

Vybrané příklady z diferenciální geometrie – parametrická plocha, tečná rovina, normála a diferenciál

Uvažujme parametrickou plochu $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\sigma(u, v) = [\sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v), \sigma_3(u, v)].$$

Bod s lokálními souřadnicemi $\bar{\mathbf{p}} = [u_0, v_0]$ se zobrazí na bod plochy

$$\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}}) = [\sigma_1(u_0, v_0), \sigma_2(u_0, v_0), \sigma_3(u_0, v_0)].$$

Parciální derivace $\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v)$ určují tečné vektory k ploše. V bodě $\bar{\mathbf{p}}$ dostáváme

$$\begin{aligned}\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) &= (\partial_u \sigma_1(u_0, v_0), \partial_u \sigma_2(u_0, v_0), \partial_u \sigma_3(u_0, v_0)), \\ \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) &= (\partial_v \sigma_1(u_0, v_0), \partial_v \sigma_2(u_0, v_0), \partial_v \sigma_3(u_0, v_0)).\end{aligned}$$

Tyto vektory generují tečný prostor $T_{\mathbf{p}}S$ plochy $S = \sigma(U)$ v bodě \mathbf{p} . Tečná rovina $\mathbf{p} + T_{\mathbf{p}}S$ je potom popsána např. parametrizací

$$\varrho(s, t) = \mathbf{p} + s \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + t \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Normálový vektor plochy v bodě \mathbf{p} určíme pomocí vektorového součinu

$$\mathbf{n} = \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}).$$

Parametrická rovnice normály v bodě \mathbf{p} je

$$\ell(t) = \mathbf{p} + t \mathbf{n}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dále vektory $\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}), \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})$ tvoří sloupce Jacobiho matice

$$\mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) = (\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \quad \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})) = \begin{pmatrix} \partial_u \sigma_1(u_0, v_0) & \partial_v \sigma_1(u_0, v_0) \\ \partial_u \sigma_2(u_0, v_0) & \partial_v \sigma_2(u_0, v_0) \\ \partial_u \sigma_3(u_0, v_0) & \partial_v \sigma_3(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Tato matice popisuje diferenciál $d\sigma_{\bar{\mathbf{p}}}$ zobrazení σ .

Vektor $\bar{\mathbf{v}} \in T_{\bar{\mathbf{p}}}U \simeq \mathbb{R}^2$ se zobrazí na tečný vektor plochy $S = \sigma(U)$ v bodě $\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}})$

$$\mathbf{v} = d\sigma_{\bar{\mathbf{p}}}(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}}.$$

Příklad 1 – tečná rovina, normála a diferenciál

Je dána parametrická plocha

$$\sigma(u, v) = [u, v, u^2 + uv], \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

bod s lokálními souřadnicemi

$$\bar{\mathbf{p}} = [1, 2]$$

a tečný vektor v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ v parametrické rovině

$$\bar{\mathbf{v}} = (2, -1).$$

Určete obraz bodu na ploše, popis tečné roviny a normály v tomto bodě a obraz vektoru $\bar{\mathbf{v}}$.

Obraz bodu na ploše je

$$\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma(1, 2) = [1, 2, 1^2 + 1 \cdot 2] = [1, 2, 3].$$

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u, v) = (1, 0, 2u + v), \quad \sigma_v(u, v) = (0, 1, u).$$

V bodě $\bar{\mathbf{p}} = [1, 2]$ dostáváme

$$\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_u(1, 2) = (1, 0, 4),$$

$$\sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_v(1, 2) = (0, 1, 1).$$

Tečná rovina v bodě \mathbf{p} je dána parametrizací

$$\varrho(s, t) = [1, 2, 3] + s(1, 0, 4) + t(0, 1, 1) = [1 + s, 2 + t, 3 + 4s + t], \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Normálový (obecně ne jednotkový) vektor v bodě \mathbf{p} je

$$\mathbf{n} = \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 4) \times (0, 1, 1) = (-4, -1, 1).$$

Normála v bodě \mathbf{p} má parametrickou rovnici

$$\ell(t) = [1, 2, 3] + t(-4, -1, 1) = [1 - 4t, 2 - t, 3 + t], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jacobiho matice parametrizace je

$$\mathbf{J}_\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u + v & u \end{pmatrix}.$$

V bodě $\bar{\mathbf{p}} = [1, 2]$ tedy dostáváme

$$\mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{J}_\sigma(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obraz vektoru $\bar{\mathbf{v}}$ je

$$\mathbf{v} = d\sigma_{\bar{\mathbf{p}}}(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathbf{v} = (2, -1, 7).$$

Příklad 2 – tečná rovina, normála a diferenciál

Je dána parametrická plocha

$$\sigma(u, v) = [u \cos v, u \sin v, v], \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

bod s lokálními souřadnicemi

$$\bar{\mathbf{p}} = [1, 0]$$

a tečný vektor v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ v parametrické rovině

$$\bar{\mathbf{v}} = (1, 2).$$

Určete obraz bodu na ploše, popis tečné roviny a normály v tomto bodě a obraz vektoru $\bar{\mathbf{v}}$.

Obraz bodu na ploše je

$$\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma(1, 0) = [1, 0, 0].$$

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u, v) = (\cos v, \sin v, 0), \quad \sigma_v(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 1).$$

V bodě $\bar{\mathbf{p}} = [1, 0]$ dostáváme

$$\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 0), \quad \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (0, 1, 1).$$

Tečná rovina v bodě \mathbf{p} je dána parametrizací

$$\varrho(s, t) = [1, 0, 0] + s(1, 0, 0) + t(0, 1, 1) = [1 + s, t, t], \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Normálový (obecně ne jednotkový) vektor v bodě \mathbf{p} je

$$\mathbf{n} = \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 0) \times (0, 1, 1) = (0, -1, 1).$$

Normála v bodě \mathbf{p} má parametrickou rovnici

$$\ell(t) = [1, 0, 0] + t(0, -1, 1) = [1, -t, t], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jacobiho matice parametrizace je

$$\mathbf{J}_\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V bodě $\bar{\mathbf{p}} = [1, 0]$ tedy dostáváme

$$\mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{J}_\sigma(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obraz vektoru $\bar{\mathbf{v}}$ je

$$\mathbf{v} = d\sigma_{\bar{\mathbf{p}}}(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathbf{v} = (1, 2, 2).$$

Příklad 3 – tečná rovina, normála a diferenciál

Je dána parametrická plocha

$$\sigma(u, v) = [u + v, u - v, uv], \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

bod s lokálními souřadnicemi

$$\bar{\mathbf{p}} = [2, 1]$$

a tečný vektor v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ v parametrické rovině

$$\bar{\mathbf{v}} = (3, -1).$$

Určete obraz bodu na ploše, popis tečné roviny a normály v tomto bodě a obraz vektoru $\bar{\mathbf{v}}$.

Obraz bodu na ploše je

$$\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma(2, 1) = [3, 1, 2].$$

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u, v) = (1, 1, v), \quad \sigma_v(u, v) = (1, -1, u).$$

V bodě $\bar{\mathbf{p}} = [2, 1]$ dostáváme

$$\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 1, 1), \quad \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (1, -1, 2).$$

Tečná rovina v bodě \mathbf{p} je dána parametrizací

$$\varrho(s, t) = [3, 1, 2] + s(1, 1, 1) + t(1, -1, 2) = [3 + s + t, 1 + s - t, 2 + s + 2t], \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Normálový (obecně ne jednotkový) vektor v bodě \mathbf{p} je

$$\mathbf{n} = \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 1, 1) \times (1, -1, 2) = (3, -1, -2).$$

Normála v bodě \mathbf{p} má parametrickou rovnici

$$\ell(t) = [3, 1, 2] + t(3, -1, -2) = [3 + 3t, 1 - t, 2 - 2t], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jacobiho matice parametrizace je

$$\mathbf{J}_\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ v & u \end{pmatrix}.$$

V bodě $\bar{\mathbf{p}} = [2, 1]$ tedy dostáváme

$$\mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{J}_\sigma(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Obraz vektoru $\bar{\mathbf{v}}$ je

$$\mathbf{v} = d\sigma_{\bar{\mathbf{p}}}(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathbf{v} = (2, 4, 1).$$

Příklad 4 – tečná rovina, normála a diferenciál

Je dána parametrická plocha

$$\sigma(u, v) = [u \cos v, u \sin v, e^v], \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

bod s lokálními souřadnicemi

$$\bar{\mathbf{p}} = [2, 0]$$

a tečný vektor v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ v parametrické rovině

$$\bar{\mathbf{v}} = (1, -1).$$

Určete obraz bodu na ploše, popis tečné roviny a normály v tomto bodě a obraz vektoru $\bar{\mathbf{v}}$.

Obraz bodu na ploše je

$$\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma(2, 0) = [2, 0, 1].$$

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u, v) = (\cos v, \sin v, 0), \quad \sigma_v(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, e^v).$$

V bodě $\bar{\mathbf{p}} = [2, 0]$ dostáváme

$$\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 0), \quad \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (0, 2, 1).$$

Tečná rovina v bodě \mathbf{p} je dána parametrizací

$$\rho(s, t) = [2, 0, 1] + s(1, 0, 0) + t(0, 2, 1) = [2 + s, 2t, 1 + t], \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Normálový (obecně ne jednotkový) vektor v bodě \mathbf{p} je

$$\mathbf{n} = \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 0) \times (0, 2, 1) = (0, -1, 2).$$

Normála v bodě \mathbf{p} má parametrickou rovnici

$$\ell(t) = [2, 0, 1] + t(0, -1, 2) = [2, -t, 1 + 2t], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jacobiho matice parametrizace je

$$\mathbf{J}_\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & e^v \end{pmatrix}.$$

V bodě $\bar{\mathbf{p}} = [2, 0]$ tedy dostáváme

$$\mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{J}_\sigma(2, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obraz vektoru $\bar{\mathbf{v}}$ je

$$\mathbf{v} = d\sigma_{\bar{\mathbf{p}}}(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathbf{v} = (1, -2, -1).$$