

Vybrané příklady z diferenciální geometrie – obsah oblasti

Uvažujme rovinnou parametrickou křivku

$$\gamma(t) = [x(t), y(t)], \quad t \in \langle a, b \rangle.$$

Předpokládejme, že křivka je:

- *uzavřená*, tj. $\gamma(a) = \gamma(b)$,
- *jednoduchá*, tj. nemá samoprůniky,
- *regulární*, tj. $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$.

Pak orientovaný obsah oblasti ohraničené křivkou γ je dán vztahem

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt.$$

Ekvivalentně lze psát

$$A = \int_a^b x(t)y'(t) dt = - \int_a^b y(t)x'(t) dt.$$

Poznámka. Znaménko výsledku závisí na orientaci křivky:

- kladná orientace $\Rightarrow A > 0$,
- záporná orientace $\Rightarrow A < 0$.

Poznámka. Podmínku regulárnosti lze oslabit. Vzorec platí i pro křivky, které jsou pouze po částech třídy C^1 , tedy mohou mít izolované body, kde $\gamma'(t) = \mathbf{0}$ nebo není definována, pokud křivka zůstává jednoduchá, uzavřená a tvoří hranici oblasti.

Příklad 1 – obsah kružnice

Určete obsah oblasti ohraničené křivkou

$$\gamma(t) = [R \cos t, R \sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Derivace složek jsou

$$x'(t) = -R \sin t, \quad y'(t) = R \cos t.$$

Obsah je

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 dt = \frac{1}{2} [R^2 t]_0^{2\pi} = \pi R^2.$$

Příklad 2 – obsah elipsy

Určete obsah oblasti ohraničené křivkou

$$\gamma(t) = [a \cos t, b \sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Derivace složek jsou

$$x'(t) = -a \sin t, \quad y'(t) = b \cos t.$$

Obsah je

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \frac{1}{2} [abt]_0^{2\pi} = \pi ab.$$

Příklad 3 – obsah vlnité kružnice

Určete obsah oblasti ohraničené křivkou

$$\gamma(t) = \left[\left(2 + \frac{1}{2} \cos 3t \right) \cos t, \left(2 + \frac{1}{2} \cos 3t \right) \sin t \right], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Označme

$$r(t) = 2 + \frac{1}{2} \cos 3t.$$

Derivace složek jsou

$$x'(t) = r'(t) \cos t - r(t) \sin t, \quad y'(t) = r'(t) \sin t + r(t) \cos t.$$

Potom

$$x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = r(t) \cos t (r'(t) \sin t + r(t) \cos t) - r(t) \sin t (r'(t) \cos t - r(t) \sin t) = r(t)^2.$$

Obsah je

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(t)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{1}{2} \cos 3t \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(4 + 2 \cos 3t + \frac{1}{4} \cos^2 3t \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(4 + \frac{1}{4} \cos^2 3t \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(8\pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 3t dt \right) = \frac{1}{2} \left(8\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{33\pi}{8}. \end{aligned}$$

Příklad 4 – obsah kardioidy

Určete obsah oblasti ohraničené křivkou

$$\gamma(t) = [(1 + \cos t) \cos t, (1 + \cos t) \sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Derivace složek jsou

$$x'(t) = -(1 + \cos t) \sin t - \sin t \cos t, \quad y'(t) = -\sin^2 t + (1 + \cos t) \cos t.$$

Obsah je

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} t + 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot 3\pi = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 5 – obsah astroidy

Určete obsah oblasti ohraničené křivkou

$$\gamma(t) = [a \cos^3 t, a \sin^3 t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Derivace složek jsou

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t.$$

Obsah je

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3a^2 \cos^2 t \sin^2 t dt \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt \\ &= \frac{3a^2}{16} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^2}{16} \cdot 2\pi = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$