = 3u$



$f(u) = u^2$



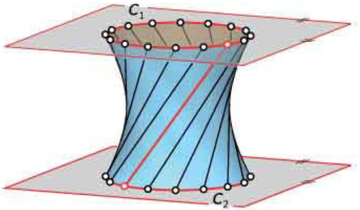
$f(u) = \sin u$

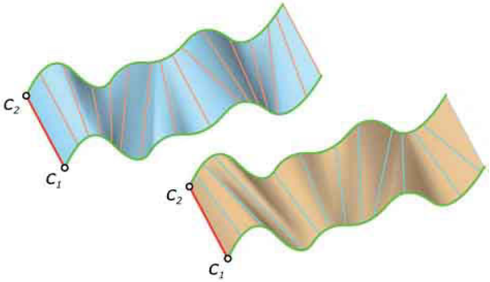
Přímkové plochy – spojování bodů dvou křivek

- Jednodílný rotační hyperboloid lze chápat i jinak: generátory vzniknou spojením odpovídajících bodů dvou kružnic c_1 a c_2.
- Tento princip zobecníme: zvolíme dvě prostorové křivky (vodicí křivky)

$$c_1(u), \qquad c_2(u),$$

  a spojíme body se stejnou hodnotou parametru u.
- Různé parametrizace křivek c_1, c_2 vedou k různým přímkovým plochám, i když přímky spojují stejné křivky.





HP plochy (hyperbolické paraboloidy)

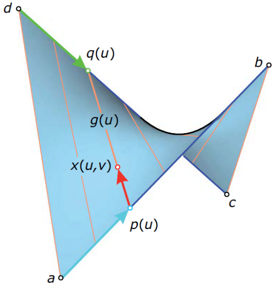
- Kromě generování jako translační plochy lze HP plochu vytvořit také jako přímkovou plochu pomocí dvou mimoběžných úseček ab a dc.
- Body se stejným parametrem u na úsečkách dáváme do souvislosti:

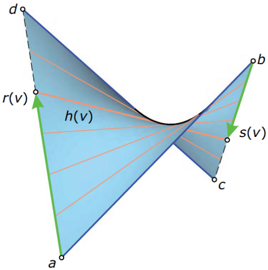
$$p(u) = (1-u)a + u\,b, \qquad q(u) = (1-u)d + u\,c.$$

- Generátor spojující p a q:

$$x(u,v) = (1-v)\,p(u) + v\,q(u).$$

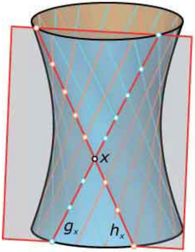
- Body se stejným parametrem v na úsečkách ad a bc dávají druhou rodinu generátorů.

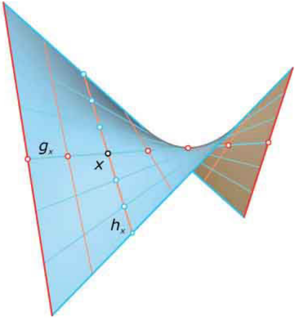




Dvojitě přímkové plochy

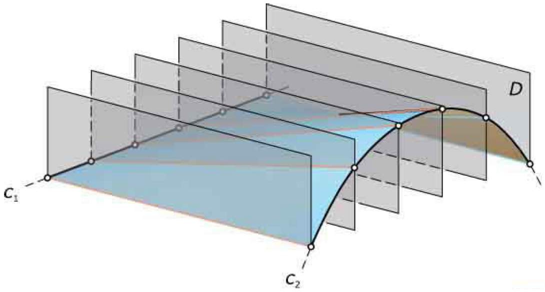
- HP plochy a jednodílné rotační hyperboloidy jsou dvojitě přímkové plochy (double ruled surfaces). Každým bodem x procházejí dvě různé přímky (generátory) g_x a h_x.
- Tyto dvě přímky g_x a h_x spolu určují tečnou rovinu v bodě x.
- Každé dvě přímky téže rodiny jsou mimoběžné, zatímco libovolná přímka jedné rodiny protíná všechny přímky druhé.
- Lze dokázat, že jediné dvojitě přímkové plochy jsou rovina, hyperbolický paraboloid a jednodílný hyperboloid.





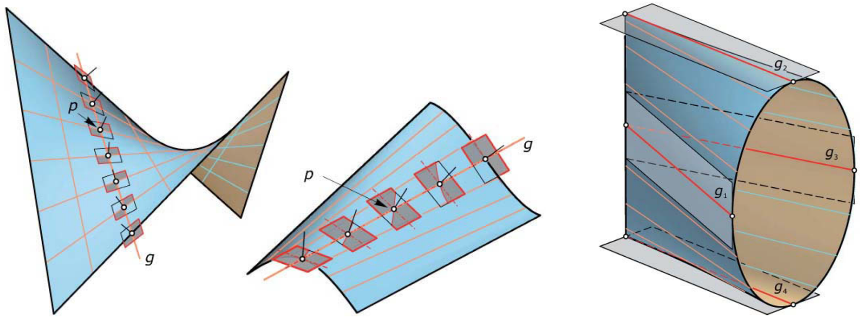
Konoidy

- Konoidy jsou zobecněním HP ploch: jsou to přímkové plochy, jejichž generátory jsou rovnoběžné s určitou řídicí rovinou a zároveň protínají jednu přímku c_1.
- Části konoid se často používají v architektuře (střechy, skořepiny, přístřešky).
- Druhá vodicí křivka c_2 může být libovolná, ale její parametrizace musí zajistit, aby byly všechny generátory rovnoběžné s danou řídicí rovinou.



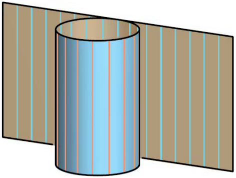
Tečné roviny přímkových ploch

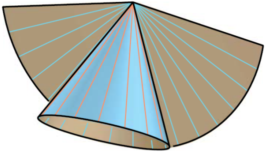
- Tečná rovina v bodě p přímkové plochy vždy obsahuje generátor g procházející bodem p.
- Obvykle se tečná rovina dotýká plochy jen v jediném bodě p; pohybem bodu p po generátoru se tečná rovina otáčí kolem g.
- Některé přímkové plochy (např. válce a kužely) však obsahují generátory, podél nichž je tečná rovina tečná v celé délce přímky. Takové generátory se nazývají torzální.
- Konoidy obvykle obsahují alespoň jeden torzální generátor.

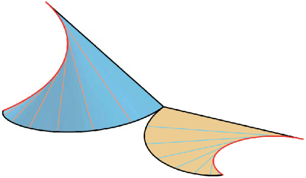


Rozvinutelné plochy

- Přímkové plochy složené pouze z torzálních generátorů se nazývají rozvinutelné plochy.
- Přímkové plochy s převahou netorzálních generátorů se označují jako křivé přímkové plochy.
- Mezi rozvinutelné plochy patří:
  - válcové plochy,
  - kuželové plochy,
  - plochy tečen prostorových křivek.



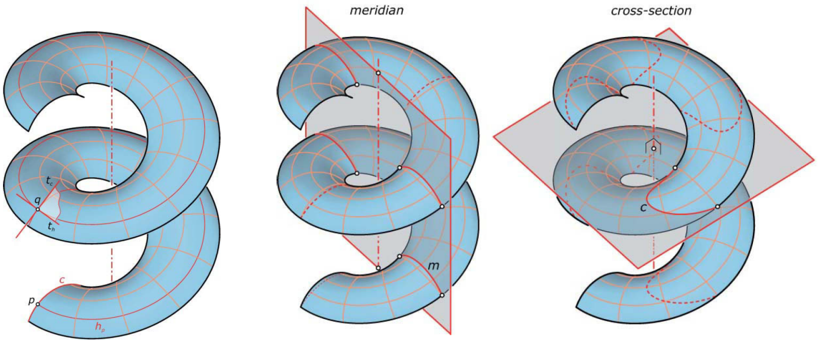




Osnova

Šroubové plochy

- Při šroubovém pohybu prostorové křivky c vzniká šroubová plocha.
- Každý bod $p \in c$ opisuje šroubovici h_p; síť křivky c a šroubovic určuje tvar plochy.
- Tečná rovina je určena tečnami t_c a t_h.
- Průnik s rovinou procházející osou se nazývá meridián; často se používají i příčné řezy kolmé k ose.
- Plocha je invariantní vůči šroubovému pohybu, proto ji lze generovat také meridiánem nebo příčným řezem.



Šroubové plochy – matematický popis

- Generující křivka:

$$c(v) = [x(v), y(v), z(v)].$$

- Šroubová transformace s krokem p:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos u - y \sin u, \\ y_1 &= x \sin u + y \cos u, \\ z_1 &= z + p\, u. \end{aligned}$$

- Parametrizace šroubové plochy:

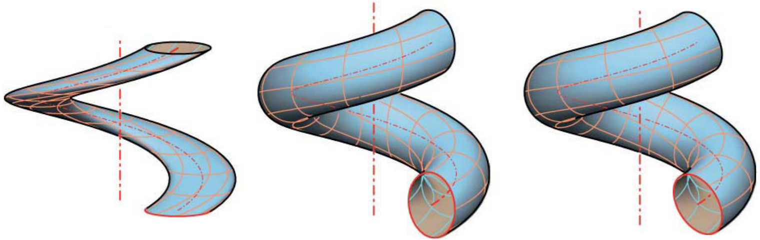
$$\begin{aligned} x(u,v) &= x(v) \cos u - y(v) \sin u, \\ y(u,v) &= x(v) \sin u + y(v) \cos u, \\ z(u,v) &= z(v) + p\, u. \end{aligned}$$

- Pro meridián $m(v) = [x(v), 0, z(v)]$ v rovině xz:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= x(v) \cos u, \\ y(u,v) &= x(v) \sin u, \\ z(u,v) &= z(v) + p\, u. \end{aligned}$$

Speciální šroubové plochy – potrubní plocha

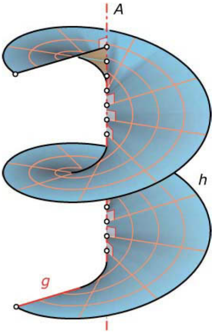
- Mezi šroubovými plochami jsou prakticky významné ty, které mají kružnice nebo přímky jako generátory.
- Kružnice používané jako meridiány nebo příčné řezy vedou ke šroubovým trubicím.
- Je-li nosná rovina kružnice c kolmá k tečně šroubovice t_h, opisuje kružnice šroubové potrubí (helical pipe).
- Tento typ šroubové plochy je zástupcem třídy potrubních ploch (pipe surfaces).



Speciální šroubové plochy – helicoid

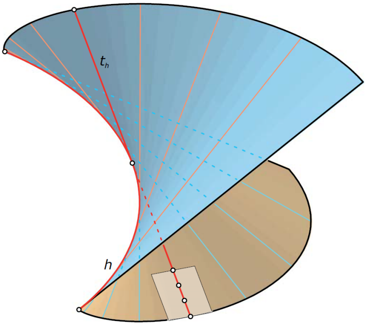
- Aplikací šroubového pohybu na přímku vznikají šroubové přímkové plochy.
- (Ortogonální) helicoid: generátor g protíná osu kolmo, příčné řezy jsou přímky rovnoběžné s rovinou kolmou k ose.
- Chápeme-li šroubovici h a osu A jako dvě vodicí křivky, je helicoid speciálním případem konoidy.

$$\begin{aligned} x(u,v) &= v\cos u,\\ y(u,v) &= v\sin u,\\ z(u,v) &= p\,u. \end{aligned}$$



Speciální šroubové plochy – plocha tečen šroubovice

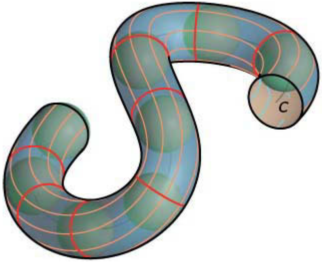
- Další důležitý příklad šroubové přímkové plochy vzniká aplikací šroubového pohybu na tečnu t_h ke šroubovici h.
- Tečna t_h opisuje rozvinutelnou přímkovou plochu.
- Šroubovice h je na této ploše singulární křivkou a tvoří na ní ostrou hranu.
- Pro rozvinutelné plochy je typické, že tečná rovina je tečná podél celé generující přímky t_h.

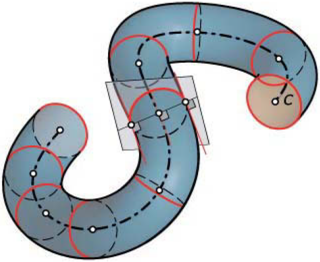


Osnova

Potrubní plochy (Pipe Surfaces)

- Potrubní plocha je obalová plocha koule o poloměru r, jejichž středy leží na prostorové křivce c (páteřní křivka, spine curve).
- Speciální případy:
  - přímka jako $c \to$ rotační válec,
  - kružnice jako $c \to$ torus.
- Ekvivalentně ji lze generovat jako množinu kružnic o poloměru r v normálových rovinách křivky c se středy ležícími na c.

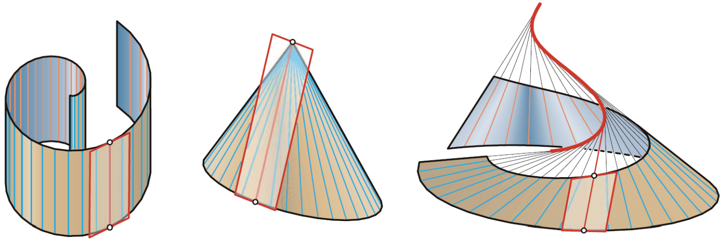




Osnova

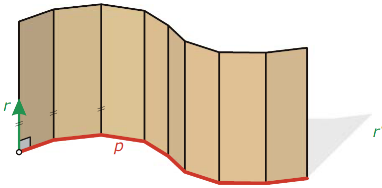
Rozvinutelné plochy

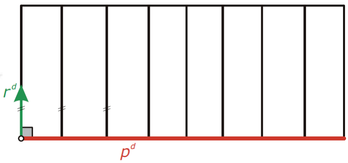
- Rozvinutelnou plochu S lze izometricky převést do roviny. Rovinný obraz S^d je tzv. rozvinutí (development).
- Isometrie zachovávají Gaussovu křivost $\rightarrow$ rozvinutelné plochy mají nulovou Gaussovu křivost, stejně jako rovina.
- Existují pouze tři základní typy rozvinutelných ploch:
  - válcové plochy,
  - kuželové plochy,
  - plochy tečen prostorových křivek.
- Všechny rozvinutelné plochy jsou přímkové plochy.
- Každá jejich přímka musí být torzální generátor $\rightarrow$ plocha má stejnou tečnou rovinu v každém bodě dané přímky.



Hraněné (prizmatické) plochy

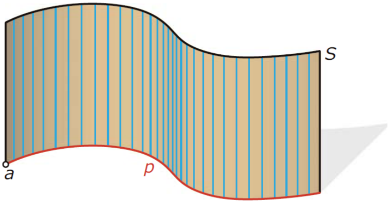
- Hraněná (prizmatická) plocha vzniká z mnohoúhelníku p extruzí ve směru r.
- Je tvořena rovnoběžnými stěnami a je tedy rozvinutelná – každá stěna je rovinná.
- Její rozvinutí se skládá z řady rovnoběžníků (včetně obdélníků), které se v rovině rozloží bez deformace.
- Obraz základny p^d je polygon a generátory se rozvinou na rovnoběžné přímky.

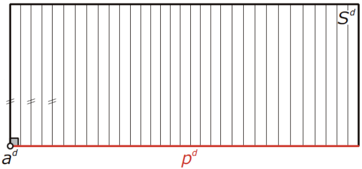




Válcové plochy

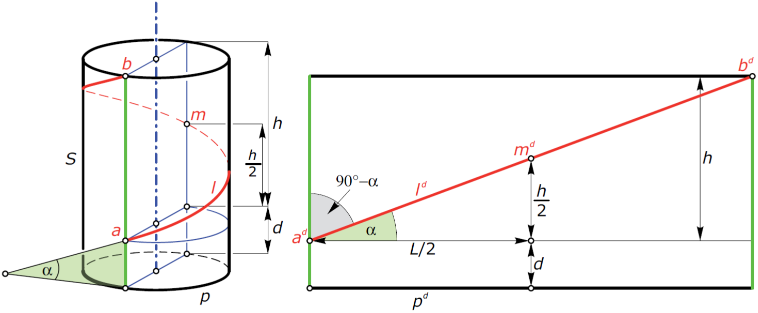
- Hladká válcová plocha S vzniká extruzí profilové křivky p ve směru r a je tvořena rovnoběžnými generátory.
- Je-li křivka p v rovině kolmé ke směru extruze, jde o normálový řez. Generátory jsou k tomuto řezu kolmé.
- V rozvinutí se normálový řez p^d zobrazí jako přímka a generátory jako rovnoběžné přímky. Pravý úhel mezi nimi se zachová.
- Válcové plochy jsou tedy rozvinutelné – lze je izometricky převést do roviny.





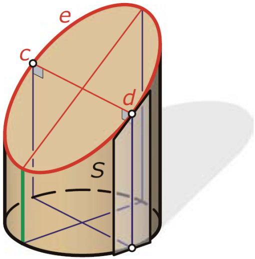
Příklad: šroubovice na rotační válcové ploše

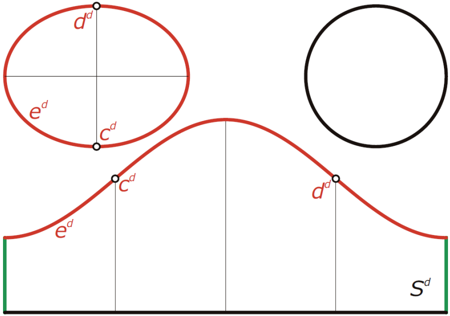
- Uvažujme rotační válcovou plochu se základní kružnicí p o poloměru R. Její rozvinutí p^d je úsečka délky $L = 2\pi R$. Válec musíme pro rozvinutí rozstřihnout podél generátoru.
- Na rozvinutí zvolíme přímku l^d, která svírá s p^d úhel $\alpha \neq 0, 90^\circ$. Zpětným „svinutím" vzniká prostorová křivka l na válci.
- Protože úhly se při rozvinutí zachovají, křivka l protíná generátory válce pod konstantním úhlem $90^\circ - \alpha$. Její tečny svírají s rovinou základny konstantní úhel α.
- Tedy: l je šroubovice s konstantním sklonem (curve of constant slope).
- Geodetiky na válcové ploše přesně odpovídají přímkám v rozvinutí. Proto obecné geodetiky válce jsou šroubovice (speciální případy: kružnice a generátory).



Rozvinutí elipsy na rotační válcové ploše

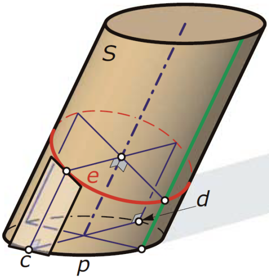
- Obecná elipsa e ležící na rotační válcové ploše S má po rozvinutí tvar sinusoidní křivky e^d.
- Důvod: elipsa protíná generátory válce pod proměnným úhlem. Protože rozvinutí zachovává úhly mezi křivkami a generátory, překládá se tato změna sklonu do roviny jako sinusový průběh.
- Inflexní body c^d, d^d obrazu e^d odpovídají bodům c, d na elipse, v nichž je rovina elipsy kolmá k tečné rovině válcové plochy.
- Inflexní body rozvinutí odpovídají extrémům obtáčení elipsy kolem válce, nikoli extrémům elipsy samotné.

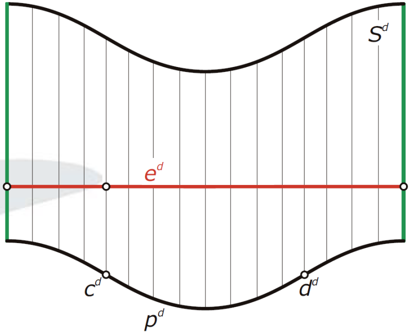




Rozvinutí šikmé válcové plochy

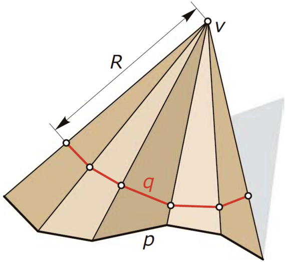
- Uvažujme šikmou válcovou plochu S: generátory nejsou kolmé k rovině základní kružnice p.
- Proto p není normálový řez a její obraz p^d v rozvinutí není úsečka. Úhel mezi p a generátory se totiž mění.
- Tato variace úhlu se zachová v rozvinutí a způsobí zakřivení výsledné křivky p^d.
- Normálové řezy šikmé válcové plochy jsou elipsy (ne kružnice) $\rightarrow$ v rozvinutí se zobrazí jako úsečky.
- Body c, d základní kružnice, kde je rovina p kolmá k tečné rovině válce, se rozvinou na inflexní body c^d, d^d křivky p^d.

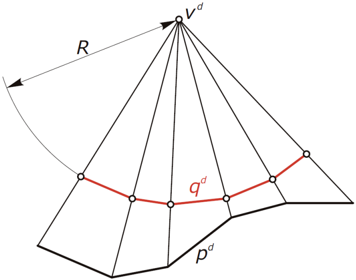




Pyramidové plochy

- Pyramidová plocha vzniká z profilového mnohoúhelníka p a vrcholu v – plocha je tvořena všemi úsečkami spojujícími v s body p. Je to hraněná (diskrétní) obdoba hladké kuželové plochy.
- Rozvinutí pyramidové plochy studujeme pomocí referenčních polygonů q, jejichž vrcholy leží ve stejné vzdálenosti R od vrcholu v. Jsou analogií normálových řezů u hraněné válcové plochy.
- V rozvinutí mají vrcholy q^d tento stejný poloměr: leží na kružnici se středem v^d a poloměrem R. Obvodová délka se při rozvinutí zachová.





Kuželové plochy

- Kuželová plocha vzniká z profilové křivky p a vrcholu v: obsahuje všechny přímky spojující v s body p.
- Zjemněním profilového polygonu p u pyramidové plochy dostaneme v limitě hladkou kuželovou plochu S.
- Polygon q v konstantní vzdálenosti R od vrcholu přechází v limitě na průnik kužele s koulí se středem v a poloměrem R.
- V rozvinutí je obrazem této křivky kružnicový oblouk se středem v^d a poloměrem R. Délka křivky se při rozvinutí zachovává.