



FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

KATEDRA
MATEMATIKY

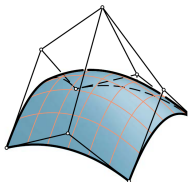
KMA/GKP GEOMETRIE KŘIVEK A PLOCH

Geometrické modelování – plochy

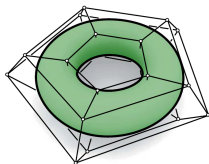
Plochy volných tvarů (Freeform Surfaces)

- ▶ Klasické plochy (**rotační**, **translační**, **šroubové**, apod.) mají omezenou flexibilitu při návrhu tvarů.
- ▶ Plochy volných tvarů umožňují modelování **hladkých a složitých tvarů**, které nelze přirozeně popsat pomocí **klasických ploch**.
- ▶ **Bézierovy** a **B-spline pláty** představují přirozené rozšíření křivek volných tvarů na plochy.
- ▶ Tyto plochy však mají omezenou **topologickou pružnost**, protože jsou založeny na obdélníkových nebo trojúhelníkových řídicích sítích.
- ▶ **Subdivizní plochy** tato omezení překonávají elegantním způsobem a dnes jsou běžné v animaci i průmyslovém designu.

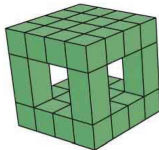
Bézier surface



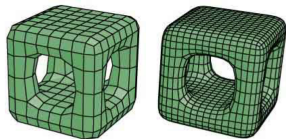
B-spline surface



coarse input mesh



first two steps of subdivision refinement



Osnova

1 Bézierovy plochy

2 B-spline plochy a NURBS plochy

3 Polygoniální síť

4 Subdivizní plochy

Bilineární plát

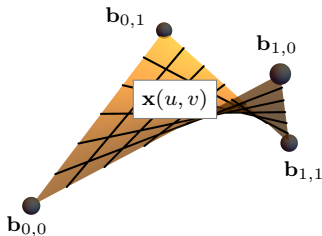
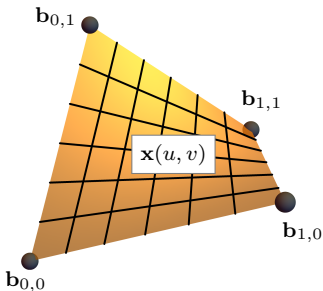
Definice (Bilineární Bézierův plát)

Bilineární Bézierův plát je určen čtyřmi řídicími body $\mathbf{b}_{0,0}$, $\mathbf{b}_{0,1}$, $\mathbf{b}_{1,0}$, $\mathbf{b}_{1,1}$ a má parametrizaci:

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} B_0(u) & B_1(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{0,1} \\ \mathbf{b}_{1,0} & \mathbf{b}_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0(v) \\ B_1(v) \end{pmatrix},$$

kde $B_0(t) = 1 - t$, $B_1(t) = t$ jsou **lineární Bernsteinovy polynomy**.

- ▶ Bilineární plát je geometricky hyperbolický paraboloid.
- ▶ Obsahuje dvě rodiny isoparametrických přímek.



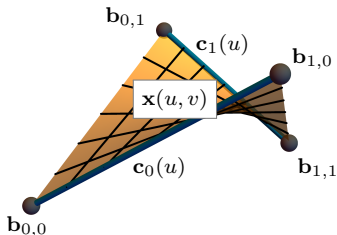
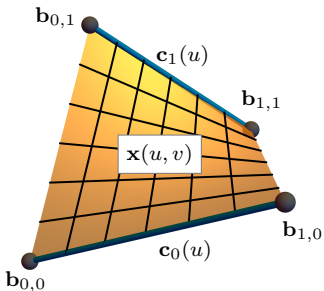
Bilineární plát (alternativní konstrukce)

- Plát lze také chápat jako interpolaci mezi dvěma úsečkami v jednom směru:

$$\mathbf{x}(u, v) = (1 - v)\mathbf{c}_0(u) + v\mathbf{c}_1(u).$$

kde

$$\mathbf{c}_0(u) = (1 - u)\mathbf{b}_{0,0} + u\mathbf{b}_{1,0}, \quad \mathbf{c}_1(u) = (1 - u)\mathbf{b}_{0,1} + u\mathbf{b}_{1,1}.$$



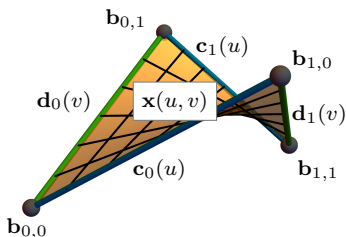
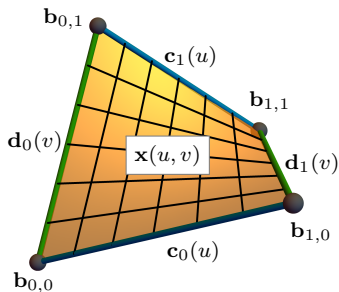
Bilineární plát (alternativní konstrukce)

- ▶ Ekvivalentně lze plát také chápat jako interpolaci mezi dvěma úsečkami v druhém směru:

$$\mathbf{x}(u, v) = (1 - u)\mathbf{d}_0(v) + u\mathbf{d}_1(v),$$

kde

$$\mathbf{d}_0(v) = (1 - v)\mathbf{b}_{0,0} + v\mathbf{b}_{0,1}, \quad \mathbf{d}_1(v) = (1 - v)\mathbf{b}_{1,0} + v\mathbf{b}_{1,1}.$$



Coonsův plát

- ▶ Coonsův plát je **interpolační plocha** definovaná čtyřmi **hraničními křivkami**

$$\mathbf{c}_0(u), \quad \mathbf{c}_1(u), \quad \mathbf{d}_0(v), \quad \mathbf{d}_1(v),$$

které sdílejí čtyři **rohové body** $\mathbf{b}_{00}, \mathbf{b}_{10}, \mathbf{b}_{01}, \mathbf{b}_{11}$.

- ▶ Plocha prochází všemi hranami a lze ji chápat jako „napnutou“ mezi těmito křivkami.
- ▶ Parametrizace Coonsova plátu:

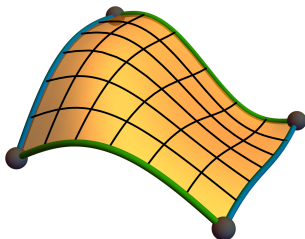
$$\mathbf{x}(u, v) = (1 - v)\mathbf{c}_0(u) + v\mathbf{c}_1(u) + (1 - u)\mathbf{d}_0(v) + u\mathbf{d}_1(v) - \mathbf{x}_b(u, v),$$

kde

$$\mathbf{x}_b(u, v) = (1 - u)(1 - v)\mathbf{b}_{00} + u(1 - v)\mathbf{b}_{10} + (1 - u)v\mathbf{b}_{01} + uv\mathbf{b}_{11}.$$

je **bilineární interpolace rohových bodů** a odečítá se proto, že rohy jsou v součtu okrajových interpolací započteny dvakrát.

- ▶ Bilineární plát je speciální případ Coonsova plátu s lineárními hranami.



Obecný Bézierův plát

Definice (Obdélníkový Bézierův plát)

Bézierův plát (m, n) bistupně je definován jako:

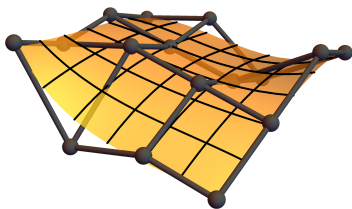
$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} B_0^m(u) & \cdots & B_m^m(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{0,0} & \cdots & \mathbf{b}_{0,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_{m,0} & \cdots & \mathbf{b}_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^n(v) \\ \vdots \\ B_n^n(v) \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{b}_{i,j} \in \mathbb{R}^3$ jsou řídicí body s indexy $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$ a $B_i^m(u)$, $B_j^n(v)$ jsou Bernsteinovy polynomy stupně m , resp. n .

- ▶ Bézierův plát můžeme také zapsat:

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

- ▶ Řídicí síť určuje tvar plátu podobně jako polygon u křivky.
- ▶ Pro pevné u dostaneme Bézierovu křivku ve směru v , a naopak.



Vlastnosti Bézierových plátů

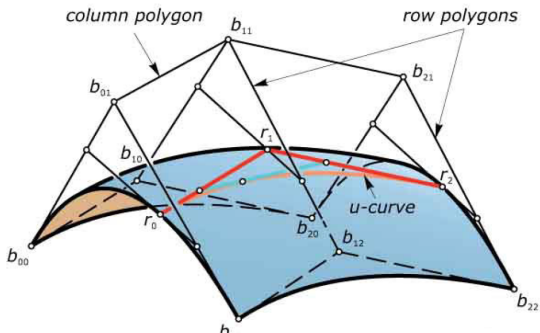
- ▶ **Interpolace rohů:** Plát prochází čtyřmi rohovými body:

$$\mathbf{x}(0, 0) = \mathbf{b}_{0,0}, \quad \mathbf{x}(1, 0) = \mathbf{b}_{m,0}, \quad \mathbf{x}(0, 1) = \mathbf{b}_{0,n}, \quad \mathbf{x}(1, 1) = \mathbf{b}_{m,n}.$$

- ▶ **Okrajové křivky:** Jsou určeny okrajovými řádky a sloupci řídicí sítě (např. křivka $\mathbf{x}(u, 0)$ má řídicí polygon $\mathbf{b}_{i,0}$).
- ▶ **Symetrie:** Přečíslováním indexů v řídicí síti lze zvolit libovolný roh jako počátek, aniž by se změnil tvar plátu.
- ▶ **Afinní invariance:** Aplikace afinní transformace na řídicí síť odpovídá stejné afinní transformaci celého plátu.
- ▶ **Konvexní obal:** Každý bod plátu $\mathbf{x}(u, v)$ pro $u, v \in [0, 1]$ leží v konvexním obalu bodů $\mathbf{b}_{i,j}$.
- ▶ **Bilineární přesnost:** Pokud řídicí body leží na bilineární ploše (rovina nebo hyperbolický paraboloid) určené rohovými body, pak plát tuto plochu reprodukuje přesně.
- ▶ **Tenzorový součin:** Bézierovy pláty jsou plochy typu tenzorový součin:
 - ▶ Umožňuje vyhodnocování pomocí izoparametrických Bézierových křivek.
 - ▶ Maximální počet průsečíků s přímkou je dán součinem stupňů mn .

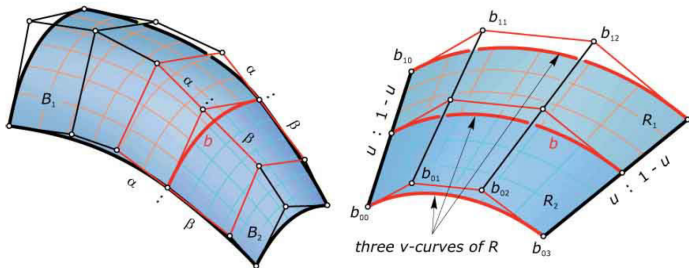
de Casteljauův algoritmus (2-kroková metoda)

- ▶ **Cíl:** Najít bod $\mathbf{x}(u, v)$ na Bézierově plátu určeném řídicími body $\mathbf{b}_{i,j}$.
- ▶ **Postup:**
 - 1 Pro pevné v aplikujeme **de Casteljauův algoritmus** na každý řádkový polygon $\{\mathbf{b}_{i,j}\}_i$ a získáme body $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_m$.
 - 2 Body $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_m$ tvoří řídicí polygon Bézierovy křivky ve směru u , tzv. **u -křivky**, na které vyhodnotíme bod $\mathbf{x}(u, v)$.
- ▶ Analogicky lze pro pevné u konstruovat **v -křivky**.
- ▶ Rodiny u - a v -křivek tvoří **izoparametrickou síť** Bézierova plátu.



Hladké napojení Bézierových plátů

- ▶ Hladké napojení ploch je **výrazně složitější** než hladké napojení křivek.
- ▶ Mějme dva Bézierovy pláty B_1 a B_2 , které sdílejí stejný okrajový polygon řídicích bodů, určující společnou izoparametrickou v -křivku b .
- ▶ Pláty se podél této křivky geometricky spojují, ale obecně mají **různé tečné roviny**, takže na rozhraní vzniká ostrá hrana.
- ▶ Pro dosažení **hladkého napojení** (G^1) musí být sousední sloupce řídicích bodů na obou stranách hranice uspořádány tak, aby jejich **vektory rozdílů** byly navzájem **kolineární** a ve **stejném poměru délek**.

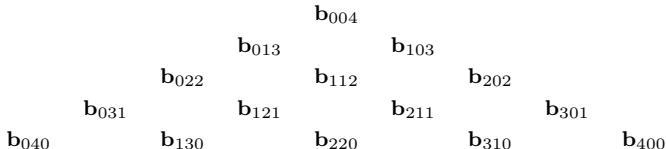


Bézierovy trojúhelníkové pláty

- ▶ Skutečné zobecnění Bézierových křivek na plochy představují **Bézierovy trojúhelníkové pláty**.
- ▶ Na rozdíl od **obdélníkových plátů** umožňují modelování objektů s **libovolnou topologií**.
- ▶ Jsou definovány na **trojúhelníkové doméně**, kde hrají zásadní roli **barycentrické souřadnice**.
- ▶ Kontrolní body tvoří **trojúhelníkové schéma** a každý plát má pouze **jeden stupeň**.

Příklad

- ▶ Indexace kontrolních bodů ilustrovaná na plátu **čtvrtého stupně**:



- ▶ Každý kontrolní bod splňuje $i + j + k = 4$.
- ▶ Vrcholy plátu jsou b_{400} , b_{040} , b_{004} .

Bézierův trojúhelníkový plát stupně n

Definice (Bézierův trojúhelníkový plát)

Bézierův trojúhelníkový plát stupně n je definován vztahem

$$\mathbf{x}(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{b}_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w),$$

kde u, v, w jsou **barycentrické souřadnice** splňující $u + v + w = 1$ a

$$B_{ijk}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i! j! k!} u^i v^j w^k$$

jsou **Bernsteinovy bivariační polynomy**. Plát tvoří množina všech bodů $\mathbf{x}(u, v, w)$ pro $u, v, w \geq 0$ a $u + v + w = 1$.



Vlastnosti Bézierových trojúhelníkových plátů

- ▶ **Interpolace vrcholů:** Plát prochází třemi vrcholovými body:

$$\mathbf{x}(1, 0, 0) = \mathbf{b}_{n00}, \quad \mathbf{x}(0, 1, 0) = \mathbf{b}_{0n0}, \quad \mathbf{x}(0, 0, 1) = \mathbf{b}_{00n}.$$

- ▶ **Okrajové křivky:** Okraje plátu jsou Bézierovy křivky dané kontrolními body na hranách (např. $\mathbf{x}(0, v, w)$ má kontrolní polygon \mathbf{b}_{0jk} , kde $j + k = n$).
- ▶ **Symetrie:** Přeznačení barycentrických souřadnic a indexů tak, aby libovolný vrchol byl \mathbf{b}_{n00} , nemění tvar plátu.
- ▶ **Afinní invariance:** Aplikace afinní transformace na řídicí síť nebo přímo na plát dává stejný výsledek.
- ▶ **Konvexní obal:** Pro $u, v, w \geq 0$ a $u + v + w = 1$ leží každý bod plátu v konvexním obalu bodů \mathbf{b}_{ijk} .
- ▶ **Lineární přesnost:** Jsou-li kontrolní body umístěny v rovině podle barycentrických souřadnic $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n})$, plát tuto rovinu reprodukuje přesně.
- ▶ **Algebraický stupeň:** Maximální počet průsečíků plátu s přímkou je n^2 .

de Casteljauův algoritmus pro trojúhelníkové pláty

- ▶ **Cíl:** Najít bod $\mathbf{x}(u, v, w)$ na Bézierově trojúhelníkovém plátu stupně n definovaném kontrolní sítí \mathbf{b}_{ijk} .

1 Začneme s počáteční sítí $\mathbf{b}_{ijk}^0 = \mathbf{b}_{ijk}$, kde $i + j + k = n$.

2 V každém kroku provedeme **lineární interpolaci** v barycentrických souřadnicích:

$$\mathbf{b}_{ijk}^r(u, v, w) = u \mathbf{b}_{i+1, j, k}^{r-1} + v \mathbf{b}_{i, j+1, k}^{r-1} + w \mathbf{b}_{i, j, k+1}^{r-1}.$$

3 Po n krocích zůstane jediný bod $\mathbf{b}_{000}^n = \mathbf{x}(u, v, w)$, který leží na plátu.

- ▶ Algoritmus je přímým zobecněním de Casteljauova postupu pro Bézierovy křivky.
- ▶ Interpolace probíhá uvnitř trojúhelníkové domény pomocí barycentrických souřadnic.



Osnova

1 Bézierovy plochy

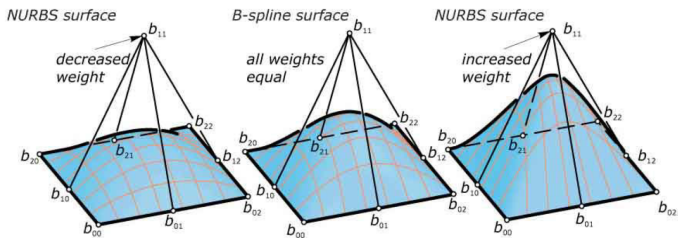
2 B-spline plochy a NURBS plochy

3 Polygoniální síť

4 Subdivizní plochy

B-spline plochy a NURBS plochy

- ▶ **Bézierovy pláty** jsou tvořeny rodinami Bézierových křivek, a proto přebírají jejich nevýhody:
 - ▶ při vyšším stupni špatně aproximují tvar řídicí sítě,
 - ▶ změna jediného řídicího bodu ovlivní **celou plochu**, což ztěžuje lokální editaci.
- ▶ **B-spline plochy** tato omezení odstraňují:
 - ▶ plocha je stále popsána **čtyřúhelníkovou řídicí sítí**,
 - ▶ stupně ve směrech u a v lze volit nezávisle,
 - ▶ **hladkost** závisí na stupních a uzlových vektorech stejně jako u křivek.
- ▶ **NURBS plochy** (*Non-Uniform Rational B-Splines*) jsou racionálním zobecněním B-spline ploch:
 - ▶ každý řídicí bod má svou **váhu**,
 - ▶ změna váhy ovlivňuje lokální tvar plochy stejně jako u NURBS křivek.



B-spline plocha

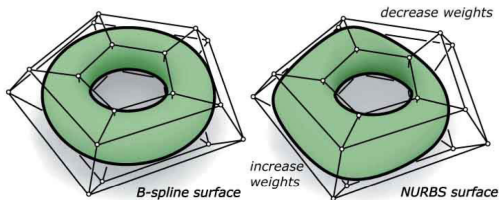
Definice (B-spline plocha)

B-spline plocha bistupně (p, q) je definována jako

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i,j} N_i^p(u) N_j^q(v),$$

kde $\mathbf{b}_{i,j}$ jsou **řídící body** a $N_i^p(u)$, $N_j^q(v)$ jsou **B-spline** **bázové funkce** stupňů p, q určené **uzlovými vektory** $\{u_i\}$, $\{v_j\}$.

- ▶ Plocha je typu **tenzorový součin** a zachovává lokální vlastnosti B-spline křivek.
- ▶ Změna jednoho řídícího bodu ovlivní pouze lokální oblast plochy.



NURBS plocha

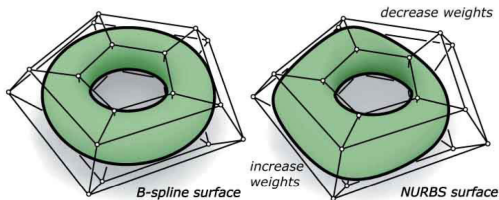
Definice (NURBS plocha)

NURBS plocha (*Non-Uniform Rational B-Spline*) je definována jako

$$\mathbf{x}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} \mathbf{b}_{i,j} N_i^p(u) N_j^q(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} N_i^p(u) N_j^q(v)},$$

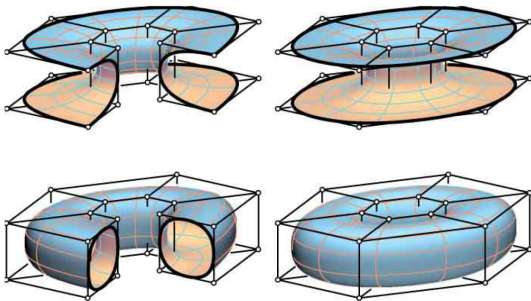
kde $w_{i,j} > 0$ jsou **váhy** řídicích bodů.

- ▶ Váhy umožňují **racionální reprezentaci** a tím přesný popis **kvadrik**.
- ▶ Při $w_{i,j} = 1$ pro všechny body dostáváme obyčejnou B-spline plochu.



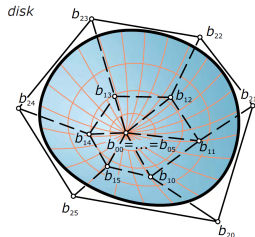
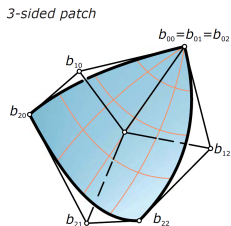
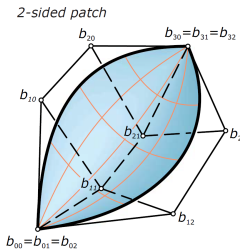
Topologie NURBS ploch

- ▶ B-spline / NURBS plocha obsahuje dvě rodiny křivek, u -křivky a v -křivky, přičemž každá z nich může být otevřená (clamped) nebo uzavřená.
- ▶ To vede ke třem základním typům topologie:
 - ▶ Otevřený režim v u i v : plocha je topologicky obdélník.
 - ▶ Uzavřený režim v jednom směru (u nebo v): plocha je topologicky válec.
 - ▶ Uzavřený režim v obou směrech: plocha je topologicky torus.
- ▶ Tyto tři případy představují jediné možné topologie, které lze realizovat jedinou NURBS plochou typu tenzorový součin, a to bez degenerace hran nebo vrcholů.



Degenerované případy NURBS ploch

- ▶ Pokud se **jeden nebo více okrajových polygonů** řídicí sítě **zdegeneruje do bodu**, vznikají pláty s **menším počtem hran**.
- ▶ Geometrie se tím výrazně mění (např. vzniká **kužel** nebo **disk**), ale topologie zůstává jako u obdélníkového plátu.
- ▶ Degenerací dvou **protilehlých hran** vznikne plocha se **dvěma hranami** (topologie **válce**).
- ▶ Pokud se navíc zbývající dvě hrany **ztotožní**, vznikne **uzavřená plocha** s topologií **koule**.
- ▶ **Složitější topologie** vyžadují **více NURBS plátů**; to přirozeně řeší až **subdivizní plochy**.



Osnova

1 Bézierovy plochy

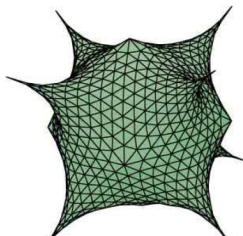
2 B-spline plochy a NURBS plochy

3 Polygoniální síť

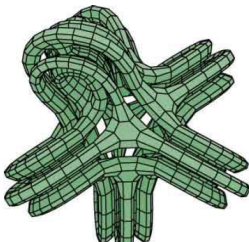
4 Subdivizní plochy

Polygoniální síť

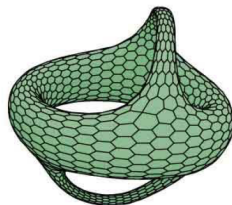
- ▶ Dosud jsme se zabývali **hladkými plochami** (Bézier, B-spline, NURBS). Jejich realizace ve velkém měřítku (např. v architektuře) bývá však **nákladná a složitá**.
- ▶ Praktickou alternativou jsou **polygoniální síť (meshes)** – kolekce bodů (vrcholů) uspořádaných do základních **stěn**.
- ▶ Každá stěna je ohraničena **polygony** (nejčastěji trojúhelníky nebo čtyřúhelníky), které se dotýkají podél hran.
- ▶ Síť mohou mít i **nehladké rysy** (ostré hrany, vrcholy) a přesto dobře popisují tvar.
- ▶ Ve skutečnosti jsou téměř všechny zdánlivě hladké plochy v **animacích, hrách a CAD aplikacích** pouze **jemně renderované polygoniální síť**.



trojúhelníkové stěny



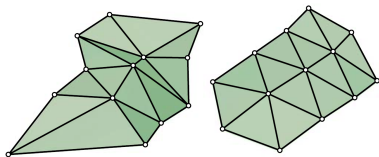
čtyřúhelníkové stěny



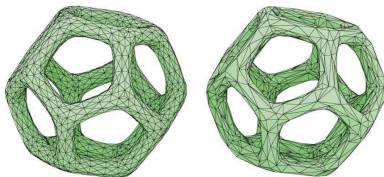
šestiúhelníkové stěny

Geometrie a konektivita sítě

- ▶ Při práci se **sítěmi** je nutné rozlišovat dvě složky:
 - ▶ **geometrii** – polohy vrcholů v prostoru,
 - ▶ **konektivitu (topologii sítě)** – informace, které vrcholy jsou spojeny hranami a tvoří stěny.
- ▶ Sítě se stejnou konektivitou mohou mít zcela odlišné tvary – stačí změnit souřadnice vrcholů, ale zachovat jejich propojení.
- ▶ **Počet stěn** určuje míru volnosti při návrhu tvaru: více stěn znamená větší flexibilitu, ale i vyšší složitost modelu.
- ▶ Je proto nutné hledat **strategie generování sítí**, které vyváží přesnost, estetiku a konstrukční proveditelnost.
- ▶ Estetické vlastnosti (např. **rovnoměrnost**, **plynulost**, **symetrie**) hrají klíčovou roli při volbě vhodné sítě pro daný tvar.



stejná konektivita, různé tvary

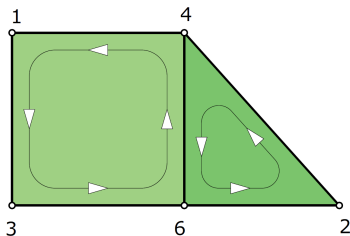


stejný tvar, různé konektivity

Reprezentace geometrie a konektivity (formát OBJ)

- ▶ Pro popis sítě je nutné uložit **geometrii** (souřadnice vrcholů) a **konektivitu** (vztahy mezi vrcholy, hranami a stěnami).
- ▶ Běžně používaný je **OBJ (object) formát**, který obsahuje dvě hlavní části:
 - ▶ **Seznam vrcholů:** Každý vrchol je definován trojicí souřadnic $[x, y, z]$. Pořadí v seznamu určuje **indexy** vrcholů: první trojice má index 1, další 2, atd.
 - ▶ **Příkazy stěn:** Každá stěna je definována výčtem indexů vrcholů, např.

 $f\ 1\ 3\ 6\ 4 \rightarrow$ čtyřúhelníková stěna, $f\ 2\ 4\ 6 \rightarrow$ trojúhelník.
- ▶ **Pořadí vrcholů** určuje orientaci stěny. Pro konzistenci platí:
 - ▶ sousední stěny sdílejí hranu s opačným směrem (např. 46 a 64),
 - ▶ **vnitřní hrany** se v souboru objevují dvakrát, **okrajové hrany** pouze jednou.

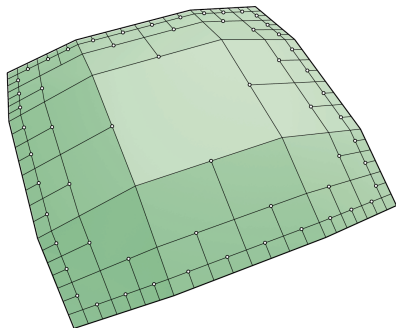


Formáty pro uložení polygoniálních sítí

- ▶ Polygoniální sítě (meshes) lze ukládat v různých formátech podle účelu použití: výměna dat, vizualizace, animace nebo výroba.
- ▶ **Jednoduché výměnné formáty:**
 - ▶ **OBJ (Object)** – jednoduchý textový formát pro vrcholy, stěny, normály a texturovací souřadnice.
 - ▶ **PLY (Polygon)** – formát původně určený pro 3D skenování, umožňuje ukládat i barvy a další atributy vrcholů.
 - ▶ **OFF (Object File Format)** – minimalistický akademický formát pro vrcholy a stěny.
- ▶ **Formáty pro 3D tisk a výrobu:**
 - ▶ **STL (STereoLithography)** – standard 3D tisku, ukládá síť trojúhelníků bez topologie a bez barev.
 - ▶ **3MF (3D Manufacturing Format)** – modernější náhrada STL s podporou barev, materiálů a jednotek.
- ▶ **Formáty pro grafiku, hry a animaci:**
 - ▶ **FBX (Filmbox)** – ukládá geometrii, materiály i animace, běžný v herních enginech.
 - ▶ **glTF / GLB (GL Transmission Format)** – efektivní formát pro přenos 3D modelů, zejména na webu.
- ▶ **CAD a průmyslové formáty:**
 - ▶ **STEP (Standard for the Exchange of Product model data)** a **IGES (Initial Graphics Exchange Specification)** – primárně pro NURBS, ale mohou obsahovat i polygoniální sítě.

Kvalita a omezení sítí

- ▶ Pomocí seznamu vrcholů a stěn máme vše potřebné pro definici **geometrie i konektivity sítě**.
- ▶ Při konstrukci sítí je výhodné **vyloučit T-spoje (T-junctions)** – místa, kde dvě stěny sdílejí pouze část hrany jiné stěny.
- ▶ Je také vhodné vyhnout se **degenerovaným trojúhelníkům**, jejichž vrcholy leží na jedné přímce. Takové stěny nedefinují rovinu a mohou způsobovat chyby při dalším zpracování.



Eulerova charakteristika a genus

- ▶ Jaké vztahy platí mezi počty **vrcholů**, **hran** a **stěn** dané plochy?
- ▶ Tento vztah popisuje **Eulerova charakteristika** plochy, která je definována vztahem

$$\chi = v - e + f,$$

kde v je počet vrcholů, e počet hran a f počet stěn v libovolné síti, která plochu pokrývá.

- ▶ Hodnota χ nezávisí na konkrétní síti, ale pouze na **topologii plochy** (tj. na tom, zda má plocha okraje, díry nebo tunely), např.
 - ▶ **Rovina (nekonečná), válec, torus**: $\chi = 0$.
 - ▶ **Disk** (konečná plocha s okrajem): $\chi = 1$.
 - ▶ **Koule**: $\chi = 2$.
- ▶ Známe-li χ , známe tím **omezení mezi počty v, e, f** .
- ▶ Pro **uzavřené orientovatelné plochy** (koule, torus, víceděrové torusy) platí elegantní vztah

$$\chi = 2 - 2g,$$

kde g je **genus – počet tunelů** (počet „držadel“ plochy).

- ▶ Například povrch **krychle** má topologii koule, tedy $g = 0 \Rightarrow \chi = 2$. Pro krychli platí

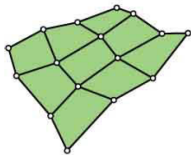
$$v = 8, \quad e = 12, \quad f = 6, \quad 8 - 12 + 6 = 2,$$

což přesně odpovídá Eulerově charakteristice koule.

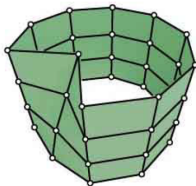
Čtyřúhelníkové sítě (Quad Meshes)

- ▶ **Čtyřúhelníková síť** (quad mesh) vzniká pravidelným dlažděním roviny čtverci nebo obdélníky. Ve vnitřních vrcholech se setkávají **čtyři stěny** – valence 4.
- ▶ **Pravidelný vrchol**: valence = 4. **Nepravidelný vrchol**: valence $\neq 4$.
- ▶ Příklad: **krychle** je čtyřúhelníková síť, ale všechny její vrcholy mají valenci 3 – jsou tedy nepravidelné.
- ▶ Pravidelné čtyřúhelníkové sítě lze vytvořit pouze na plochách s **nulovou Eulerovou charakteristikou**, jako je **rovina**, **válec** nebo **torus**.
- ▶ Na jiných plochách (např. na **kouli**) musí existovat nepravidelné vrcholy.
- ▶ Čtyřúhelníky nemusí být rovinné, ale **rovinné stěny** jsou praktické pro architekturu a výrobu.

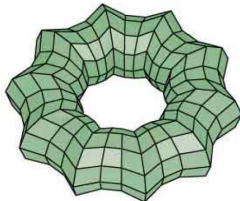
"four sided patch"



"cylinder"

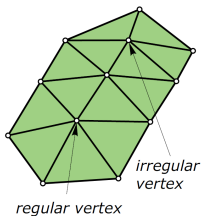
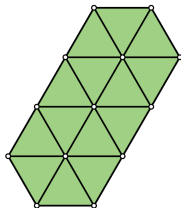


"torus"



Trojúhelníkové sítě (Triangle Meshes)

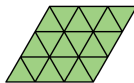
- ▶ **Trojúhelníková síť** se skládá výhradně z trojúhelníků. Rovinu lze dlaždit pravidelně šesti trojúhelníky kolem jednoho vrcholu.
- ▶ **Pravidelný vrchol:** valence = 6. **Nepravidelný vrchol:** valence $\neq 6$.
- ▶ Stejnou konektivitu získáme, pokud čtvercovou síť rozdělíme jednou rodinou rovnoběžných diagonál.
- ▶ Naopak odstraněním jedné sady hran z pravidelné trojúhelníkové sítě vznikne dlaždění pomocí rovnoběžníků.
- ▶ Trojúhelníkové sítě jsou velmi vhodné pro **architekturu** – všechny jejich **stěny jsou rovinné**.
- ▶ Pro popis stejného tvaru však obvykle vyžadují **zhruba dvojnásobný počet stěn** oproti čtyřúhelníkovým sítím.



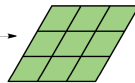
square tiling



triangle tiling

regular planar
triangle mesh

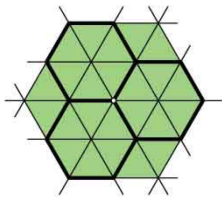
parallelogram tiling



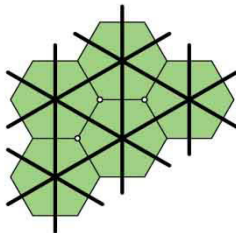
Hexagonální sítě (Hexagonal Meshes)

- ▶ Při dlaždění roviny pravidelnými mnohoúhelníky, jejichž úhly se v každém vrcholu sečtou na 360° , existují pouze tři možnosti: **trojúhelníky**, **čtverce** a **šestiúhelníky**.
- ▶ **Hexagonální síť** vzniká pravidelným uspořádáním šestiúhelníků – tzv. **včelí plást** (honeycomb tiling).
- ▶ V každém pravidelném vrcholu se setkávají **tři stěny** – valence = 3.
- ▶ Taková síť je lokálně **pravidelná** a často slouží jako inspirace pro architektonické konstrukce a fasádní struktury.
- ▶ Na **uzavřených plochách** (např. na kouli, kde $\chi = 2$) **nelze mít čistě hexagonální síť** – musí se objevit **nepravidelné vrcholy** (s valencí jinou než 3).

honeycomb tiling



regular triangular tiling



Proč existují jen tři pravidelné dlažďení roviny

- ▶ Pravidelný n -úhelník má vnitřní úhel

$$\alpha = \frac{(n-2)180^\circ}{n}.$$

- ▶ Aby bylo možné jimi **vydláždít rovinu**, musí se v každém vrcholu sejít k takových mnohoúhelníků tak, aby jejich úhly přesně vyplnily celý kruh:

$$k\alpha = 360^\circ.$$

- ▶ Po dosazení dostáváme podmínku

$$k \frac{(n-2)180^\circ}{n} = 360^\circ \iff k(n-2) = 2n.$$

- ▶ Tato rovnice má v kladných celých číslech pouze tři řešení:

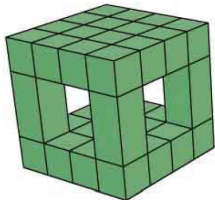
$$(n, k) = (3, 6), \quad (4, 4), \quad (6, 3).$$

- ▶ To odpovídá právě třem pravidelným dlaždicím roviny: **trojúhelníkové**, **čtvercové** a **šestiúhelníkové**.

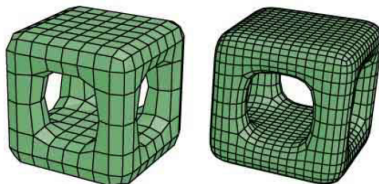
Zjemnění sítě (Mesh Refinement)

- ▶ Zjemnění sítě znamená vytvoření jemnější sítě z hrubé pomocí **systematické změny konektivity a geometrie**.
- ▶ Cíl je zvýšit **hustotu vrcholů** a tím i **přesnost reprezentace** hladkého tvaru.
- ▶ Zjemnění probíhá ve dvou krocích:
 - 1 změna konektivity – přidání nových vrcholů a hran,
 - 2 úprava geometrie – posun vrcholů podle tvaru plochy.
- ▶ **Subdivizní plochy** jsou speciálním případem zjemňování, kde se tento proces opakuje iterativně.
- ▶ Čím jemnější síť, tím větší flexibilita a věrnější aproximace hladké plochy.

coarse input mesh



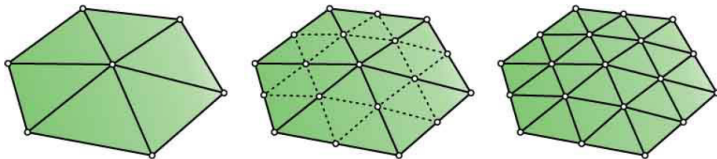
first two steps of subdivision refinement



Zjemnění trojúhelníkové sítě

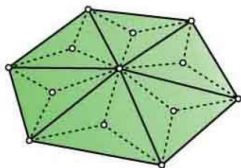
- ▶ Nejjednodušší způsob zjemnění trojúhelníkové sítě: vložit **středy hran** a spojit je.
- ▶ Každá stěna se rozdělí na **čtyři nové trojúhelníky**.
- ▶ Tento postup **zachovává topologickou pravidelnost sítě** a nevytváří nové nepravidelné vrcholy.
- ▶ Geometrie se zatím nemění – všechny vrcholy leží na původní ploše.
- ▶ Následně lze jejich polohu upravit podle tvaru.
- ▶ Tento krok je **topologickým základem Loopovy subdivize**.

triangle mesh → insert edge midpoints → refined triangle mesh

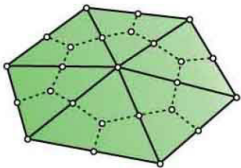
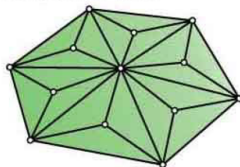


Zjemnění trojúhelníkové sítě

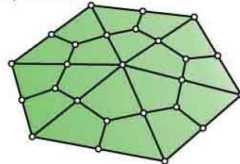
- ▶ Alternativní zjemnění: vložení **těžiště každého trojúhelníku** a jeho propojení s vrcholy.
- ▶ Tento postup **ruší pravidelnost sítě** – všechny původně pravidelné vrcholy (valence 6) se stanou nepravidelnými.
- ▶ Na druhou stranu může mít **vizuálně zajímavý a ornamentální efekt**.
- ▶ Spojením těžišť se středy hran lze navíc vytvořit **čtyřúhelníkovou síť**.



irregular tri mesh

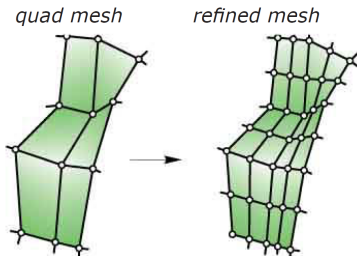


quad mesh



Zjemnění čtyřúhelníkové sítě

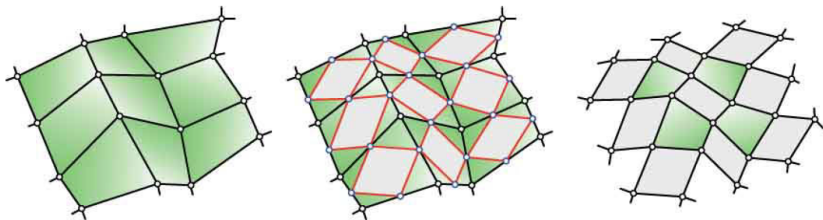
- ▶ Zjemnění čtyřúhelníkové sítě probíhá podobně jako u trojúhelníkové – vložíme **střed** **hran** a vhodně je propojíme uvnitř každé stěny.
- ▶ Spojením středů **protilehlých hran** v jedné stěně se získají úsečky, které se protínají v **těžišti stěny**.
- ▶ Každá stěna se tak rozdělí na **čtyři podstěny** ležící na jednom **hyperbolickém paraboloidu**.
- ▶ Tento postup **zachovává pravidelnost vrcholů** a poskytuje vhodný základ pro další úpravy sítě.



Zjemnění čtyřúhelníkové sítě

- ▶ Alternativní zjemnění – propojením všech **středů hran** každé stěny vznikne nový čtyřúhelník, který je vždy **rovnooběžníkem** (Varignonova věta) a tedy rovinný.
- ▶ Okolo původních vrcholů se nově vytvoří **čtyři trojúhelníky**.
- ▶ Spojením těchto trojúhelníků kolem původního vrcholu vznikne nový polygon.
- ▶ Pokud byl vrchol pravidelný, jde opět o **čtyřúhelník** – obvykle však **nerovinný**.
- ▶ Schéma zhruba **zdvojnásobí počet stěn**.
- ▶ U pravidelné čtvercové sítě v rovině zůstává síť pravidelná, její stěny se pouze zmenší o faktor $1/\sqrt{2}$ a pootočí o 45° .

quad mesh → insert edge midpoints → refined quad mesh



Varignonova věta

Věta (Varignonova věta)

Spojením středů stran libovolného čtyřúhelníku vznikne rovnoběžník.

Důkaz:

- ▶ Mějme libovolný čtyřúhelník $ABCD$ a označme středy jeho stran:

$$S_{AB} = \frac{1}{2}(A + B), \quad S_{BC} = \frac{1}{2}(B + C), \quad S_{CD} = \frac{1}{2}(C + D), \quad S_{DA} = \frac{1}{2}(D + A).$$

- ▶ Tyto čtyři body tvoří nový čtyřúhelník

$$S_{AB}S_{BC}S_{CD}S_{DA}.$$

- ▶ Vektor jedné dvojice protilehlých stran:

$$\overrightarrow{S_{AB}S_{BC}} = S_{BC} - S_{AB} = \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(C - A),$$

$$\overrightarrow{S_{DA}S_{CD}} = S_{CD} - S_{DA} = \frac{1}{2}(C + D) - \frac{1}{2}(D + A) = \frac{1}{2}(C - A).$$

- ▶ Tedy tyto dvě strany jsou **rovnoběžné a stejně dlouhé**.

- ▶ Analogicky:

$$\overrightarrow{S_{BC}S_{CD}} = \frac{1}{2}(D - B), \quad \overrightarrow{S_{AB}S_{DA}} = \frac{1}{2}(D - B),$$

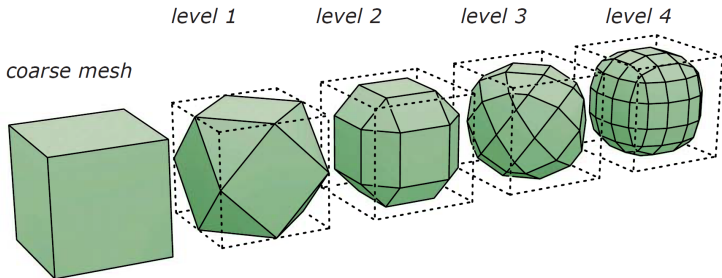
takže i druhá dvojice protilehlých stran je rovnoběžná.

- ▶ Proto čtyřúhelník tvořený středy stran je **rovnoběžník**. □

Iterované zjemnění čtyřúhelníkové sítě

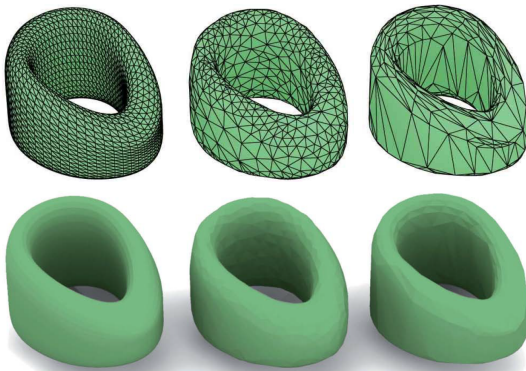
- ▶ Pokud **opakujeme zjemnění čtyřúhelníkové sítě** typu se středy hran vícekrát, síť se postupně přibližuje hladké ploše.
- ▶ Každá iterace rozdělí stěny na menší čtyřúhelníky a **upraví polohu vrcholů** podle jednoduchého pravidla.
- ▶ Opakováním subdivize vzniká posloupnost sítí, která konverguje k **hladké ploše**.
- ▶ Tento proces představuje **nejjednodušší subdivizní algoritmus** pro generování hladkých ploch.

mesh refinement by edge midpoint insertion



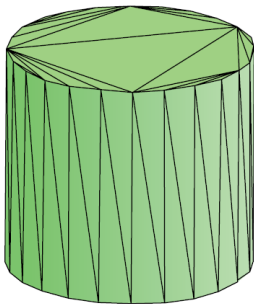
Zjednodušení sítě (Mesh Decimation)

- ▶ **Zjednodušení sítě** je proces opačný ke zjemnění – **odstraňuje vhodně zvolené vrcholy** a nahrazuje je novými hranami tak, aby byla zachována **lokální geometrie plochy**.
- ▶ Algoritmus vybírá vrcholy podle **zakřivení** a **lokálních tvarových vlastností** a propojuje zbývající vrcholy konzistentním způsobem.
- ▶ Přestože výsledná síť obsahuje **mnohem méně trojúhelníků**, může stále **věrně reprezentovat původní tvar** a rozdíly ve stínování bývají často **téměř nepostřehnutelné**.

*original mesh**reduced mesh*

Špatné sítě (Bad Meshes)

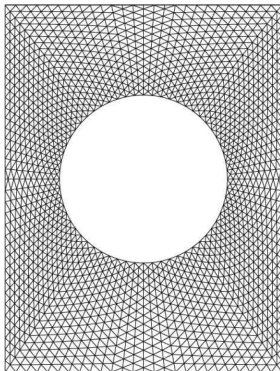
- ▶ To, zda je síť „dobrá“ nebo „špatná“, závisí na jejím účelu – např. na vizuální kvalitě nebo numerické stabilitě při simulacích.
- ▶ Příliš mnoho nepravidelných vrcholů, zejména pokud jsou rozloženy nepravidelně, může vizuálně narušit plynulost povrchu.
- ▶ Při použití ve výpočtech metodou konečných prvků (FEM) je kritické, aby síť neobsahovala „tenké trojúhelníky“ s velmi malými úhly.
- ▶ V „tenkém“ trojúhelníku je poloměr vepsané kružnice mnohem menší než poloměr opsané kružnice, což snižuje přesnost numerických výpočtů.



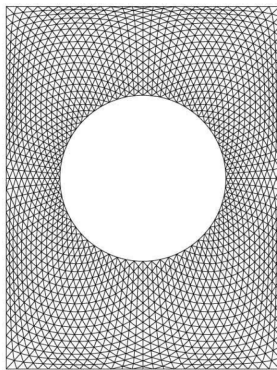
Relaxace sítě (Mesh Relaxation)

- ▶ Kromě technických vlastností lze síť **vylepšit i esteticky** – cílem je **vyvážené rozložení vrcholů a téměř pravidelné stěny**.
- ▶ Plně pravidelné stěny (např. rovnostranné trojúhelníky) obvykle nejsou možné, ale lze se jim **numericky přiblížit**.
- ▶ Fyzikální interpretace: vrcholy představují **hmotné body** a hrany **pružiny**. Systém se nechá dojit do **rovnovážného stavu** → **relaxace**.

mesh before relaxation



mesh after relaxation



Osnova

1 Bézierovy plochy

2 B-spline plochy a NURBS plochy

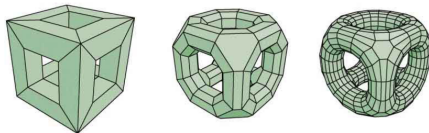
3 Polygoniální síť

4 Subdivizní plochy

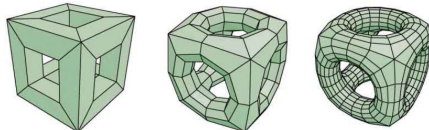
Subdivizní plochy (Subdivision Surfaces)

- ▶ **Subdivizní plochy** vznikají opakovaným **zjemňováním sítě** podle jednoduchého pravidla.
- ▶ Opakovanou aplikací se síť postupně **vyhlazuje** a v limitě vzniká **hladká plocha**.
- ▶ Existuje mnoho schémat – např. **Doo–Sabin**, **Catmull–Clark** a **Loop**.

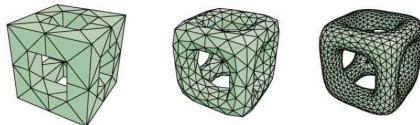
Doo-Sabin subdivision



Catmull-Clark subdivision



Loop subdivision



Historie subdivizních ploch

- ▶ Koncem 70. let vznikly první **subdivizní algoritmy**, které v limitě generují **B-spline plochy** z hrubé čtyřúhelníkové sítě.
- ▶ **Doo–Sabin (1978)** – plocha stupně $(2, 2)$, **Catmull–Clark (1978)** – plocha stupně $(3, 3)$; obě metody dávají **hladké limitní plochy** opakovaným zjemňováním sítě.
- ▶ **Loop (1987)** – zobecnění na trojúhelníkové sítě, **Dyn–Gregory–Levin (1987)** – **interpolační subdivize**, kde plocha prochází všemi vrcholy.
- ▶ U všech těchto metod jemnější úroveň plochy **aproximuje** tu předchozí.



Tony de Rose



Malcom Sabin



Edwin Catmull



Charles Loop

Subdivizní plochy – využití a význam

- ▶ **Pixar** v 90. letech průkopnický využil subdivizní plochy v **počítačové animaci** (např. *Toy Story*, 1995), čímž odstartoval jejich široké uplatnění.
- ▶ Subdivize se stala **efektivním nástrojem** pro tvorbu hladkých, estetických a snadno upravitelných 3D modelů.
- ▶ Moderní CAD systémy (např. Rhino) mají subdivizní plochy **integrovány jako standardní nástroj**.
- ▶ **Shrnutí:** Subdivizní plochy nejsou jen matematický koncept, ale i **praktická metoda generování vizuálně působivých sítí**.



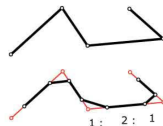
© 2003 Disney Enterprises, Inc. and Pixar



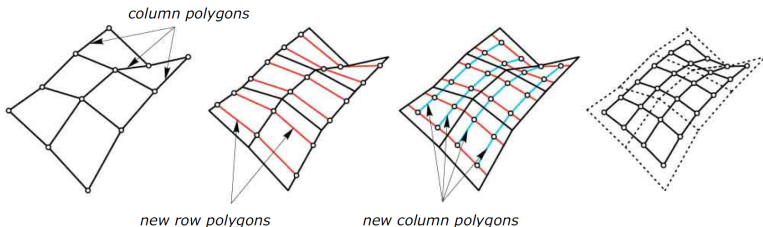
© 2006 Disney Enterprises, Inc. and Pixar

Kvadratické B-spline plochy pomocí subdivize

- ▶ **Chaikinův algoritmus** generuje kvadratickou B-spline křivku tak, že na každé hraně vloží dva nové body dělení v poměru 1:3 a 3:1 a tyto body propojí.
- ▶ Tento postup tvoří jeden **zjemňovací krok**, který se opakuje iterativně.
- ▶ Stejná myšlenka se uplatní na **pravidelné čtyřúhelníkové síť**.
- ▶ Postup:
 - 1 Chaikinovo zjemnění se provede podél všech **sloupcových polygonů**.
 - 2 Nové body se **propojí**.
 - 3 Algoritmus se zopakuje pro **řádkové polygony**.
- ▶ Každý krok vytvoří síť s asi čtyřnásobným počtem stěn a limitně se blíží kvadratické B-spline ploše.



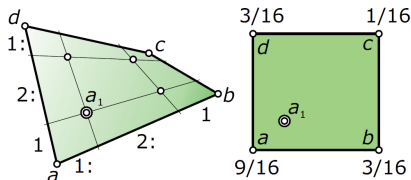
Chaikin's algorithm



Kvadratické B-spline plochy pomocí subdivize

- ▶ Rozdělovat přechod mezi dvěma úrovněmi sítě do dvou kroků je nepohodlné. Lze jej popsat **jednoduše v jediném kroku**.
- ▶ Uvažujme jeden čtyřúhelník s vrcholy a, b, c, d .
- ▶ Postup:
 - 1 Dělíme úsečky ab a dc v poměru 1:3 a 3:1.
 - 2 Spojíme odpovídající body a tyto spojnice opět dělíme v poměru 1:3 a 3:1.
- ▶ Všechny použité body a přímky leží na **hyperbolickém paraboloidu**, tj. na **Bézierově plátu stupně (1,1)**.
- ▶ Výpočet nového bodu:

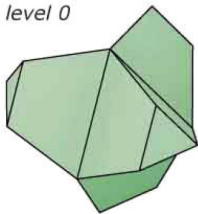
$$a_1 = \frac{9}{16}a + \frac{3}{16}b + \frac{3}{16}d + \frac{1}{16}c.$$
- ▶ Nové body vznikají lineární kombinací čtyř vrcholů s koeficienty **9/16, 3/16, 3/16, 1/16**, které lze graficky vyznačit přímo v síti.
- ▶ Každý čtyřúhelník dává čtyři nové vrcholy, které tvoří zjemněnou síť. Omezením je topologie sítě – její zobecnění představuje **Doo–Sabin subdivizní schéma**.



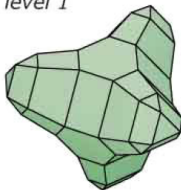
Doo–Sabin subdivizní schéma

- ▶ **Doo–Sabin** aplikuje stejné pravidlo subdivize na **každou stěnu** stejně jako dříve popsany postup pro čtyřúhelníky.
- ▶ Na rozdíl od předchozího schématu však Doo–Sabin **funguje i pro nečtyřúhelníkové stěny** a lze jej použít na libovolnou polygonální síť.
- ▶ Vrchol valence 3 vytvoří po zjemnění **trojúhelník**, vrchol valence 5 vytvoří **pětiúhelník** atd.
- ▶ Výsledkem jsou **nepravidelné (extraordinary) stěny**, pro které je v dalších krocích potřeba použít odpovídající pravidla.
- ▶ Opakováním procesu vzniká hladká plocha odpovídající **kvadratické B-spline ploše**.

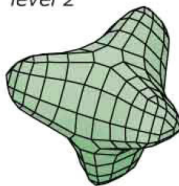
level 0



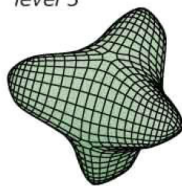
level 1



level 2

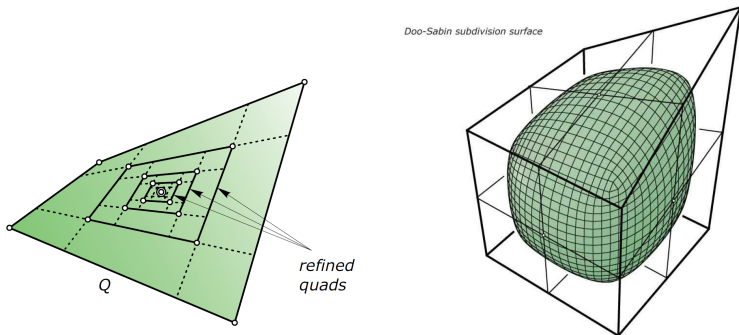


level 3



Doo–Sabin subdivizní schéma

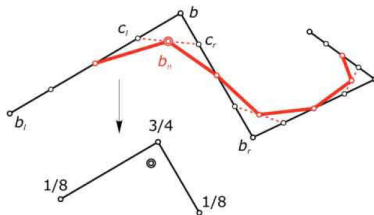
- ▶ Doo–Sabin plocha velmi dobře zachovává **globální tvar** původní sítě.
- ▶ Při opakované subdivizi zůstává každý čtyřúhelník na stejném **hyperbolickém paraboloidu** (nebo v rovině v případě rovinného čtyřúhelníku) a smršťuje se k **těžišti** původní stěny.
- ▶ Hrany těchto čtyřúhelníků konvergují k **tečnám limitní plochy**, takže výsledná plocha je v těžišti původní stěny k limitní ploše **tečná**.
- ▶ To znamená, že se původní síť během subdivize **nehrouť ani nesmršťuje**, ale její globální tvar zůstává zachován.



Od kubických B-splinů ke Catmull–Clark subdivizi

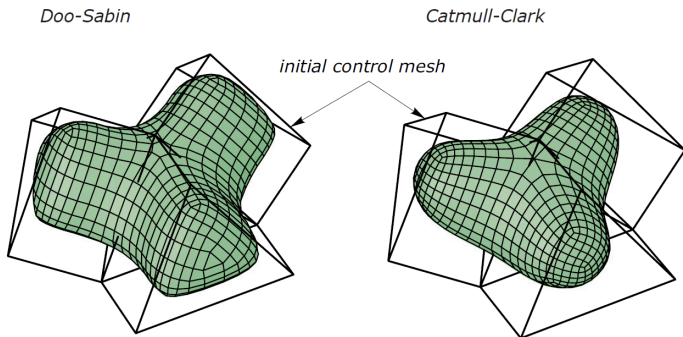
- ▶ Stejná strategie jako u kvadratických B-splinů (Chaikin) funguje i pro **kubické B-spliny**.
- ▶ Kubické B-spline křivky se generují pomocí **Lane–Riesenfeldova algoritmu**.
- ▶ Subdivizní krok:
 - 1 vložíme **středky hran**,
 - 2 provedeme **dvě kola průměrování**.
- ▶ Vznikají dva typy nových bodů:
 - ▶ **středky hran**,
 - ▶ **posunuté vrcholy** původního polygonu.
- ▶ Nová poloha vrcholu b_n (se sousedy b_ℓ, b_r) je průměrem Chaikinových bodů:

$$b_n = \frac{1}{2}c_\ell + \frac{1}{2}c_r = \frac{1}{8}b_\ell + \frac{3}{4}b + \frac{1}{8}b_r.$$
- ▶ Tento princip se přenáší na plochy a vede k **Catmull–Clark subdivizi**.



Doo–Sabin vs. Catmull–Clark

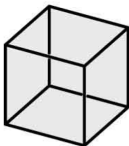
- ▶ **Catmull–Clark** používá více průměrování, a proto dává **hladší** limitní plochu než Doo–Sabin.
- ▶ Na **nepravidelných (extraordinary) vrcholech** však hladkost stále není ideální, což je problém např. v **automobilovém průmyslu**.
- ▶ Silnější vyhlazování způsobuje, že Catmull–Clark plocha leží **dále od řídicí sítě** než plocha Doo–Sabin.



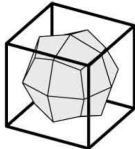
Neplanární čtyřúhelníky při subdivizi

- ▶ I když začneme s **rovinnými čtyřúhelníky**, subdivize obvykle vytvoří **neplanární quady**.
- ▶ Důvod: běžná subdivizní schémata (Doo–Sabin, Catmull–Clark) používají pouze **lineární kombinace vrcholů**, takže **planárnost se nezachovává**.

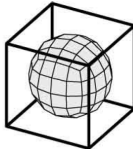
level 0



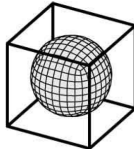
level 1



level 2

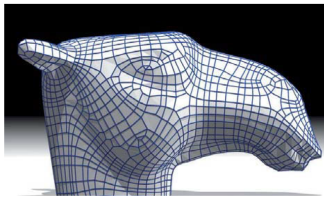


level 3

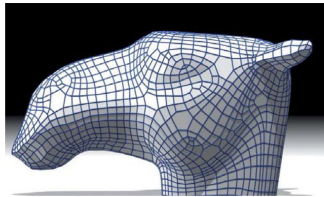


- ▶ Řešením jsou **planarizační algoritmy**: po každém kroku subdivize provedou malou optimalizaci, aby nové quady byly opět **co nejvíce rovinné**.

non-planar quads



planar quads



Loopova subdivize

- ▶ Trojúhelníková síť má důležitou vlastnost: **všechny stěny jsou vždy rovinné.**
- ▶ Pouhé zjemnění pouze **rozdělí trojúhelníky**, ale ještě **nevytvoří hladkou plochu.**
- ▶ **Loopova subdivize** k tomuto zjemnění přidává **geometrický přepoččet vrcholů**
- ▶ Nové i původní vrcholy se posouvají pomocí **vážených průměrů sousedních bodů.**
- ▶ Tím vzniká posloupnost sítí, která **konverguje k hladké limitní ploše.**
- ▶ Výsledná hladkost je srovnatelná s **Catmull–Clarkovými plochami.**

