KOMLEXNÍ ČÍSLA

$\mathbf{C} = \{a + bi;\ a, b \in \mathbf{R}\}$, kde $\mathbf{i^2 = -1}$

Číslo komplexně sdružené k $z = a + bi$ je číslo

$$\bar{z} = a - bi.$$

Operace s komplexními čísly:
$z = a + bi$, kde $a, b \in \mathbf{R}$
$v = c + di$, kde $c, d \in \mathbf{R}$

Sčítání

$$z + v = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Odčítání

$$z - v = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Násobení

$$z \cdot v = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Dělení (předpokládáme, že $v \neq 0$)

$$\frac{z}{v} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} . \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Absolutní hodnota komplexního čísla

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Goniometrický tvar komplexního čísla

$$z = a + bi = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ takový, že

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|},\ \sin\varphi = \frac{b}{|z|}.$$

Moivreova věta - umocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Je-li $z = a + bi = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

potom

$$z^n = (a + bi)^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Důsledek Moivreovy věty - n-té odmocniny komplexního čísla

Je-li $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

potom n-odmocninou $\sqrt[n]{z}$ z komplexního čísla z určujeme jako

$$x_{k+1} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

kde $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

POLYNOMY

Definice:
Nechť $\mathbf{C}$ je těleso komplexních čísel, nechť $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$, $a_0 \neq 0$.
Funkce $p\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ definovaná předpisem

$$p(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n$$

se nazývá **polynom (mnohočlen) stupně** n.
Píšeme $\mathrm{st}(p) = n$.
Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se nazývají **koeficienty polynomu** p.

Jestliže pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ je koeficient $a_i \in \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ označuje těleso reálných čísel, mluvíme o **polynomu s reálnými koeficienty**.

Jestliže koeficienty $a_i = 0$ pro každé $i \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$, potom polynom $p(x) = 0$ se nazývá **nulový polynom**.
Pro nulový polynom *není stupeň definován.*

Dva polynomy
$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ a $q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$
se rovnají právě tehdy, když mají stejný stupeň a když se shodují jejich koeficienty u odpovídajících si mocnin nezávisle proměnné x,
tj. pokud $n = m$ a platí rovnosti $a_i = b_i$ pro všechna $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Základní operace s polynomy jsou **sčítání, odčítání, násobení, dělení.**
Pokud polynom $p(x)$ je polynom stupně n a polynom $q(x)$ je polynom stupně m, pak pro stupně výsledných polynomů po provedení jednotlivých operací platí následující vztahy:

$$\mathrm{st}(p+q) \;\leq\; \max\{\mathrm{st}(p), \mathrm{st}(q)\} \;=\; \max\{n, m\}\,,$$

$$\mathrm{st}(p-q) \;\leq\; \max\{\mathrm{st}(p), \mathrm{st}(q)\} \;=\; \max\{n, m\}\,,$$

$$\mathrm{st}(p\,.\,q) \;=\; \mathrm{st}(p) + \mathrm{st}(q) \;=\; n + m\,,$$

$$\mathrm{st}(p : q) \;=\; \mathrm{st}(p) - \mathrm{st}(q) \;=\; n - m\,.$$

Věta: (věta o dělení polynomů se zbytkem)
Jestliže $p(x)$, $q(x)$ jsou dva polynomy (obecně s komplexními koeficienty), polynom $q(x)$ je navíc nenulový,
potom existují a jsou jednoznačně určeny polynomy $s(x)$ a $r(x)$ takové, že

$$p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x),$$

kde pro stupeň polynomu $r(x)$ platí $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(q)$ nebo se jedná o nulový polynom $r(x) = 0$ (je-li zbytek $r(x)$ nulový polynom, nemá stupeň vůbec definován).

Definice:
Číslo $c \in \mathbf{C}$ se nazývá **kořen polynomu** $p(x)$, jestliže

$$p(c) = 0\,.$$

Tedy číslo c (reálné či komplexní) bude kořenem polynomu $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ právě tehdy, když je splněna rovnost

$$a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a_{n-1}c + a_n = 0\,.$$

Někdy je kořen polynomu nazýván *nulovým bodem polynomu*, je to proto, že příslušná funkční hodnota přiřazená polynomem $p(x)$ argumentu $x = c$ je v případu kořene c nulová: $p(c) = 0$.

Věta: (Základní věta algebry)
Každý polynom stupně alespoň 1 má v oboru komplexních čísel alespoň jeden kořen.

Ekvivalentní formulace základní věty algebry:
Každý polynom stupně n, $n \in \mathbf{N}$, má v oboru komplexních čísel právě n kořenů (počítáno včetně jejich násobnosti).

Uvažujme dělení polynomů, kde $p(x)$ je libovolný polynom stupně n, $n \in \mathbf{N}$, a $q(x)$ je polynom prvního stupně, a to speciálního tvaru $q(x) = x - c$, kde $c \in \mathbf{C}$.

Potom podle věty o dělení polynomů se zbytkem existují a jsou jednoznačně určeny polynomy $s(x)$ a $r(x)$ tak, že $p(x) = (x - c) \cdot s(x) + r(x)$, kde $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(x-c) = 1$ nebo $r = 0$. Tedy zbytek je polynom nultého stupně nebo nulový polynom, v obou případech je roven konstantě, proto lze psát: $r(x) = r \in \mathbf{C}$. Tvrzení věty o dělení polynomů lze v tomto speciálním případu přepsat do tvaru

$$p(x) = (x - c) \cdot s(x) + r\,,$$

kde $r \in \mathbf{C}$.

Dosadíme-li do rovnosti, která zřejmě musí platit pro všechna $x \in \mathbf{C}$, za nezávisle proměnnou x číslo c, získáme rovnost $p(c) = (c-c) \cdot s(c) + r$, neboli

$$p(c) = r\,.$$

Zbytkem při tomto dělení polynomu $p(x)$ polynomem $q(x) = x - c$ je právě funkční hodnota polynomu $p(c)$ v bodě $c \in \mathbf{C}$. Rovnost platnou pro toto dělení polynomů tak lze přepsat do tvaru

$$p(x) = (x - c) \cdot s(x) + p(c)\,.$$

Je proto zřejmá platnost tvrzení, že číslo $c \in \mathbf{C}$ je kořenem polynomu $p(x)$ právě tehdy, když polynom $p(x)$ lze dělit polynomem $x - c$ beze zbytku, protože pro kořen c je $p(c) = 0$.
Polynomu $x-c$ prvního stupně říkáme **kořenový činitel** příslušný ke kořenu c.
Tím jsme dokázali následující větu.

Věta: (dělení polynomu kořenovým činitelem)
Je-li $c \in \mathbf{C}$ kořen polynomu $p(x)$, potom platí

$$p(x) = (x - c) \cdot s(x)\,,$$

kde $\mathrm{st}(s) = \mathrm{st}(p) - 1$.

Použijme opakovaně základní větu algebry a větu o dělení polynomu kořenovým činitelem na polynom $p(x)$ stupně n:

- vezměme $c_1 \in \mathbf{C}$ kořen polynomu $p(x)$, potom $p(x) = (x - c_1) \cdot s_1(x)$, kde $\mathrm{st}(s_1) = n - 1$,
- vezměme $c_2 \in \mathbf{C}$ kořen polynomu $s_1(x)$, potom $s_1(x) = (x - c_2) \cdot s_2(x)$, kde $\mathrm{st}(s_2) = n - 2$,
- vezměme $c_3 \in \mathbf{C}$ kořen polynomu $s_2(x)$, potom $s_2(x) = (x - c_3) \cdot s_3(x)$, kde $\mathrm{st}(s_3) = n - 3$,
- atd.
- vezměme $c_n \in \mathbf{C}$ kořen polynomu $s_{n-1}(x)$, potom $s_{n-1}(x) = (x - c_n) \cdot s_n(x)$, kde $\mathrm{st}(s_n) = n - n = 0$ neboli $s_n(x) = s_n$ je polynom nultého stupně.

Tedy polynom $p(x)$ lze zapsat ve tvaru

$$p(x) = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot (x - c_3) \cdot \ \ldots \ \cdot (x - c_n) \cdot s_n \,.$$

Přitom tentýž polynom $p(x)$ lze vyjádřit pomocí jeho koeficientů jako $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$. Z porovnání koeficientů u nejvyšší mocniny x^n je vidět, že $a_0 = s_n$ neboli že polynom $s_n(x) = s_n$ nultého stupně je roven právě koeficientu a_0 u nejvyšší mocniny v zadání polynomu $p(x)$.

Tím je dokázáno tvrzení následující věty.

Věta: (rozklad polynomu na kořenové činitele)
Každý polynom $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ stupně n pro $n \geq 1$ lze v komplexním oboru vyjádřit též ve tvaru

$$p(x) = a_0 \cdot (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \ \ldots \ \cdot (x - c_n) \,,$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{C}$ jsou kořeny polynomu $p(x)$.

Tento zápis polynomu se nazývá **rozklad polynomu na součin kořenových činitelů**.

Protože lze každý polynom stupně alespoň 1 vyjádřit ve tvaru rozkladu na součin kořenových činitelů, je zřejmé, že pro všechny koeficienty polynomu lze určit vztahy, které je vyjadřují pomocí kořenů tohoto polynomu. Tyto vztahy jsou známy jako Viètovy vzorce. V následující větě uvedeme alespoň dva nejednodušší a nejčastěji používané.

Věta: (vybrané Viètovy vzorce)
Jestliže $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ je polynom stupně n s koeficienty z množiny komplexních čísel a jestliže jsou $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{C}$ kořeny tohoto polynomu, potom pro vybrané koeficienty platí vztahy

$$a_n = (-1)^n \cdot a_0 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n ,$$

$$a_1 = -\, a_0 \cdot (c_1 + c_2 + \ldots + c_n) .$$

Důsledek:
Pokud je reálné číslo c kořenem polynomu $p(x)$, musí být tímto číslem dělitelný tzv. absolutní člen a_n polynomu $p(x)$.

Věta: (komplexní kořeny reálných polynomů)
Je-li komplexní číslo $c = a + bi \in \mathbf{C}$ (s nenulovou imaginární částí b) kořenem polynomu $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ s **reálnými koeficienty**, tj. $a_i \in \mathbf{R}$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$,
potom také číslo komplexně sdružené $\bar{c} = a - bi \in \mathbf{C}$ je kořenem polynomu $p(x)$.

Tato věta vlastně říká, že pokud je polynom $p(x)$ stupně n polynom pouze s reálnými koeficienty, pak všechny komplexní kořeny se vyskytují ve dvojicích (vždy kořen c s kořenem komplexně sdruženým $\bar{c}$, kdy oba kořeny mají i tutéž násobnost).

Důsledek:
Každý polynom **lichého stupně** s reálnými koeficienty má alespoň jeden reálný kořen.

Reálný rozklad polynomu.
Uvažujme polynom s reálnými koeficienty.
Jestliže v rozkladu polynomu na kořenové činitele roznásobíme každé dva kořenové činitele, které odpovídají dvojici komplexně sdružených kořenů, získáme **reálný rozklad polynomu**. V tomto rozkladu se kromě kořenových činitelů pro reálné kořeny mohou vyskytovat také kvadratické členy pro dvojice kořenů komplexně sdružených.

V reálném rozkladu polynomu jsou tedy kořenové činitele typu $x - c_i$ pro reálné kořeny $c_i \in \mathbf{R}$ a dále kvadratické trojčleny $x^2 + p_j \cdot x + q_j$, kde $p_j, q_j \in \mathbf{R}$. Kvadratický trojčlen se přitom získá roznásobením kořenových činitelů $(x - c) \cdot (x - \bar{c})$ pro konkrétní dvojici komplexně sdružených kořenů c a $\bar{c}$.
Případná mocnina u jednotlivých činitelů v rozkladu udává násobnost příslušných reálných či komplexních kořenů.

Hornerovo schéma
Dělení polynomu $p(x)$ polynomem $x - c$ lze jednoduše zapsat do tabulky. Tento způsob dělení polynomu polynomem prvního stupně typu $x - c$ bývá nazýván **Hornerovo schéma**.

Označme $p(x) = (x - c) \cdot s(x) + r$, kde
$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$,
$s(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$.

Dělení polynomů lze zapsat do tabulky takto:

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & & a_n \\
c & & c \cdot b_0 & c \cdot b_1 & c \cdot b_2 & \cdots & c \cdot b_{n-2} & & c \cdot b_{n-1} \\
\hline
 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & | & r
\end{array}
$$

přičemž pro jednotlivé koeficienty podílu $s(x)$ a zbytek r platí následující rovnosti, které lze odvodit právě ze vztahu $p(x) = (x - c) \cdot s(x) + r$:

$$b_0 = a_0 \,,$$

$$b_1 = a_1 + c \cdot b_0 \,,$$

$$b_2 = a_2 + c \cdot b_1\,,$$
$$\dots\,,$$
$$b_{n-1} = a_{n-1} + c \cdot b_{n-2}\,,$$
$$r = a_n + c \cdot b_{n-1}\,.$$

Poznámka:
Hornerovo schéma je nejvýhodnější prostředek k **určování funkční hodnoty polynomu pro daný argument**. Víme již, že funkční hodnota polynomu $p(x)$ v bodě c je rovna zbytku r při dělení polynomu $p(x)$ polynomem $x - c$:
$$r = p(c)\,.$$
V případě polynomu $p(x)$ stupně n vyžaduje vyplnění Hornerova schématu pro dané číslo c (argument funkce) provést n součtů a n násobení, celkem tedy $2n$ operací. S řádově $2n$ početními operacemi je Hornerovo schéma nejefektivnější metodou pro určení funkční hodnoty polynomu v daném bodě.

Příklad:
Pro polynom
$$p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x + 4$$
určeme s využitím Hornerova schématu funkční hodnoty $p(-1)$, $p\left(-\frac{1}{2}\right)$, $p(i)$.

Nejprve vyplníme Hornerovo schéma pro polynom $p(x)$ a číslo $c = -1$. První řádek tabulky je určen koeficienty polynomu $p(x)$ (všemi koeficienty včetně nulových!), dále je zadána konstanta c:

$$\begin{array}{r|cccc|c} & 3 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & & c \cdot b_3 & c \cdot b_2 & c \cdot b_1 & c \cdot b_0 \\ \hline & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & r \end{array}$$

Tabulku nyní doplníme podle vztahů, které lze najít v odstavci věnovaném Hornerovu schématu:

$$\begin{array}{r|cccc|c} & 3 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & & -3 & 5 & -5 & 3 \\ \hline & 3 & -5 & 5 & -3 & 7 \end{array}$$

Protože jsme dostali zbytek $r = 7$, známe již funkční hodnotu $p(-1) = r = 7$ pro zadaný polynom $p(x)$.

Pro $c = -\frac{1}{2}$ se vyplní Hornerovo schéma stejným způsobem:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 3 & -2 & 0 & 2 & 4 \\
-\frac{1}{2} & & -\frac{3}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{7}{8} & -\frac{9}{16} \\
\hline
 & 3 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{4} & \frac{9}{8} & | \quad \frac{55}{16}
\end{array}$$

Hledaná funkční hodnota je $p\left(-\frac{1}{2}\right) = r = \frac{55}{16}$.

Zbývá ještě určit funkční hodnoty polynomu $p(x)$ pro argument z komplexního oboru, pro imaginární jednotku $c = i$:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 3 & -2 & 0 & 2 & 4 \\
i & & 3i & -3-2i & 2-3i & 3+4i \\
\hline
 & 3 & -2+3i & -3-2i & 4-3i & | \quad 7+4i
\end{array}$$

Vidíme, že $p(i) = 7 + 4i$, protože toto je zbytek v Hornerově schématu vyplněném pro polynom $p(x)$ a číslo $c = i$.

Z faktu, že zbytek v Hornerově schématu se rovná funkční hodnotě polynomu pro argument c, vychází i využití Hornerova schématu při ověřování, zda dané číslo c je či není kořenem polynomu $p(x)$. Pro kořen c musí být funkční hodnota $p(c)$ nulová neboli zbytek $r = p(c)$ se musí rovnat nule. Hornerovo schéma je opět použitelné jak pro číslo c reálné, tak i pro číslo c komplexní.

Příklad:
Určete všechny kořeny polynomu $p(x)$ a napište rozklad polynomu $p(x)$ na součin kořenových činitelů a reálný rozklad polynomu $p(x)$:

$$p(x) = x^5 - 23x^3 + 30x^2 + 76x - 120\,.$$

Nejdříve se pokusíme najít všechny celočíselné kořeny polynomu $p(x)$. Víme, že tyto kořeny musí dělit absolutní člen polynomu, tedy v našem případě koeficient $a_5 = -120$. Celými čísly, která mohou být kořeny zadaného polynomu, jsou proto celočíselní dělitelé čísla -120, konkrétně čísla

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 40, \pm 60, \pm 120.$$

K ověření, zda číslo c je nebo není kořenem polynomu $p(x)$, použijeme rovnou Hornerovo schéma. Nahrazuje totiž dělení polynomu $p(x)$ polynomem prvního stupně $x - c$, v posledním řádku tabulky dostáváme koeficienty "podílu"těchto polynomů a v posledním sloupečku ještě zbytek, který je současně funkční hodnotou $p(c)$. Je-li číslo c kořenem polynomu $p(x)$, je zbytek $r = p(c) = 0$, polynom $p(x)$ proto umíme rozložit na součin kořenového činitele $x - c$ a polynomu, který je jejich podílem. Platí tedy:

$$p(x) = (x - c) \cdot s(x)\,.$$

Do tabulky, kde sloupce odpovídají jednotlivým mocninám proměnné x, napíšeme do prvního řádku všechny koeficienty polynomu $p(x)$ včetně nulových. Tabulku doplníme nejdříve pro číslo $c = 1$:

$$\begin{array}{c|rrrrcr}
 & 1 & 0 & -23 & 30 & 76 & & -120 \\
1 & & 1 & 1 & -22 & 8 & & 84 \\ \hline
 & 1 & 1 & -22 & 8 & 84 & | & -36
\end{array}$$

Z této tabulky vidíme, že zbytek $r = p(1) = -36$ je nenulové číslo, proto číslo $c = 1$ není kořenem polynomu $p(x)$.
Jako další vyzkoušíme číslo $c = -1$, využijeme opět Hornerovo schéma.

$$\begin{array}{c|rrrrrcr}
 & 1 & 0 & -23 & 30 & 76 & & -120 \\
-1 & & -1 & 1 & 22 & -52 & & -24 \\ \hline
 & 1 & -1 & -22 & 52 & 24 & | & -144
\end{array}$$

Z této tabulky vidíme, že zbytek $r = p(-1) = -144$ je nenulové číslo, proto ani číslo $c = -1$ není kořenem polynomu $p(x)$.
Dále vyzkoušíme číslo $c = 2$, využijeme opět Hornerovo schéma.

$$\begin{array}{c|rrrrrr}
 & 1 & 0 & -23 & 30 & 76 & -120 \\
2 & & 2 & 4 & -38 & -16 & -120 \\ \hline
 & 1 & 2 & -19 & -8 & 60 \;| & 0 \\
2 & & 2 & 8 & -22 & -60 & \\ \hline
 & 1 & 4 & -11 & -30 \;| & 0 & \\
2 & & 2 & 12 & 2 & & \\ \hline
 & 1 & 6 & 1 \;| & -28 & &
\end{array}$$

Pro číslo 2 jsme použili tzv. **opakované Hornerovo schéma**. Tím, že v první tabulce vyšel zbytek nulový, víme, že číslo 2 je kořenem polynomu $p(x)$. My ale potřebujeme zároveň zjistit, jakou má tento kořen násobnost. Proto pokračujeme v tabulce, kde se ale zmenšuje počet sloupců, s nimiž počítáme. S opakováním Hornerova schématu skončíme, pokud dostaneme nenulový zbytek. V Hornerově schématu jsme dvakrát získali zbytek 0, potřetí již bylo zbytkem nenulové číslo. Proto je číslo 2 dvojnásobným kořenem polynomu $p(x)$, a samotný polynom $p(x)$ umíme rozložit na součin příslušného kořenového činitele $x - 2$ ve druhé mocnině (mocnina vyjadřuje násobnost) a polynomu $p_1(x)$, jehož koeficienty nalezneme v tom řádku tabulky, kde jsme naposledy dostali nulový zbytek:

$$p(x) = (x-2)^2 \cdot p_1(x) =$$
$$= (x-2)^2 \cdot (x^3 + 4x^2 - 11x - 30).$$

Je zřejmé, že všechny další kořeny polynomu $p(x)$ musí být již pouze kořeny polynomu $p_1(x)$, proto další Hornerovo schéma budeme počítat pro polynom $p_1(x)$ a číslo $c = -2$.

	1	4	−11	−30
−2		−2	−4	30
	1	2	−15	0

Číslo $c = -2$ je skutečně kořenem polynomu $p_1(x)$, a tedy i polynomu $p(x)$. Protože nulovému zbytku v posledním řádku tabulky předchází absolutní člen polynomu-"podílu" -15, který není dělitelný dvěma, je číslo $c = -2$ pouze jednonásobným kořenem. Zadaný polynom $p(x)$ má proto dílčí rozklad:

$$p(x) = (x-2)^2 \cdot (x+2) \cdot (x^2 + 2x - 15).$$

Zbylé dva kořeny polynomu $p(x)$ jsou kořeny kvadratického polynomu $p_2(x) = x^2 + 2x - 15$. K jejich určení využijeme například vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{64}}{2} = -1 \pm 4\,,$$

tedy $x_1 = 3$ a $x_2 = -5$. Známe již všechny kořeny polynomu $p(x)$, můžeme proto napsat rozklad polynomu na součin kořenových činitelů:

$$p(x) = (x-2)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-3) \cdot (x+5)\,.$$

Protože polynom $p(x)$ má pouze reálné kořeny, je rozklad na kořenové činitele zároveň i reálným rozkladem tohoto polynomu.

Příklad:
Určete všechny kořeny polynomu $p(x)$ a napište rozklad polynomu $p(x)$ na součin kořenových činitelů a reálný rozklad polynomu $p(x)$:

$$p(x) = x^7 + 5x^6 + 5x^5 + x^4 + 7x^3 - 13x^2 + 3x - 9.$$

Nejdříve se pokusíme najít všechny celočíselné kořeny polynomu $p(x)$. Víme, že tyto kořeny musí dělit absolutní člen polynomu, tedy v našem případě koeficient $a_7 = -9$. Celými čísly, která mohou být kořeny zadaného polynomu, jsou proto celočíselní dělitelé čísla -9, tj. čísla

$$\pm 1, \pm 3, \pm 9.$$

K ověření, zda číslo c je nebo není kořenem polynomu $p(x)$, použijeme opět Hornerovo schéma, které nahrazuje dělení polynomu $p(x)$ polynomem prvního stupně $x - c$.
Nejdříve vyzkoušíme číslo $c = 1$, využijeme Hornerovo schéma.

	1	5	5	1	7	−13	3	−9
1		1	6	11	12	19	6	9
	1	6	11	12	19	6	9	0
1		1	7	18	−46	30	36	
	1	7	18	46	30	36	45	

Pro číslo 1 jsme použili tzv. **opakované Hornerovo schéma**. Tím, že v první tabulce vyšel zbytek nulový, víme, že číslo 1 je kořenem polynomu $p(x)$. Při zjišťování násobnosti už druhý zbytek byl nenulový. Číslo 1 je tedy jednonásobným kořenem polynomu $p(x)$, a samotný polynom $p(x)$ umíme rozložit na součin příslušného kořenového činitele $x - 1$ a polynomu $p_1(x)$, jehož koeficienty nalezneme v tom řádku tabulky, kde byl naposledy nulový zbytek:

$$p(x) = (x-1) \cdot p_1(x) = (x-1) \cdot (x^6 + 6x^5 + 11x^4 + 12x^3 + 19x^2 + 6x + 9).$$

Jako další vyzkoušíme číslo $c = -1$, využijeme opět Hornerovo schéma, ale jen pro polynom $p_1(x)$.

	1	6	11	12	19	6	9
−1		−1	−5	−6	−6	−13	7
	1	5	6	6	13	−7	16

Z této tabulky vidíme, že zbytek $r = p_1(-1) = 16$ je nenulové číslo, proto číslo $c = -1$ není kořenem ani polynomu $p_1(x)$, ani polynomu $p(x)$.
Dále zkusíme číslo $c = 3$, využijeme Hornerovo schéma pro polynom $p_1(x)$.

	1	6	11	12	19	6	9
3		3	27	114	378	1191	3591
	1	9	38	126	397	1197	3600

Z této tabulky vidíme, že zbytek $r = p_1(3) = 3600$ je nenulové číslo, proto číslo $c = 3$ není kořenem ani polynomu $p_1(x)$, ani polynomu $p(x)$.
Zkusíme další číslo $c = -3$.

	1	6	11	12	19	6	9
-3		-3	-9	-6	-18	-3	-9
	1	3	2	6	1	3	0
-3		-3	0	-6	0	-3	
	1	0	2	0	1	0	

Číslo $c = -3$ je kořenem polynomu $p_1(x)$, a tedy i polynomu $p(x)$. Protože jsme v opakovaném Hornerově schématu dvakrát dostali zbytek nulový, je číslo -3 kořenem násobnosti 2. Polynom $p(x)$ umíme dále rozložit:

$$p(x) = (x-1) \cdot (x+3)^2 \cdot (x^4 + 2x^2 + 1).$$

Použijeme-li vzorec pro $(a+b)^2$, lze polynom zapsat jako

$$p(x) = (x-1) \cdot (x+3)^2 \cdot (x^2+1)^2.$$

Protože kvadratický polynom x^2+1 má pouze komplexní kořeny $+i$ a $-i$, má také polynom $p_2(x) = (x^2+1)^2 = (x-i)^2 \cdot (x+i)^2$ pouze kořeny - komplexně sdružená čísla $+i$ a $-i$. Oba tyto komplexní kořeny mají násobnost 2, což vidíme z druhé mocniny u kořenového činitele.
Známe již všechny kořeny zadaného polynomu. Rozklad na kořenové činitele je proto vyjádření polynomu ve tvaru

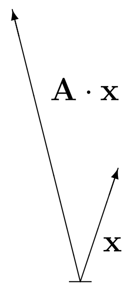
$$p(x) = (x-1) \cdot (x+3)^2 \cdot (x-i)^2 \cdot (x+i)^2.$$

Reálný rozklad je

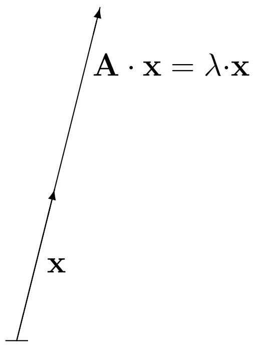
$$p(x) = (x-1) \cdot (x+3)^2 \cdot (x^2+1)^2.$$

VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY MATICE, JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

Uvažujme čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu n a vektor (orientovanou úsečku) $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$ algebraicky popsaný pomocí uspořádané n-tice reálných čísel. Obecně nelze určit žádný geometrický vztah mezi vektorem $\mathbf{x}$ a vektorem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, tj. vektor $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ se může od vektoru $\mathbf{x}$ lišit jak směrem, tak i velikostí, a také svojí orientací.
Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ lze ale najít takové nenulové vektory $\mathbf{x}$, že oba vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ mají tentýž směr, neboli že vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ jsou jeden násobkem druhého. A právě vědět, kdy tato situace nastává, je důležité při řešení řady problémů z praxe, které lze popsat pomocí soustav diferenciálních rovnic, neboli u tzv. dynamických procesů.



Obr.1a)



Obr.1b)

Obrázek 1a) vystihuje obecnou situaci, kdy nenulový vektor $\mathbf{x}$ není vlastním vektorem k žádnému vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$. Na obrázku 1b) je znázorněna situace, kdy vektor $\mathbf{x}$ je vlastním vektorem k vlastnímu číslu λ matice $\mathbf{A}$, proto oba vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ mají stejný směr.

Definice:
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n.
Číslo λ se nazývá **vlastní číslo**, příp. **charakteristické číslo matice A**, pokud existuje **nenulový** vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$ takový, že platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}\,.$$

Pokud je λ vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, každý **nenulový** vektor $\mathbf{h} \in \mathbf{R}_n$, který splňuje rovnost $\lambda \cdot \mathbf{h} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{h}$, se nazývá **vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu** λ.
Množině všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ se říká **spektrum matice A** a značí se $\sigma(\mathbf{A})$.

Uvažujme čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu n. Definice vlastního čísla matice $\mathbf{A}$ říká, že je to takové číslo λ, ke kterému existuje **nenulový vektor** $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$ tak, že platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} .$$

Z této rovnosti vycházíme při odvození vztahu, který umožňuje určení vlastních čísel matice. Výše uvedenou rovnost lze přepsat následujícím způsobem:

$$\lambda \cdot \mathbf{x} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} ,$$

$$\lambda \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} ,$$

$$(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} ,$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice řádu n.

Poslední rovnost je přitom maticový zápis homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic s maticí soustavy $\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}$. Nás zajímá pouze situace, kdy tato soustava bude mít nenulová řešení. To znamená, že se musí jednat o homogenní soustavu s nekonečně mnoha řešeními, tedy o soustavu se singulární maticí soustavy. To bude splněno, pokud determinant matice soustavy se bude rovnat nule:

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 .$$

K výpočtu vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ proto využíváme tzv. **charakteristický polynom** $\varphi(\lambda)$ **matice A** (s proměnnou λ), definovaný jako

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) .$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou právě všechny kořeny charakteristického polynomu

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) .$$

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Pokud jsme pomocí charakteristického polynomu $\varphi(\lambda)$ určili všechna vlastní čísla λ_1, λ_2, $\ldots \lambda_n$ matice $\mathbf{A}$, nalezneme ke každému vlastnímu číslu příslušné vlastní vektory jako řešení homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic:

Jestliže λ_i je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ (pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$),
potom vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu λ_i jsou **nenulová** řešení homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic

$$(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Protože řešená homogenní soustava má v případě vlastního čísla λ_i singulární matici soustavy $(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})$, má tato soustava vždy nekonečně mnoho řešení. Všechna řešení soustavy jsou přitom prvky podprostoru prostoru $\mathbf{R}_n$, jehož dimenze je určena rozdílem

$$n - \mathrm{hod}(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})\,.$$

Vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu λ_i jsou všechna nenulová řešení soustavy, všechny nenulové prvky výše uvedeného podprostoru. Bývá zvykem jako vlastní vektory k vlastnímu číslu λ_i uvádět pouze prvky určující jednu konkrétní bázi podprostoru všech řešení homogenní soustavy $(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, a samozřejmě se předpokládá, že dalšími vlastními vektory mohou být i všechny prvky z $\mathbf{R}_n$, které lze vyjádřit jako **netriviální** lineární kombinaci prvků této báze.

Vlastní vektory příslušné k různým vlastním číslům jsou vždy lineárně nezávislé, jak ukazuje tvrzení následující věty.

Věta: (lineární nezávislost vlastních vektorů)
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n.
Pokud ke každému z **navzájem různých** vlastních čísel λ_i matice $\mathbf{A}$ vybereme vlastní vektor $\mathbf{h}_i$, jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Pro dvojice čtvercových matic téhož řádu lze nadefinovat jednu vlastnost, a to podobnost matic, která umožňuje rozdělit čtvercové matice do skupin tak, že v jedné skupině jsou vždy takové matice, pro něž je společná řada důležitých spektrálních vlastností.

Definice:
Řekneme, že dvě čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ řádu n jsou **podobné matice**, jestliže existuje regulární matice $\mathbf{T}$ řádu n taková, že platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^{-1}\,.$$

Poznámka:
Pokud platí pro matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a vhodnou regulární matici $\mathbf{T}$ vztah $\mathbf{A} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{T}^{-1}$, je možné tuto rovnost zleva vynásobit inverzní maticí $\mathbf{T}^{-1}$ k matici $\mathbf{T}$ a zprava samotnou maticí $\mathbf{T}$. Tím dostaneme rovnost

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T}$$

neboli

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{B}\,.$$

Platí tak i rovnost $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{T}^{-1})^{-1}$, což ukazuje, že vztah podobnosti matic je symetrický.

Podobnost matic je důležitá tím, že spojuje matice, které mají shodné některé podstatné vlastnosti, například se jedná o charakteristický polynom a vlastní čísla matice.

Věta: (vlastní čísla podobných matic)
Podobné matice mají stejné charakteristické polynomy, a tedy i stejná vlastní čísla.

Poznámka:
Implikaci ve větě o vlastních číslech podobných matic nelze obrátit, t.j. jestliže dvě matice mají stejné charakteristické polynomy, nemusí to ještě být podobné matice.

Jako příklad můžeme uvést jednotkovou matici $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ řádu 3 a ma-

tici $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Charakteristické polynomy obou těchto matic jsou stejné:
$\varphi_{\mathbf{I}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{I}) = (\lambda - 1)^3, \quad \varphi_{\mathbf{M}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{M}) = (\lambda - 1)^3.$
Ale přesto nejsou tyto matice podobné. Pro každou regulární matici $\mathbf{T}$ řádu 3 totiž platí rovnost $\mathbf{T} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}$, odkud vyplývá, že jednotková matice $\mathbf{I}$ je podobná pouze sama se sebou.

Rozhodnutí, zda jsou dvě matice podobné, či nikoli, lze učinit až na základě Jordanova kanonického tvaru těchto matic. Matice jsou podobné, pokud mají stejný Jordanův kanonický tvar.

Vlastnost podobnosti matic rozděluje všechny čtvercové matice do skupin, přesný matematický pojem je třídy ekvivalence. V každé třídě ekvivalence jsou obsaženy všechny matice, které jsou si podobné, přesněji:
je-li $\mathbf{A}$ čtvercová matice řádu n, jsou ve stejné třídě ekvivalence všechny matice řádu n, které jsou podobné matici $\mathbf{A}$.
Přitom lze v každé takové třídě ekvivalence vybrat matici, která je z navzájem si podobných matic v jistém smyslu nejjednodušší, tj. má nejméně nenulových prvků. Tato matice se značí $\mathbf{J}$ a nazývá se **Jordanův kanonický tvar matice A**.

Nejjednodušším tvarem pro Jordanův kanonický tvar je diagonální matice, ta má nenulové prvky jen na diagonále. Příkladem matice s diagonálním Jordanovým kanonickým tvarem je matice,která má navzájem různá vlastní čísla.

Věta: (podobnost matic A a J)
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n s n navzájem různými vlastními čísly $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
Ke každému vlastnímu číslu λ_i zvolme vlastní vektor $\mathbf{h}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Potom platí rovnost

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}^{-1},$$

kde matice $\mathbf{J} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ je diagonální matice s vlastními čísly $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ na diagonále a regulární matice $\mathbf{T} = [\mathbf{h}_1 | \mathbf{h}_2 | \cdots | \mathbf{h}_n]$ se skládá po sloupcích z příslušných vlastních vektorů $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n$.

Matice **J** se nazývá **Jordanův kanonický tvar matice A**, ve výše uvedené větě byla sestavena pro jednoduchá vlastní čísla (tj. kořeny charakteristického polynomu s násobností 1).

Poznámka:
V Jordanově matici **J** lze na diagonále zvolit pořadí vlastních čísel libovolně, ale této volbě musí potom odpovídat umístění vlastních vektorů v matici **T**.

Tvrzení:
Protože matice **T** je vždy regulární, je matice **A** singulární právě tehdy, když je singulární Jordanova matice **J**. To nastane právě tehdy, když matice **A** má nulové vlastní číslo $\lambda_i = 0$.

Víme již, že Jordanův kanonický tvar **J** čtvercové matice **A** je diagonální matice, pokud matice **A** má navzájem různá vlastní čísla. Jak ale bude vypadat Jordanův kanonický tvar **J** matice **A**, která má vícenásobná vlastní čísla?

Věta: (diagonální Jordanův kanonický tvar matice)
Čtvercová matice **A** řádu n je podobná diagonální matici **J** právě tehdy, když matice **A** má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Všimněme si, že tvrzení věty je ve tvaru ekvivalence, neboli že požadavek existence k lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných ke k-násobnému vlastnímu číslu, platí-li pro všechna vlastní čísla matice **A**, je nejen postačující, ale i nutnou podmínkou pro diagonalitu Jordanova kanonického tvaru matice **A**.

Zůstává před námi otázka, jak vypadá Jordanův kanonický tvar matice v situaci, kdy k vlastnímu číslu o násobnosti k existuje méně než k lineárně nezávislých vlastních vektorů. Začneme u konkrétního příkladu (viz skripta LA).

Ukážeme, jak vypadá Jordanova kanonická matice, pokud neexistuje tolik lineárně nezávislých vlastních vektorů, jaký je řád matice.

Určeme Jordanovu kanonický tvar $\mathbf{J}$ a matici podobnosti $\mathbf{T}$ matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \\ 13 & -1 & 12 \end{bmatrix}.$$

Nejdříve určíme vlastní čísla matice $\mathbf{A}$:
$\varphi(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 10)(\lambda - 1)^2$.
Matice $\mathbf{A}$ má jednoduché vlastní číslo $\lambda_1 = 10$ a dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{2,3} = 1$.
Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 10$ je vlastním vektorem libovolný nenulový násobek vektoru $\mathbf{h}_1 = [0, 2, 1]^T$.
Pro dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{2,3} = 1$ hledáme vlastní vektory jako nenulová řešení soustavy $(1 \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$[(1 \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -10 & -2 & -14 & 0 \\ -13 & 1 & -11 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Nalezneme tedy pouze jeden lineárně nezávislý vlastní vektor příslušný dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{2,3} = 1$. Vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu $\lambda_{2,3} = 1$ je libovolný nenulový násobek vektoru $\mathbf{h}_2 = [-1, -2, 1]^T$. Jordanova matice $\mathbf{J}$ není diagonální, protože nemáme tři, ale pouze dva lineárně nezávislé vlastní vektory.

Vezmeme-li Jordanovu matici ve tvaru $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, potom potřebujeme najít matici $\mathbf{T}$ tak, aby $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}^{-1}$. Tuto rovnost lze přepsat jako $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J}$. Jestliže se matice $\mathbf{T}$ bude skládat ze sloupců $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$, potom pro tyto sloupce musí platit

$$\begin{array}{rlcrl} \mathbf{A} \cdot \mathbf{h}_1 = & 10 \cdot \mathbf{h}_1, & & (10\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{h}_1 = & \mathbf{0}, \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{h}_2 = & 1 \cdot \mathbf{h}_2, & \text{tedy} & (1\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{h}_2 = & \mathbf{0}, \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{h}_3 = & \mathbf{h}_2 + 1 \cdot \mathbf{h}_3, & & (1\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{h}_3 = & -\mathbf{h}_2. \end{array}$$

Vektor $\mathbf{h}_1$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 10$, tedy např. $\mathbf{h}_1 = [0, 2, 1]^T$. Vektor $\mathbf{h}_2$ je vlastní vektor příslušný dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{2,3} = 1$, tedy např. $\mathbf{h}_2 = [-1, -2, 1]^T$. Vektor $\mathbf{h}_3$ je řešením nehomogenní soustavy rovnic s maticí $(1 \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})$ a pravou stranou $-\mathbf{h}_2$, je to tzv. **zobecněný vlastní vektor**.

$$[1 \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}| - \mathbf{h}_2] = \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & 2 & 1 \\ -10 & -2 & -14 & 2 \\ -13 & 1 & -11 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vektor $\mathbf{h}_3$ je např. $\mathbf{h}_3 = [0, -1, 0]^T$ (nehomogenní soustava má nekonečně mnoho řešení, my jedno libovolně vybereme). Matice $\mathbf{T}$ je potom matice

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Všimněte si, že matice $\mathbf{T}$ je regulární. Také platí rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}^{-1}$.

V příkladu jsme vyřešili situaci, kdy k dvojnásobnému vlastnímu číslu λ nebylo možné vybrat dva lineárně nezávislé vlastní vektory.

Uvažujme ještě jeden podobný případ.
Je-li matice $\mathbf{A}$ čtvercová matice řádu 2 s **jediným dvojnásobným** vlastním číslem λ, z požadavku na singularitu matice $\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}$ vyplývá, že k tomuto vlastnímu číslu lze vybrat pouze jeden lineárně nezávislý vlastní vektor $\mathbf{h}_1$. Jordanův kanonický tvar $\mathbf{J}$ matice $\mathbf{A}$ nemůže být diagonální matice (viz diagonalita Jordanova kanonického tvaru), v matici $\mathbf{J}$ bude opět jeden prvek 1 mimo hlavní diagonálu:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

K ověření podobnosti matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{J}$ potřebujeme najít takovou regulární matici $\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1 | \mathbf{t}_2]$, pro kterou bude platit rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}^{-1}$. Tuto rovnost lze přepsat do tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J}$ neboli

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{t}_1 | \mathbf{t}_2] = [\mathbf{t}_1 | \mathbf{t}_2] \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Roznásobení znamená pro sloupce matice $\mathbf{T}$ požadavek splnění rovností

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_1 &= \lambda \cdot \mathbf{t}_1 \,, \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_2 &= \mathbf{t}_1 + \lambda \cdot \mathbf{t}_2 \,. \end{aligned}$$

První rovnost je shodná s požadavkem z definice vlastních čísel a vlastních vektorů, sloupec $\mathbf{t}_1$ je tedy právě vlastním vektorem k vlastnímu číslu λ neboli $\mathbf{t}_1 = \mathbf{h}_1$. Druhou rovnost zapíšeme ve tvaru

$$(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{t}_2 = -\,\mathbf{t}_1 \,,$$

což je maticový zápis nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic. Protože matice nehomogenní soustavy se shoduje s maticí homogenní soustavy používané při určování vlastních vektorů, jedná se o singulární matici, řešená soustava tak má nekonečně mnoho řešení. Za druhý sloupec matice $\mathbf{T}$ vybereme jedno libovolné řešení $\mathbf{h}_2$, je to vlastně jedno partikulární řešení nehomogenní soustavy $(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{t}_2 = -\mathbf{t}_1$. Vybrané řešení $\mathbf{h}_2$ se nazývá **zobecněný vlastní vektor** příslušný k vlastnímu číslu λ.

V případě vícenásobných vlastních čísel matice lze analogickým způsobem určovat celé řetězce zobecněných vlastních vektorů - viz následující definice.

Definice:
Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n, nechť λ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$.
Uspořádaná k-tice vektorů

$$\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k$$

se nazývá **řetězec zobecněných vlastních vektorů** matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ, jestliže platí

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{h}_1 = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{h}_1 \neq \mathbf{0},$$

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{h}_2 = -\mathbf{h}_1,$$

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{h}_3 = -\mathbf{h}_2,$$

$$\vdots$$

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{h}_k = -\mathbf{h}_{k-1}.$$

Vektor $\mathbf{h}_1$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ,
pro každé $j = 2, 3, \ldots, k$ se vektor $\mathbf{h}_j$ nazývá j-tý zobecněný vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ.
Počet vektorů v řetězci, t.j. číslo k, se nazývá **délka řetězce**.

Poznámka:
Vektory $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k$ z řetězce zobecněných vlastních vektorů jsou lineárně nezávislé.

Víme již, že v případě *dvojnásobného vlastního čísla* mohou pro Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$ řádu $n \geq 3$ nastat pouze dvě možnosti:
buď k uvažovanému vlastnímu číslu existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory a hledaná matice je alespoň ve své části odpovídající tomuto vlastnímu číslu diagonální (přitom se musí jednat o matici $\mathbf{A}$ řádu alespoň tři),

anebo lze určit pouze jeden lineárně nezávislý vlastní vektor a v Jordanově matici bude mimo diagonálu jeden prvek 1.

Obecně u matic vyššího řádu s vícenásobnými vlastními čísly může být situace pochopitelně komplikovanější. Není-li Jordanovým kanonickým tvarem **J** matice **A** matice diagonální, tj. neshoduje-li se počet lineárně nezávislých vlastních vektorů s řádem matice, matice **J** se získá tak, že na její diagonálu skládáme tzv. **Jordanovy bloky** (někdy nazývané též **Jordanova pole**). Nejprve si vysvětleme, jak takový Jordanův blok obecně vypadá, a pak se vraťme o otázce počtu bloků a jejich velikosti pro vícenásobná vlastní čísla.

Jordanův blok velikosti k (nebo také **Jordanovo pole velikosti** k) je část matice o k řádcích a k sloupcích, kde vlastní číslo λ_i vyplní hlavní diagonálu, první "rovnoběžka nad hlavní diagonálou"je vyplněna jedničkami a ostatní prvky jsou nulové:

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Jordanovým kanonickým tvarem matice v obecném případě je matice, která se skládá z jednotlivých Jordanových bloků umístěných na její diagonále.

Jednonásobným vlastním číslům přísluší vždy Jordanovy bloky velikosti 1, což odpovídá tomu, co již bylo řečeno dříve o jednonásobných vlastních číslech.

Počet Jordanových bloků, které v Jordanově kanonickém tvaru přísluší vlastnímu číslu λ_i matice **A**, je dán rozdílem

$$n - \mathrm{hod}(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})\,.$$

Informace o počtu Jordanových bloků k jednotlivým vlastním číslům matice umožňuje jednoznačně určit Jordanův kanonický tvar **J** matice **A** řádu tři, přičemž jednoznačnost se netýká pořadí umístění jednotlivých Jordanových bloků podél hlavní diagonály matice $\mathbf{J}$. U matic vyšších řádů tato informace ještě nemusí být postačující.

Poznámka:
Rozdíl $n - \mathrm{hod}(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})$ udává počet Jordanových bloků **velikosti alespoň** 1 příslušných v Jordanově kanonickém tvaru vlastnímu číslu λ_i.
Počet Jordanových bloků velikosti **alespoň** 2 pro vlastní číslo λ_i se rovná rozdílu hodnosti druhé mocniny matice $(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})$ a hodnosti této matice, tj.

$$\mathrm{hod}(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) - \mathrm{hod}(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^2 \,.$$

Podobně počet Jordanových bloků velikosti **alespoň** 3 pro vlastní číslo λ_i se rovná rozdílu hodnosti druhé mocniny matice $(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})$ a hodnosti třetí mocniny této matice, tj.

$$\mathrm{hod}(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^2 - \mathrm{hod}(\lambda_i \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^3 \,.$$

Analogicky lze postupovat tak dlouho, dokud získané informace neumožní jednoznačně rozhodnout o velikostech Jordanových bloků pro každé vícenásobné vlastní číslo λ_i.

Regulární matice $\mathbf{T}$, pro kterou je splněna rovnost $\mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{A}$, je po sloupcích tvořena řetězci zobecněných vlastních vektorů, jejichž délka se shoduje s velikostmi odpovídajících Jordanových bloků.

Definice:
Nechť $\mathcal{U}$ je lineární vektorový prostor nad tělesem T.
Lineární zobrazení $\mathbf{L}$: $\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ prostoru $\mathcal{U}$ do téhož prostoru $\mathcal{U}$ se nazývá **lineární operátor**.

Maticí $\mathbf{A}$ lineárního operátoru $\mathbf{L}$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ prostoru $\mathcal{U}$ rozumíme matici lineárního zobrazení $\mathbf{L}$: $\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$, kde v prostoru $\mathcal{U}$ je zvolena báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ (a to jak v prostoru "vzorů", tak i v prostoru "obrazů").
Matice

$$\mathbf{A} = \left[\; \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{f}_1)} \; \middle| \; \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{f}_2)} \; \middle| \; \cdots \; \middle| \; \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{f}_n)} \; \right]$$

operátoru $\mathbf{L}$ se tedy skládá po sloupcích z vektorů $\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{f}_1)}, \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{f}_2)}, \ldots, \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{f}_n)}$, kde pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou vektory $\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{f}_i)}$ souřadnicovými vektory prvku $\mathbf{L}(\mathbf{f}_i)$ vzhledem k bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$.

Pokud v témže prostoru $\mathcal{U}$ zvolíme jinou bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$, určí se matice $\mathbf{B}$ uvažovaného lineárního operátoru $\mathbf{L}$: $\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ v bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ analogicky pomocí souřadnicových vektorů prvků $\mathbf{L}(\mathbf{g}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, vzhledem k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$, tj.

$$\mathbf{B} = \left[\ \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{g}_1)} \,\middle|\, \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{g}_2)} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{g}_n)}\ \right].$$

Přitom nás zajímá, jaký je vztah mezi maticemi $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ téhož lineárního operátoru určenými pro odlišné báze.

Věta: (matice lineárního operátoru v různých bázích)
Nechť $\mathcal{U}$ je lineární vektorový prostor nad tělesem T, nechť $\mathbf{L}$ je lineární operátor, $\mathbf{L}$: $\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$.
Jestliže $\mathbf{A}$ je matice lineárního operátoru $\mathbf{L}$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ prostoru $\mathcal{U}$ a $\mathbf{B}$ je matice téhož lineárního operátoru $\mathbf{L}$ v bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ prostoru $\mathcal{U}$, potom matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou podobné matice.

Právě formulovaná věta umožňuje mluvit o **vlastních číslech operátoru $\mathbf{L}$** na prostoru $\mathcal{U}$ jako o vlastních číslech libovolné matice tohoto operátoru.
K nalezení vlastních čísel lineárního operátoru proto potřebujeme určit matici operátoru $\mathbf{L}$ vzhledem k libovolně vybrané bázi prostoru $\mathcal{U}$ a poté stanovit její vlastní čísla.
Pokud bychom uvažovali matici operátoru $\mathbf{L}$ v jiné bázi, bude matice lineárního operátoru sice jiná, ale protože obě uvažované matice lineárního operátoru jsou podobné matice, musí mít stejné charakteristické polynomy, a proto i stejná vlastní čísla.