

Vybrané příklady z diferenciální geometrie – délka křivky a parametrizace obloukem

Délka regulární parametrické křivky $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je dána vztahem

$$L = \int_I \|\gamma'(t)\| dt.$$

Příklad 1 – délka kružnice

Určete délku křivky

$$\gamma(t) = [R \cos t, R \sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad R > 0.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t).$$

Proto

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R.$$

Tedy

$$L = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

Příklad 2 – délka elipsy

Určete délku křivky

$$\gamma(t) = [a \cos t, b \sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad a, b > 0.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (-a \sin t, b \cos t).$$

Proto

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

Tedy

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

Tento integrál nelze obecně vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Příklad 3 – Délka paraboly

Určete délku křivky

$$\gamma(t) = [t, t^2], \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (1, 2t), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}.$$

Délka křivky je

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt.$$

Použijeme substituci

$$2t = \sinh u, \quad dt = \frac{1}{2} \cosh u du.$$

Pro $t = 0$ je $u = 0$ a pro $t = 1$ je $u = \operatorname{arsinh}(2)$.

Potom

$$\sqrt{1 + 4t^2} = \cosh u,$$

a tedy

$$L = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arsinh}(2)} \cosh^2 u du.$$

Použijeme vztah

$$\cosh^2 u = \frac{\cosh 2u + 1}{2},$$

odkud

$$L = \frac{1}{4} \int_0^{\operatorname{arsinh}(2)} (\cosh 2u + 1) du = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \sinh 2u + u \right]_0^{\operatorname{arsinh}(2)}.$$

Dostáváme

$$L = \frac{1}{8} \sinh(2 \operatorname{arsinh}(2)) + \frac{1}{4} \operatorname{arsinh}(2).$$

Protože

$$\operatorname{arsinh}(2) = \ln(2 + \sqrt{5}), \quad \sinh(2 \operatorname{arsinh}(2)) = 4\sqrt{5},$$

platí

$$L = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}).$$

Příklad 4 – délka cykloidy

Určete délku křivky

$$\gamma(t) = [t - \sin t, 1 - \cos t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

Proto

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2 \cos t}.$$

Délka křivky je

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt.$$

Použijeme identitu

$$2 - 2 \cos t = 4 \sin^2 \frac{t}{2},$$

a proto

$$\sqrt{2 - 2 \cos t} = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right|.$$

Na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ platí $\sin \frac{t}{2} \geq 0$, tedy

$$L = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt.$$

Substitucí $u = \frac{t}{2}$, $dt = 2 du$, dostaneme

$$L = 4 \int_0^{\pi} \sin u du = 4[-\cos u]_0^{\pi} = 4(1 + 1) = 8.$$

Příklad 5 – délka šroubovice

Určete délku křivky

$$\gamma(t) = [\cos t, \sin t, t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1).$$

Proto

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

Délka křivky je

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

Příklad 6 – délka Tschirnhausenovy kubiky

Určete délku křivky

$$\gamma(t) = [t^2 - 1, t^3 - t], \quad t \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2 - 1).$$

Proto

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + (3t^2 - 1)^2} = \sqrt{9t^4 - 2t^2 + 1} = 3t^2 + 1,$$

protože $9t^4 - 2t^2 + 1 = (3t^2 + 1)^2$.

Délka křivky je

$$L = \int_{-1}^1 (3t^2 + 1) dt = [t^3 + t]_{-1}^1 = 2 - (-2) = 4.$$

Pro regulární parametrickou křivku $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ a pevně zvolený bod $t_0 \in I$ definujeme délku oblouku funkcí

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau.$$

Protože $\|\gamma'(t)\| > 0$, je funkce $s(t)$ ostře rostoucí, a tedy prostá. Lze ji tedy (teoreticky) invertovat a získat parametrizaci obloukem

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)).$$

V této parametrizaci platí

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1.$$

Příklad 1 – parametrizace obloukem kružnice

Najděte parametrizaci obloukem křivky

$$\gamma(t) = [R \cos t, R \sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t).$$

Velikost derivace je

$$\|\gamma'(t)\| = R.$$

Délka oblouku je

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \int_0^t R d\tau = Rt, \quad s \in \langle 0, 2\pi R \rangle.$$

Inverzní funkce je

$$t = \frac{s}{R}.$$

Parametrizace obloukem je

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma\left(\frac{s}{R}\right) = \left[R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right], \quad s \in \langle 0, 2\pi R \rangle.$$

Příklad 2 – parametrizace obloukem logaritmické spirály

Najděte parametrizaci obloukem křivky

$$\gamma(t) = [e^t \cos t, e^t \sin t], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t)).$$

Velikost derivace je

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2} e^t.$$

Délka oblouku je

$$s(t) = \int_{-\infty}^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \int_{-\infty}^t \sqrt{2} e^\tau d\tau = \left[\sqrt{2} e^\tau \right]_{-\infty}^t = \sqrt{2} e^t, \quad s \in (0, \infty).$$

Inverzní funkce je

$$t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

Parametrizace obloukem je

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left[\frac{s}{\sqrt{2}} \cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\right], \quad s \in (0, \infty).$$

Příklad 3 – parametrizace obloukem cykloidy

Najděte parametrizaci obloukem křivky

$$\gamma(t) = [t - \sin t, 1 - \cos t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

Velikost derivace je

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2 \cos t} = 2 \sin \frac{t}{2}.$$

Délka oblouku je

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \int_0^t 2 \sin \frac{\tau}{2} d\tau = \left[-4 \cos \frac{\tau}{2}\right]_0^t = 4 - 4 \cos \frac{t}{2}, \quad s \in \langle 0, 8 \rangle.$$

Inverzní funkce je

$$t = 2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right).$$

Parametrizace obloukem je

$$\tilde{\gamma}(s) = \left[2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right) - \sin\left(2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)\right), 1 - \cos\left(2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)\right)\right], \quad s \in \langle 0, 8 \rangle.$$

Příklad 4 – parametrizace obloukem půlkružnice

Najděte parametrizaci obloukem křivky

$$\gamma(t) = [t, -\sqrt{1-t^2}], \quad t \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = \left(1, \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right).$$

Velikost derivace je

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Délka oblouku je

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = [\arcsin \tau]_0^t = \arcsin t, \quad s \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Inverzní funkce je

$$t = \sin s.$$

Parametrizace obloukem je

$$\tilde{\gamma}(s) = \left[\sin s, -\sqrt{1 - \sin^2 s}\right] = [\sin s, -\cos s], \quad s \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$