DETERMINANTY

Připomeňme nejdříve pojem permutace. **Permutace konečné množiny** $M = \{1, 2, ..., n\}$ je prosté zobrazení množiny M na sebe. Jestliže v permutaci π je $\pi(i) = r_i$ pro každé $i \in M$, potom zapisujeme $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ r_1 & r_2 & ... & r_n \end{pmatrix}$ nebo zkráceně $\pi = (r_1, r_2, ..., r_n)$.
Na množině, která má n prvků, je $n!$ permutací.

Protože každá permutace je speciálním případem zobrazení, můžeme permutace skládat. Permutace π je složením permutací π_1 a π_2, jestliže pro každé $i \in M$ je $\pi(i) = \pi_2(\pi_1(i))$. Píšeme $\pi = \pi_1\pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$. Skládání permutací není komutativní, t.j. pro většinu permutací $\pi_1\pi_2 \neq \pi_2\pi_1$.

Jestliže $\{r_1, r_2\} \subseteq M = \{1, 2, ..., n\}$, potom permutace π taková, že $\pi(r_1) = r_2$, $\pi(r_2) = r_1$ a pro každé $s \in M \backslash \{r_1, r_2\}$ je $\pi(s) = s$, se nazývá **transpozice množiny** M.

Každá permutace se dá vyjádřit jako složení konečného počtu transpozic. Jestliže permutaci π lze vyjádřit dvěma způsoby jako složení konečného počtu transpozic $\pi = \tau_1\tau_2...\tau_l = \sigma_1\sigma_2...\sigma_m$, kde $\tau_i,\ \sigma_j$ jsou transpozice pro každé $i = 1, ..., l,\ j = 1, ..., m$, potom čísla m a l jsou buď obě sudá, nebo obě lichá.

Permutace se nazývá **sudá**, je-li složením sudého počtu transpozic. Permutace se nazývá **lichá**, je-li složením lichého počtu transpozic. **Znaménko permutace** je 1, je-li permutace sudá, -1, je-li permutace lichá. Píšeme

$$\mathrm{zn}(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{pokud permutace } \pi \text{ je sudá}, \\ -1, & \text{pokud permutace } \pi \text{ je lichá}. \end{cases}$$

Zřejmě platí: $\mathrm{zn}(\pi\psi) = \mathrm{zn}(\pi) \cdot \mathrm{zn}(\psi)$ pro libovolné permutace π, ψ na n-prvkové množině.

Definice:
Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu n nad tělesem T. Potom **determinant matice A** je prvek

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi} \mathrm{zn}(\pi)\ a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

kde sčítáme přes všechny možné permutace π na množině $\{1, 2, ..., n\}$.
Píšeme

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Podle definice počítáme determinanty matic řádu 2, příp. 3.
Pro matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ řádu 2 v definici determinantu sčítáme přes všechny permutace na množině $M = \{1, 2\}$. Na množině M máme jen dvě permutace $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, jejichž znaménka jsou $\mathrm{zn}(\kappa) = 1,\ \mathrm{zn}(\pi) = -1$. Potom

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{zn}(\kappa) a_{1\kappa(1)} a_{2\kappa(2)} + \mathrm{zn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Pro $n = 2$ tedy máme:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

tj. **součin prvků na hlavní diagonále minus součin prvků na vedlejší diagonále**.

Pro matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ řádu 3 v definici determinantu sčítáme přes všechny permutace na množině $\{1, 2, 3\}$. Na tříprvkové množině máme

celkem 6 permutací:
$\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$
$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$
jejichž znaménka jsou $\mathrm{zn}(\kappa) = 1, \mathrm{zn}(\pi) = -1, \mathrm{zn}(\psi) = -1, \mathrm{zn}(\varphi) = -1,$
$\mathrm{zn}(\mu) = 1, \mathrm{zn}(\nu) = 1$. Potom
$\det \mathbf{A} = \mathrm{zn}(\kappa) a_{1\kappa(1)} a_{2\kappa(2)} a_{3\kappa(3)} + \mathrm{zn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)} +$
$\mathrm{zn}(\psi) a_{1\psi(1)} a_{2\psi(2)} a_{3\psi(3)} + \mathrm{zn}(\varphi) a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} a_{3\varphi(3)} +$
$\mathrm{zn}(\mu) a_{1\mu(1)} a_{2\mu(2)} a_{3\mu(3)} + \mathrm{zn}(\nu) a_{1\nu(1)} a_{2\nu(2)} a_{3\nu(3)} =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}.$

Tato metoda výpočtu determinantu matice řádu 3 se nazývá **Sarrusovo pravidlo**:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Poznámka:
Uvědomme si, že Sarrusovo pravidlo se dá užít **pouze** pro determinanty matic řádu 3.
Sarrusovo pravidlo si lze snadno zapamatovat, když si uvědomíme, že tři sčítance se znaménkem + jsou součin prvků na diagonále, součin dvou prvků pod diagonálou s prvkem v pravém horním rohu a součin dvou prvků nad diagonálou s prvkem v levém dolním rohu. Sčítance se znaménkem - získáme analogickým způsobem podle vedlejší diagonály.

Vlastnosti determinantů

1. **Determinant transponované matice**

   Věta:
   Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ platí
   $$\det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A}.$$

   Důsledek
   Vše, co platí pro řádky determinantů, platí i pro sloupce.

2. **Rozvoj determinantu podle řádku, resp. sloupce**
   Vyslovíme důležitou větu o rozvoji determinantu podle i-tého řádku. Protože při transponování se determinant matice nezmění, lze analogicky vyslovit větu o rozvoji determinantu podle i-tého sloupce. Nejdříve ale budeme definovat jeden důležitý pojem.

   Definice:
   Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu n, nechť $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Potom $\mathbf{A}_{ij}$ bude značit matici řádu $n-1$, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ tím, že vynecháme i-tý řádek a j-tý sloupec.
   Prvek $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$ nazýváme **algebraický doplněk matice A k prvku** $a_{i,j}$.

   Věta: (o rozvoji determinantu podle řádku)
   Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu n, nechť i je číslo zvoleného řádku, $1 \leq i \leq n$. Potom

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},$$

   kde pro všechna $k = 1, ..., n$ je A_{ik} algebraický doplněk matice $\mathbf{A}$ k prvku a_{ik} .

   Analogicky lze formulovat rozvoj podle sloupce.

3. **Vzájemná výměna řádků, resp. sloupců**

   Věta: (výměna řádků)
   Vznikne-li čtvercová matice $\mathbf{B}$ řádu n ze čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n vzájemnou výměnou i-tého a j-tého řádku, $i \neq j$, potom

$$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}.$$

   Totéž platí pro sloupce.

Důsledek
Má-li čtvercová matice $\mathbf{A}$ dva řádky stejné, potom $\det \mathbf{A} = 0$.

Protože již víme, že $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$, lze analogicky formulovat větu o výměně i její důsledek také pro sloupce matice. Vyměníme-li tedy dva sloupce matice, determinant změní znaménko; jsou-li v matici dva sloupce stejné, determinant se rovná 0.

4. **Násobek řádku, resp. sloupce, prvkem z tělesa**

Věta: (řádek násobený prvkem)
Jestliže matice $\mathbf{B}$ vznikne ze čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n vynásobením i-tého řádku prvkem $c \in T$, potom

$$\det \mathbf{B} = c \cdot \det \mathbf{A}.$$

Analogické tvrzení platí též pro sloupce.

Důsledek
Je-li v matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ řádu n nulový řádek, tj. existuje-li $i \in \{1, ..., n\}$ takové, že $a_{ij} = 0$ pro každé $j = 1, ..., n$,
potom $\det \mathbf{A} = 0$.

Také tento důsledek lze formulovat pro sloupce.
Uvědomme si, že poslední věta říká, že lze "vytýkat číslo" z jednoho celého řádku nebo jednoho celého sloupce.

5. **Kdy se determinant nezmění!!!**

Věta: (determinant se nezmění!)
Vznikne-li matice $\mathbf{B}$ ze čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n přičtením k-násobku j-tého řádku (tzv. pivotního řádku) k i-tému řádku, kde $k \in T$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, potom

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}.$$

Analogické tvrzení můžeme formulovat i pro sloupce.

ZAPAMATUJME SI !!! Determinant se nezmění, když k řádku (resp. sloupci) přičteme k-násobek pivotního řádku (resp. pivotního sloupce).

6. **Determinant součinu matic**

Věta: (determinant součinu)
Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou čtvercové matice řádu n, potom

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.$$

Důsledek
Existuje-li k matici $\mathbf{A}$ inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$, je

$$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}.$$

Užití determinantů

Metoda určování inverzní matice pomocí determinantů

viz část textu o inverzních maticích

Cramerovo pravidlo pro řešení soustav s regulární maticí, tj. s maticí, která má nenulový determinant

V případě, že matice $\mathbf{A}$ soustavy lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je čtvercová matice, jejíž determinant se nerovná nule, má soustava **právě jedno** řešení.

Věta: (Cramerovo pravidlo)
Nechť $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je soustava lineárních algebraických rovnic s regulární maticí $\mathbf{A}$ řádu n, tj. $\det \mathbf{A} \neq 0$.
Pro každé $i = 1, ..., n$ označme $\mathbf{A}_i$ matici, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ tím, že i-tý sloupec matice $\mathbf{A}$ nahradíme sloupcem $\mathbf{b}$.
Potom pro řešení soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ platí $\mathbf{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$, kde pro každé $i = 1, ..., n$ je

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}.$$

HODNOST MATICE

Definice:
Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je matice typu m/n nad tělesem T. Lineární obal všech řádků matice $\mathbf{A}$ se nazývá **řádkový prostor matice A**. Lineární obal všech sloupců matice $\mathbf{A}$ se nazývá **sloupcový prostor matice A**.
Dimenze řádkového prostoru matice $\mathbf{A}$ se nazývá **řádková hodnost matice A** a značí $\mathrm{hod}^r(\mathbf{A})$. Dimenze sloupcového prostoru matice $\mathbf{A}$ se nazývá **sloupcová hodnost matice A** a značí $\mathrm{hod}^s(\mathbf{A})$.

Je zřejmé, že musí platit $\mathrm{hod}^r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$ a také $\mathrm{hod}^s(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$.

Již z dřívějška víme, že každou matici lze pomocí řádkových elementárních úprav převést na matici ve stupňovitém tvaru (s pivotními prvky 1, resp. v redukovaném stupňovitém tvaru s pivotními prvky 1). Připomeňme definici stupňovitého tvaru matice a zamysleme se, jakou hodnost má matice ve stupňovitém tvaru.

Definice:
Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je ve **stupňovitém tvaru**, jestliže platí: je-li v některém řádku i-tý prvek první nenulový, potom ve všech dalších řádcích jsou všechny prvky od prvního až do i-tého včetně rovny 0.

Je-li matice ve stupňovitém tvaru, potom všechny nenulové řádky jsou lineárně nezávislé, neboť lineární kombinací nul nelze získat nenulové číslo. Tak dostaneme následující větu.

Věta: (řádková hodnost matice ve stupňovitém tvaru)
Řádková hodnost matice ve stupňovitém tvaru je rovna počtu nenulových řádků této matice.

Věta: (úpravy neměnící řádkovou hodnost matice)
Elementární řádkové úpravy matice nemění řádkovou hodnost matice.

Uvedené věty dávají návod, jak určovat řádkovou hodnost matice. Převedeme matici pomocí řádkových elementárních úprav na matici ve stupňovitém tvaru a určíme počet nenulových řádků upravené matice.

Definice:
Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu m/n.
Pro libovolné $r \leq \min\{m,n\}$, pro libovolnou volbu indexů $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq m$ a $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_r \leq n$ budeme determinant matice $\mathbf{A}(k_1, k_2, ..., k_r/l_1, l_2, ..., l_r)$ typu r, kde uvažujeme pouze vybrané řádky a sloupce matice $\mathbf{A}$, nazývat **minor řádu** r.

Věta: (řádková hodnost matice a minory)
Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu m/n.
Řádková hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna k právě tehdy, když existuje nenulový minor řádu k a všechny minory vyšších řádů jsou rovny nule.

Důsledek:
Pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ je $\mathrm{hod}^r(\mathbf{A}) = \mathrm{hod}^r(\mathbf{A}^T)$, a proto také $\mathrm{hod}^r(\mathbf{A}) = \mathrm{hod}^s(\mathbf{A})$.

Definice:
Hodnost matice A je rovna řádkové nebo sloupcové hodnosti matice $\mathbf{A}$.
Píšeme $\mathrm{hod}(\mathbf{A}) = \mathrm{hod}^r(\mathbf{A}) = \mathrm{hod}^s(\mathbf{A})$.

Důsledek:
Jestliže $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n,
potom $\mathrm{hod}(\mathbf{A}) = n$ právě tehdy, když $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Definice:
Čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n se nazývá **regulární matice**, jestliže se její hodnost rovná řádu matice, tj. $\mathrm{hod}(\mathbf{A}) = n$.
Čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n se nazývá **singulární matice**, jestliže se její hodnost nerovná řádu matice, tj. $\mathrm{hod}(\mathbf{A}) \neq n$.

Regulární matici lze pomocí řádkových elementárních úprav převést na matici jednotkovou. Analogické tvrzení platí i pro sloupcové elementární úpravy: regulární matici lze pomocí sloupcových elementárních úprav převést na jednotkovou matici.

Definice:
Matice, která vznikne z jednotkové matice provedením jedné řádkové elementární úpravy, se nazývá **řádková elementární matice**. Matice, která vznikne z jednotkové matice provedením jedné sloupcové elementární úpravy, se nazývá **sloupcová elementární matice**.

Každou řádkovou elementární úpravu matice lze zapsat jako násobení zleva řádkovou elementární maticí a každou sloupcovou elementární úpravu matice lze zapsat jako násobení zprava sloupcovou elementární maticí.

Věta:
Je-li $\mathbf{A}$ libovolná matice a $\mathbf{B}$ matice regulární, potom platí: $\mathrm{hod}(\mathbf{AB}) = \mathrm{hod}(\mathbf{A})$, $\mathrm{hod}(\mathbf{BA}) = \mathrm{hod}(\mathbf{A})$, kdykoliv je součin matic definován.

Obecné tvrzení o hodnosti součinu matic říká, že

$$\mathrm{hod}(\mathbf{AB}) \leq \min\{\mathrm{hod}(\mathbf{A}), \mathrm{hod}(\mathbf{B})\}.$$

INVERZNÍ MATICE

Definice:
Jestliže $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n nad tělesem T, potom čtvercová matice $\mathbf{A}^{-1}$ řádu n nad T se nazývá **inverzní matice** k matici $\mathbf{A}$, jestliže

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice řádu n.

Věta:
Ke čtvercové matici existuje **nejvýše jedna** inverzní matice.

Předcházející věta ale neříká, že by musela inverzní matice existovat ke každé čtvercové matici.

Věta: (o existenci inverzní matice)
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n.
Potom k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice právě tehdy, když matice $\mathbf{A}$ je regulární.

Důkaz této věty dává návod, jak určovat inverzní matici.
Jestliže $\mathbf{A}$ je regulární matice, potom existuje posloupnost řádkových elementárních úprav, které převedou matici $\mathbf{A}$ na matici jednotkovou $\mathbf{I}$, a ty stejné řádkové elementární úpravy převedou jednotkovou matici $\mathbf{I}$ na matici $\mathbf{A}^{-1}$.
Zapíšeme-li vedle sebe matici $\mathbf{A}$ a jednotkovou matici $\mathbf{I}$, a budeme-li provádět na obě matice stejné řádkové elementární úpravy tak dlouho, až z matice $\mathbf{A}$ vznikne matice jednotková, potom z jednotkové matice $\mathbf{I}$ musíme získat matici $\mathbf{A}^{-1}$. Symbolicky zapsáno

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \sim \cdots \sim \left[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}\right].$$

Metoda určování inverzní matice pomocí determinantů

Definice:
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n, potom matice $\mathbf{A}^A$ je transponovaná matice k matici tvořené algebraickými doplňky prvků matice $\mathbf{A}$ a nazývá se **maticí adjungovanou** k matici $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}^A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

kde pro každé $j, k = 1, ..., n$ je $A_{jk} = (-1)^{j+k} \det \mathbf{A}_{(j/k)}$ algebraický doplněk k prvku a_{jk} a matice $\mathbf{A}_{(j/k)}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním j-tého řádku a k-tého sloupce.

Věta:
Je-li čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n regulární,
potom

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^A.$$

Důsledek věty o determinantu součinu matic
Existuje-li k matici $\mathbf{A}$ inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$, je

$$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}.$$