EUKLEIDOVSKÉ PROSTORY

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je lineární vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$. Zobrazení $(.,.) : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{R}$ splňující vlastnosti

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}$,
   $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
2. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$,
3. $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in \mathbf{R}$,
4. $(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{L}$,

se nazývá **skalární součin** na prostoru $\mathcal{L}$.
Lineární vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ se skalárním součinem se nazývá **eukleidovský prostor**.

Věta: (základní vlastnosti skalárního součinu)
Nechť $\mathcal{L}$ je eukleidovský prostor. Potom platí:

1. $(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \lambda \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in \mathbf{R}$,
2. $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{L}$,
3. $(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}$.

Příklady lineárního vektorového prostoru se skalárním násobením:

- V lineárním vektorovém prostoru $\mathbf{R}_3$ uspořádaných trojic reálných čísel definujeme
  $$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$$
  pro každé $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbf{R}_3$ a pro každé $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T \in \mathbf{R}_3$. Takto definované zobrazení je skalární součin na prostoru $\mathbf{R}_3$.
- Zcela analogicky lze definovat skalární násobení v prostoru $\mathbf{R}_n$ uspořádaných n-tic reálných čísel:
  $$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$
  pro každé $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbf{R}_n$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^T \in \mathbf{R}_n$.

- V lineárním vektorovém prostoru $\mathcal{C}(a,b)$ všech reálných funkcí spojitých na intervalu $\langle a,b\rangle$ lze definovat skalární násobení předpisem

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x$$

pro libovolné dvě funkce $f,g\in\mathcal{C}(a,b)$.

- Speciálně v lineárním vektorovém prostoru $\mathcal{P}$ všech polynomů nebo $\mathcal{P}_n$ polynomů do daného stupně $n, n\in\mathbf{N}$, lze definovat skalární násobení předpisem

$$(p,q)=\int_a^b p(x)\cdot q(x)\mathrm{d}x$$

pro libovolné dva polynomy $p(x),\ q(x)$ z tohoto prostoru, kde a,b jsou libovolná reálná čísla, $a<b$.

Věta: (Cauchy-Schwarzova nerovnost)
Nechť $\mathcal{L}$ je eukleidovský prostor, nechť $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathcal{L}$ jsou libovolné dva prvky. Potom platí

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\leq(\mathbf{x},\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y},\mathbf{y}).$$

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je lineární vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$.
Reálná funkce $\nu\colon\mathcal{L}\longrightarrow\mathbf{R}$ se nazývá **norma**, jestliže platí:

1. $\nu(\mathbf{x})\geq 0$ pro každé $\mathbf{x}\in\mathcal{L}$,
   $\nu(\mathbf{x})=0\iff\mathbf{x}=\mathbf{0}$,
2. $\nu(\lambda\cdot\mathbf{x})=|\lambda\cdot|\nu(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x}\in\mathcal{L}$ a pro každé $\lambda\in\mathbf{R}$,
3. $\nu(\mathbf{x}+\mathbf{y})\leq\nu(\mathbf{x})+\nu(\mathbf{y})$ pro každé $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathcal{L}$.

Poznámka:
Bývá zvykem normu prvku $\mathbf{x}$ značit $||\mathbf{x}||$.

Věta: (norma indukovaná skalárním součinem)
Nechť $\mathcal{L}$ je eukleidovský prostor.
Potom zobrazení $\nu\colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{R}$ definované předpisem

$$\nu(\mathbf{x}) = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$$

pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ je norma na prostoru $\mathcal{L}$. Tato norma se nazývá **norma indukovaná skalárním součinem**.

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je eukleidovský prostor, nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$.
Řekneme, že prvky $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ jsou **kolmé prvky (ortogonální prvky)**, jestliže

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\,.$$

K označení kolmých prvků $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ používáme symbolický zápis $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je eukleidovský prostor, nechť S_1, S_2 jsou podmnožiny prostoru $\mathcal{L}$. Řekneme, že množiny S_1, S_2 jsou **kolmé množiny (ortogonální množiny)**, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in S_1$ a pro každé $\mathbf{y} \in S_2$ je $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, t.j. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Kolmost množin se symbolicky zapisuje jako $S_1 \perp S_2$.

Věta: (Pythagorova věta)
Nechť $\mathcal{L}$ je eukleidovský prostor, nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$.
Potom platí:

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Longleftrightarrow ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2.$$

Věta: (lineární nezávislost navzájem ortogonálních prvků)
Nechť $\mathcal{L}$ je eukleidovský prostor, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ nenulové, navzájem ortogonální prvky prostoru $\mathcal{L}$ (to znamená, že $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ a $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, k$, $i \neq j$).
Potom jsou tyto prvky $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárně nezávislé.

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je eukleidovský prostor dimenze n, $n \neq 0$.
Každá množina n prvků prostoru $\mathcal{L}$, které jsou nenulové a navzájem ortogonální, se nazývá **ortogonální báze prostoru $\mathcal{L}$**.

Věta: (Věta o existenci ortogonální báze)
V každém nenulovém eukleidovském prostoru konečné dimenze existuje ortogonální báze.

V důkazu této věty je vlastně popsán Gram-Schmidtův ortogonalizační proces, tedy postup, jak určit ortogonální bázi prostoru.

Poznámka: Gram-Schmidtův proces
Je-li $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \ldots, \mathbf{y}_k$ báze eukleidovského prostoru $\mathcal{L}$, potom ortogonální bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_k$ získáme následujícím postupem:

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{y}_1$.

- $\mathbf{v}_2 = \mathbf{y}_2 + \alpha \mathbf{v}_1$,
  kde $\alpha = -\dfrac{(\mathbf{y}_2, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)}$.

- $\mathbf{v}_3 = \mathbf{y}_3 + \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2$,
  kde $\beta_1 = -\dfrac{(\mathbf{y}_3, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)}$, $\beta_2 = -\dfrac{(\mathbf{y}_3, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)}$.

- $\cdots$ - dále postupujeme analogicky pro prvky $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je eukleidovský prostor, prvky $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k \in \mathcal{L}$ jsou prvky prostoru $\mathcal{L}$.
Řekneme, že množina prvků $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ je **ortonormální množina**, jestliže platí:

1. $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k,\ i \neq j$,
2. $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$.

Jestliže ortonormální prvky tvoří bázi prostoru $\mathcal{L}$, potom mluvíme o **ortonormální bázi** prostoru $\mathcal{L}$.

Poznámka:
Prvky $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k \in \mathcal{L}$ jsou ortonormální, jestliže jsou ortogonální, t.j. $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ pro každé $i \neq j$, a navíc jejich norma je 1, t.j. $||\mathbf{e}_i|| = \sqrt{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)} = \sqrt{1} = 1$.

Věta: (Věta o existenci ortonormální báze)
V každém nenulovém eukleidovském prostoru konečné dimenze existuje ortonormální báze.

ORTOGONÁLNÍ PRŮMĚT PRVKU DO PODPROSTORU

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je nenulový eukleidovský prostor konečné dimenze, nechť $\mathcal{L}_1$ je nenulový podprostor prostoru $\mathcal{L}$, nechť pro prvek $\mathbf{v}$ platí $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$, $\mathbf{v} \notin \mathcal{L}_1$.
Prvek $\mathbf{v}_0$ se nazývá **ortogonální průmět prvku v do podprostoru** $\mathcal{L}_1$, jestliže jsou splněny tyto dvě podmínky:
$\mathbf{v}_0 \in \mathcal{L}_1 \quad$ a $\quad (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \perp \mathcal{L}_1\,.$

Označme $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ bázi podprostoru $\mathcal{L}_1$.
Prvek $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{L}_1$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci bázových prvků tohoto podprostoru ve tvaru

$$\mathbf{v}_0 = \lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k \cdot \mathbf{b}_k.$$

Druhá podmínka $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \perp \mathcal{L}_1$ znamená, že prvek $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$ musí být ortogonální na každý prvek podprostoru $\mathcal{L}_1$, speciálně tedy na všechny prvky báze tohoto podprostor:
$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \perp \mathbf{b}_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$,
tedy $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \mathbf{b}_i) = 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$.
Odtud po dosazení lineární kombinace odvozené z první podmínky za prvek $\mathbf{v}_0$ dostáváme rovnice:

$$\begin{array}{rcccccccccl}
(\mathbf{v} & - & \lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 & - & \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2 & - & \ldots & - & \lambda_k \cdot \mathbf{b}_k, & \mathbf{b}_1) & = & 0\,, \\
(\mathbf{v} & - & \lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 & - & \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2 & - & \ldots & - & \lambda_k \cdot \mathbf{b}_k, & \mathbf{b}_2) & = & 0\,, \\
 & & & & & & & & & & & \vdots \\
(\mathbf{v} & - & \lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 & - & \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2 & - & \ldots & - & \lambda_k \cdot \mathbf{b}_k, & \mathbf{b}_k) & = & 0\,.
\end{array}$$

Rovnice nyní upravíme s využitím vlastností skalárních součinů (roznásobíme a převedeme vybrané sčítance na pravou stranu), tím získáme rovnice

$$\begin{array}{rcccccccl}
(\mathbf{v}, \mathbf{b}_1) & = & \lambda_1 \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) & + & \lambda_2 \cdot (\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1) & + & \ldots & + & \lambda_k \cdot (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_1)\,, \\
(\mathbf{v}, \mathbf{b}_2) & = & \lambda_1 \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) & + & \lambda_2 \cdot (\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2) & + & \ldots & + & \lambda_k \cdot (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_2)\,, \\
 & \vdots & & & & & & & \\
(\mathbf{v}, \mathbf{b}_k) & = & \lambda_1 \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_k) & + & \lambda_2 \cdot (\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_k) & + & \ldots & + & \lambda_k \cdot (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_k)\,.
\end{array}$$

Odpověď na otázku existence a následně i jednoznačnosti ortogonálního průmětu $\mathbf{v}_0$ dává následující úvaha.
Je-li báze podprostoru $\mathcal{L}_1$ ortogonální, potom výše odvozená soustava rovnic má tvar

$$\begin{aligned}(\mathbf{v},\mathbf{b}_1) &= \lambda_1\cdot(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_1)\,,\\ (\mathbf{v},\mathbf{b}_2) &= \lambda_2\cdot(\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_2)\,,\\ &\vdots\\ (\mathbf{v},\mathbf{b}_k) &= \lambda_k\cdot(\mathbf{b}_k,\mathbf{b}_k)\,.\end{aligned}$$

Matice této soustavy je tedy nejen diagonální, ale také regulární, protože skalární součiny $(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_i)$ jsou nenulové pro všechna $i=1,2,\ldots,k$ (je to proto, že prvky $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_k$ jsou prvky báze prostoru $\mathcal{L}_1$ a musí být proto nenulové). Soustava k rovnic pro k neznámých s regulární, diagonální maticí má právě jedno řešení:
$\lambda_i=\dfrac{(\mathbf{v},\mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_i)}$ pro každé $i=1,2,\ldots,k$.

Protože víme, že v každém nenulovém eukleidovském prostoru konečné dimenze existuje ortogonální báze, existuje i ortogonální průmět $\mathbf{v}_0$ prvku $\mathbf{v}$ do podprostoru $\mathcal{L}_1$ a je jednoznačně určen souřadnicemi v této ortogonální bázi podprostoru $\mathcal{L}_1$.

I v obecném případě je maticí soustavy, kterou musíme vyřešit při určování ortogonálního průmětu, matice tvořená pouze skalárními součiny bázových prvků $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_k$. Tato matice má dokonce své jméno.

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je eukleidovský prostor, nechť jsou dány prvky $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_k\in\mathcal{L}$.
Matice

$$\mathbf{G}=[(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_j)]=\begin{bmatrix}(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_1) & (\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_k)\\ (\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_1) & (\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_k)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\mathbf{b}_k,\mathbf{b}_1) & (\mathbf{b}_k,\mathbf{b}_2) & \cdots & (\mathbf{b}_k,\mathbf{b}_k)\end{bmatrix}$$

se nazývá **Gramova matice** prvků $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_k$.

Věta: (vlastnosti Gramovy matice)
Nechť $\mathcal{L}$ je eukleidovský prostor, nechť jsou dány prvky $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k \in \mathcal{L}$.
Pro Gramovu matici $\mathbf{G}$ prvků $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ platí:

1. $\mathbf{G}$ je symetrická matice,
2. $\mathbf{G}$ je regulární právě tehdy, když prvky $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ jsou lineárně nezávislé.

Důsledkem právě formulované věty je mimo jiné to, že soustava, jejíž řešení potřebujeme určit k nalezení ortogonálního průmětu, má právě jedno řešení : Protože totiž prvky $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ tvoří bázi podprostoru $\mathcal{L}_1$, musí být lineárně nezávislé, a proto matice uvažované soustavy je regulární. Je-li matice regulární, má soustava právě jedno řešení, vyřešením této soustavy získáme koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, pomocí kterých určíme hledaný ortogonální průmět

$$\mathbf{v}_0 = \lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k \cdot \mathbf{b}_k.$$

Věta: (ortogonální průmět prvku do podprostoru)
Nechť $\mathcal{L}$ je nenulový eukleidovský prostor konečné dimenze, nechť $\mathcal{L}_1$ je podprostor prostoru $\mathcal{L}$ (nenulový), nechť $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$, $\mathbf{v} \notin \mathcal{L}_1$.
Potom existuje jednoznačně určený ortogonální průmět $\mathbf{v}_0$ prvku $\mathbf{v}$ do podprostoru $\mathcal{L}_1$.
Jestliže $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ je báze podprostoru $\mathcal{L}_1$, potom

$$\mathbf{v}_0 = \lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_k \cdot \mathbf{b}_k,$$

kde $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k]^T$ je řešením soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcccccccc}
(\mathbf{v}, \mathbf{b}_1) & = & \lambda_1 \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) & + & \lambda_2 \cdot (\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1) & + & \cdots & + & \lambda_k \cdot (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_1)\,, \\
(\mathbf{v}, \mathbf{b}_2) & = & \lambda_1 \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) & + & \lambda_2 \cdot (\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2) & + & \cdots & + & \lambda_k \cdot (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_2)\,, \\
 & \vdots & & & & & & & \\
(\mathbf{v}, \mathbf{b}_k) & = & \lambda_1 \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_k) & + & \lambda_2 \cdot (\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_k) & + & \cdots & + & \lambda_k \cdot (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_k)\,.
\end{array}$$

Je-li báze $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ podprostoru $\mathcal{L}_1$ navíc ortogonální, platí:
$\lambda_i = \dfrac{(\mathbf{v}, \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)}$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$.
Pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_1$ je

$$||\mathbf{v} - \mathbf{x}|| \geq ||\mathbf{v} - \mathbf{v}_0||\,,$$

přičemž rovnost nastává pouze pro $\mathbf{x} = \mathbf{v}_0$.

Příklad
Najděte polynom stupně 2, který je nejlepší aproximací funkce $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ v normě indukované skalárním součinem $(g,h) = \int_0^1 g(x)h(x)\,dx$.

Označme $b_1(x) = 1,\; b_2(x) = x,\; b_3(x) = x^2$ prvky kanonické báze prostoru všech polynomů stupně maximálně 2. Hledáme polynom

$$f_0(x) = a + bx + cx^2 = a \cdot b_1(x) + b \cdot b_2(x) + c \cdot b_3(x)\,,$$

který je ortogonálním průmětem funkce $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ do tohoto podprostoru. Výše popsaným postupem odvodíme soustavu lineárních algebraických rovnic ve tvaru:

$$\begin{array}{rcccccc} \ln 2 & = & a & + & b \cdot \frac{1}{2} & + & c \cdot \frac{1}{3}\,, \\ 1 - \ln 2 & = & a \cdot \frac{1}{2} & + & b \cdot \frac{1}{3} & + & c \cdot \frac{1}{4}\,, \\ -\frac{1}{2} + \ln 2 & = & a \cdot \frac{1}{3} & + & b \cdot \frac{1}{4} & + & c \cdot \frac{1}{5}\,. \end{array}$$

Tato soustava má právě jedno řešení $a = -51 + 75 \ln 2 \doteq 0,9860$, $b = 282 - 408 \ln 2 \doteq -0,8040$, $c = -270 + 390 \ln 2 \doteq 0,3274$. Nejlepší aproximací funkce $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ v zadané normě je polynom

$$f_0(x) = -51 + 75 \ln 2 + (282 - 408 \ln 2) \cdot x + (-270 + 390 \ln 2) \cdot x^2,$$

resp. $f_0(x) \doteq 0,3274 \cdot x^2 - 0,804 \cdot x + 0,986$.

Tabulka ukazuje porovnání funkčních hodnot zadané funkce $f(x)$ a určené aproximace $f_0(x)$ pro vybrané argumenty z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ při zaokrouhlení na tři desetinná místa.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f_0(x)$	0,986	0,838	0,717	0,621	0,552	0,509
$f(x)$	1	0,833	0,714	0,625	0,556	0,5

ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK PODPROSTORU

Definice:
Nechť $\mathcal{L}$ je eukleidovský prostor, nechť $\mathcal{U}$ je podprostor prostoru $\mathcal{L}$.
Množina všech prvků $\mathbf{x}$ prostoru $\mathcal{L}$ ortogonálních k podprostoru $\mathcal{U}$ se nazývá **ortogonální doplněk podprostoru** $\mathcal{U}$ v prostoru $\mathcal{L}$ a značí se $\mathcal{U}^\perp$:

$$\mathcal{U}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathcal{L} \ : \ \mathbf{x} \perp \mathcal{U}\}.$$

Poznámka:
Uvědomme si, že v eukleidovském prostoru je $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = 0 = \{\mathbf{0}\}$.
Pro prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp$ musí být $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ a také $\mathbf{x} \in \mathcal{U}^\perp$, neboli $\mathbf{x} \perp \mathcal{U}$, tj. $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$ pro každé $\mathbf{z} \in \mathcal{U}$. Také pro $\mathbf{z} = \mathbf{x}$ je $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, a to je právě tehdy, když je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Věta: (ortogonální doplněk je podprostor)
Ortogonální doplněk $\mathcal{U}^\perp$ podprostoru $\mathcal{U}$ v eukleidovském prostoru $\mathcal{L}$ je podprostor prostoru $\mathcal{L}$.

Věta: (dimenze ortogonálního doplňku)
Nechť $\mathcal{U}$ je podprostor eukleidovského prostoru $\mathcal{L}$ konečné dimenze n.
Potom platí

$$\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{U}^\perp) = \dim \mathcal{L}.$$

METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

Uvažujme soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, matice $\mathbf{A}$ je reálná matice typu m/n, vektor pravých stran $\mathbf{b} \in \mathbf{R}_m$.

Soustava lineárních algebraických rovnic nemá podle Frobeniovy podmínky řešení, pokud se nerovnají hodnost matice soustavy a hodnost rozšířené matice soustavy, tj.

$$\mathrm{hod}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) \neq \mathrm{hod}(\mathbf{A}).$$

Potom ale pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$ je $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} \neq \mathbf{b}$, tedy $\mathbf{b}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Budeme-li na prostoru $\mathbf{R}_m$ uvažovat normu indukovanou skalárním součinem, znamená tato podmínka, že $||\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}|| \neq 0$ pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$.

Pokusíme se najít prvek $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}_n$ takový, aby norma prvku $||\mathbf{b}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_0||$ byla "nejmenší možná".

Nechť uvažovaná soustava lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá řešení. Označme $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A} \cdot \mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}_n\}$. Tato množina je podprostor eukleidovského prostoru $\mathbf{R}_m$. Pokud označíme $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ sloupce (sloupcové vektory) matice $\mathbf{A}$, bude platit, že prvek $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ právě tehdy, když existuje prvek $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbf{R}_n$ takový, že $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n$. To znamená, že prostor $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ je vlastně generován sloupci matice $\mathbf{A}$, nazývá se proto **sloupcový prostor matice A**. Prvky prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ jsou tedy všechny možné pravé strany $\mathbf{b}$, pro které je soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ řešitelná.
Pravá strana $\mathbf{b} \in \mathbf{R}_m$ uvažované soustavy, která nemá řešení, nemůže být tudíž prvkem tohoto podprostoru, tj. $\mathbf{b} \notin \mathcal{R}(\mathbf{A})$. Pokusíme se proto najít "lepší" pravou stranu $\mathbf{b}_0$ pro zadanou soustavu jako ortogonální průmět prvku $\mathbf{b}$ do podprostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Ze zadání máme určen podprostor $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ eukleidovského prostoru $\mathbf{R}_m$, který je generován sloupci matice $\mathbf{A}$, a prvek $\mathbf{b} \in \mathbf{R}_m$, $\mathbf{b} \notin \mathcal{R}(\mathbf{A})$, neboť soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá řešení.
Podle věty o ortogonálním průmětu prvku do podprostoru existuje jednoznačně určený ortogonální průmět $\mathbf{b}_0$ prvku $\mathbf{b}$ do podprostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, v prostoru $\mathbf{R}_m$ přitom uvažujeme skalární násobení $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v}$ a normu indukovanou tímto skalárním součinem. Protože $\mathbf{b}_0 \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$, existuje $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}_n$

tak, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0$.
Přitom platí

$$||\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0||^2 = ||\mathbf{b} - \mathbf{b}_0||^2 \leq ||\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}||^2,$$

tedy $||\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0|| \leq ||\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}||$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$ a rovnost nastává pouze pro $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.
Při normě indukované skalárním součinem v eukleidovském prostoru $\mathbf{R}_m$ tedy platí $||\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0|| \leq ||\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}||$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$.

Označíme-li $\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = [r_1(\mathbf{x}), r_2(\mathbf{x}), \ldots, r_m(\mathbf{x})]^T$, minimalizujeme hodnotu $||\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}||^2 = (r_1(\mathbf{x}))^2 + (r_2(\mathbf{x}))^2 + \ldots + (r_n(\mathbf{x}))^2$, což zdůvodňuje název "metoda nejmenších čtverců", kde pod pojmem "čtverec"se rozumí druhá mocnina čísla.

Pro samotný postup výpočtu je podstatné, zda sloupce $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ matice $\mathbf{A}$, jinak generátory sloupcového prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, jsou či nejsou lineárně nezávislé.

1. Jsou-li sloupce $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, které generují prostor $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, lineárně nezávislé, tvoří bázi sloupcového prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.
   Proto lze vyjádřit prvek $\mathbf{b}_0 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n$ jako lineární kombinaci bázových prvků. Dále má pro tento vektor platit podmínka $(\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) \perp \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

   Při výpočtu ortogonálního průmětu dostaneme soustavu

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\mathbf{b}, \mathbf{a}_1) & = & \lambda_1 \cdot (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & + & \lambda_2 \cdot (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & + & \ldots & + & \lambda_n \cdot (\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1)\,, \\
(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2) & = & \lambda_1 \cdot (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & + & \lambda_2 \cdot (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) & + & \ldots & + & \lambda_n \cdot (\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_2)\,, \\
 & \vdots & & & & & & & \\
(\mathbf{b}, \mathbf{a}_n) & = & \lambda_1 \cdot (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_n) & + & \lambda_2 \cdot (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_n) & + & \ldots & + & \lambda_n \cdot (\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n)\,.
\end{array}$$

   Najdeme-li řešení této soustavy $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^T$, známe vlastně koeficienty té lineární kombinace bázových prvků prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, která se rovná hledanému ortogonálnímu průmětu $\mathbf{b}_0$. Ortogonálním průmětem pravé strany $\mathbf{b}$ do prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ je tedy

$$\mathbf{b}_0 = \lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n.$$

   Soustava rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_0$ již má řešení, protože je $\mathbf{b}_0 \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$.
   Řešení $\mathbf{x}_0$ této soustavy nemusíme hledat novým výpočtem, neboť platí

$x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ a $\mathbf{b}_0 = \lambda_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \mathbf{a}_n$, což dosazeno za levou a pravou stranu soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_0$ dává vztah

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n.$$

Jelikož jsou sloupcové vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ matice $\mathbf{A}$ lineárně nezávislé, musí být $x_i - \lambda_i = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$, tedy $x_i = \lambda_i$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$.
Soustava rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_0$ s pravou stranou $\mathbf{b}_0$ má řešení

$$\mathbf{x}_0 = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^T.$$

2. Jsou-li sloupce $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ matice $\mathbf{A}$, které generují prostor $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, lineárně závislé, vybereme z nich bázi prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$. Je-li dimenze $\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = k$, označme vybrané prvky báze $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}$.
Ortogonální průmět $\mathbf{b}_0$ vektoru pravých stran $\mathbf{b}$ do podprostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ je tedy jednoznačně určen jako lineární kombinace těchto k bázových prvků, tj. $\mathbf{b}_0 = \lambda_1 \cdot \mathbf{a}_{i_1} + \lambda_2 \cdot \mathbf{a}_{i_2} + \ldots + \lambda_k \cdot \mathbf{a}_{i_k}$. Koeficienty $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k]^T$ nalezneme jako řešení soustavy lineárních algebraických rovnic (postup viz hledání kolmého průmětu prvku do daného podprostoru)

$$\begin{array}{rcccccccc}
(\mathbf{b}, \mathbf{a}_{i_1}) & = & \lambda_1 \cdot (\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_1}) & + & \lambda_2 \cdot (\mathbf{a}_{i_2}, \mathbf{a}_{i_1}) & + & \cdots & + & \lambda_k \cdot (\mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{a}_{i_1}), \\
(\mathbf{b}, \mathbf{a}_{i_2}) & = & \lambda_1 \cdot (\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}) & + & \lambda_2 \cdot (\mathbf{a}_{i_2}, \mathbf{a}_{i_2}) & + & \cdots & + & \lambda_k \cdot (\mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{a}_{i_2}), \\
 & \vdots & & & & & & & \\
(\mathbf{b}, \mathbf{a}_{i_k}) & = & \lambda_1 \cdot (\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_k}) & + & \lambda_2 \cdot (\mathbf{a}_{i_2}, \mathbf{a}_{i_k}) & + & \cdots & + & \lambda_k \cdot (\mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{a}_{i_k}).
\end{array}$$

Dosazením nalezených koeficientů určíme ortogonální průmět $\mathbf{b}_0$. Nyní již stačí vyřešit soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_0$, jedním řešením je vektor, který má na pozici i_j číslo λ_j, a to pro všechna $j = 1, 2, \ldots, k$, a zbytek je doplněn nulami.

Metoda nejmenších čtverců je metoda užívaná k aproximaci funkcí, které jsou určeny tabulkou hodnot získaných nejčastěji z konkrétního měření. Tabulkové body se načrtnout do roviny s kartézským systémem souřadnic a z tohoto náčrtku se odhadne, jakého typu má být funkce, jejíž graf má být proložen tabulkovými body. Dosadíme-li do obecného předpisu pro tuto funkci všechny body z tabulky, dostaneme tzv. přeurčenou soustavu, tj. soustavu, kde počet rovnic převyšuje počet neznámých, a proto obvykle přímo tato soustava nemá řešení.

Následující příklady jsou již zadány včetně typu hledané funkce a jsou doplněny příslušnými výsledky.

Příklad 1.
Měřením byla získána data:

t	0	1	2	3	4
$y(t)$	-0,7	0,7	1,7	2,3	3,5

Metodou nejmenších čtverců určete přímku, tj. nalezněte lineární funkci, která nejlépe aproximuje naměřené hodnoty.
Řešením je lineární funkce $f(t) = t - 1/2$.

Příklad 2.
Měřením byla získána data:

t	0	1	1	1	2	2	3	4
$y(t)$	-0,7	0,7	0,7	0,7	1,7	1,7	2,3	3,5

Metodou nejmenších čtverců určete přímku, tj. nalezněte lineární funkci, která nejlépe aproximuje naměřené hodnoty.
Řešením je lineární funkce $f(t) = 0,978t - 0,387$ (koeficienty lineární funkce jsou zaokrouhleny na tři desetinná místa).

Příklad 3.
Měřením byla získána data:

t	0	1	1	2	3	3
$y(t)$	2,9	0,4	-0,1	-1,3	0	0,1

Metodou nejmenších čtverců určete parabolu, tj. nalezněte polynom stupně 2, který nejlépe aproximuje naměřené hodnoty.
Řešením je kvadratická funkce $f(t) = t^2 - 4t + 3$.

KVADRATICKÉ FORMY.

Kvadratické útvary v prostoru (trojdimenzionálním), resp. v rovině, lze analyticky popsat rovnicí

$$\kappa(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}) + \gamma = 0$$

pro $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_3$, resp. $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_2$. První sčítanec na levé straně této rovnice $\kappa(\mathbf{x})$ (čti "kapa") je tzv. kvadratická forma, druhý $\mu(\mathbf{x})$ je tzv. lineární forma (to je speciální případ lineárního zobrazení), třetím sčítancem je konstanta γ.

Definice:
Nechť $\mathbf{A}$ je reálná, **symetrická** matice řádu n. Zobrazení $\kappa\colon \mathbf{R}_n \longrightarrow \mathbf{R}$, definované předpisem

$$\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$, se nazývá **kvadratická forma na prostoru $\mathbf{R}_n$ určená maticí $\mathbf{A}$**.

Věta: (spektrální vlastnosti reálných symetrických matic)
Nechť $\mathbf{A}$ je reálná, symetrická matice řádu n. Potom platí:

1. Všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou reálná čísla.
2. Ke každému vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$ existuje reálný vlastní vektor.
3. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům matice $\mathbf{A}$ jsou ortogonální při skalárním násobení na prostoru $\mathbf{R}_n$ daném předpisem $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v}$.

Věta: (Jordanúv kanonický tvar reálné symetrické matice)
Nechť $\mathbf{A}$ je reálná, symetrická matice řádu n, nechť platí $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}^T$, kde $\mathbf{J}$ je Jordanův kanonický tvar matice $\mathbf{A}$.
Potom matice $\mathbf{J}$ je diagonální a matici $\mathbf{T}$ lze poskládat po sloupcích z vlastních vektorů, které jsou navzájem ortonormální při skalárním násobení $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v}$ na prostoru $\mathbf{R}_n$.

Definice:
Nechť $\mathbf{A}$ je reálná, symetrická matice řádu n. Označme

- k - počet kladných vlastních čísel matice $\mathbf{A}$,
- z - počet záporných vlastních čísel matice $\mathbf{A}$,
- $d = n - (k + z)$ - násobnost vlastního čísla 0 matice $\mathbf{A}$.

Trojice čísel (k, z, d) (uspořádaných v tomto pořadí) se nazývá **inercie matice A** a značí se $\mathrm{in}(\mathbf{A}) = (k, z, d)$.

Definice:
Je-li $\kappa = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ kvadratická forma na $\mathbf{R}_n$, potom **inercie kvadratické formy** κ je inercie matice $\mathbf{A}$ této kvadratické formy.
Píšeme $\mathrm{in}(\kappa) = \mathrm{in}(\mathbf{A})$.

Jak lze upravit kvadratickou formu na co možná nejjednodušší tvar?

Uvažujme kvadratickou formu $\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ na prostoru $\mathbf{R}_n$. Protože matice $\mathbf{A}$ je reálná a symetrická, lze ji zapsat ve tvaru $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}^T$, kde Jordanův kanonický tvar $\mathbf{J}$ matice $\mathbf{A}$ je matice reálná diagonální $\mathbf{J} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, přičemž na diagonále jsou vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ matice $\mathbf{A}$.
Matice $\mathbf{T}$ se po sloupcích skládá z příslušných **ortonormálních** vlastních vektorů. Potom pro kvadratickou formu $\kappa(\mathbf{x})$ platí:

$$\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{J} \cdot (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{x})\,.$$

Označíme-li $\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} = [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]^T$, potom

$$\kappa(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n] \cdot \mathbf{J} \cdot [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]^T = \lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \lambda_2 \cdot \eta_2^2 + \ldots + \lambda_n \cdot \eta_n^2.$$

Uvědomme si, že $\tilde{\mathbf{x}} = [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]^T = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{x}$ jsou vlastně také souřadnice prvku $\mathbf{x}$, ale vzhledem k jiné bázi. Tedy

$$\kappa(\mathbf{x}) = \lambda_1 \cdot \eta_1^2 + \lambda_2 \cdot \eta_2^2 + \ldots + \lambda_n \cdot \eta_n^2$$

je vyjádření zadané kvadratické formy v jiné bázi, kvadratická forma je v této bázi vyjádřena ve tvaru lineární kombinace čtverců souřadnic(druhých mocnin) a koeficienty jsou přitom vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

Věta: (tzv. "zákon setrvačnosti kvadratických forem")
Je-li kvadratická forma κ na reálném lineárním vektorovém prostoru konečné dimenze vyjádřena ve dvou bázích jako lineární kombinace čtverců souřadnic, je v obou vyjádřeních stejný počet kladných koeficientů, stejný počet záporných koeficientů a stejný počet nulových koeficientů, tj. se změnou báze se nezmění inercie kvadratické formy.

Definice:
Říkáme, že kvadratická forma κ na prostoru $\mathbf{R}_n$ je

- **pozitivně definitní**, je-li $\kappa(\mathbf{x}) > 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
- **pozitivně semidefinitní**, je-li $\kappa(\mathbf{x}) \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$ a existuje $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}_n$ tak, že $\kappa(\mathbf{x}_0) = 0$,
- **negativně definitní**, je-li $\kappa(\mathbf{x}) < 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
- **negativně semidefinitní**, je-li $\kappa(\mathbf{x}) \leq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$ a existuje $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}_n$ tak, že $\kappa(\mathbf{x}_0) = 0$,
- **indefinitní**, existují-li prvky $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}_n$ tak, že $\kappa(\mathbf{x}_1) > 0$ a zároveň $\kappa(\mathbf{x}_2) < 0$.

Věta: (pozitivnost a inercie kvadratických forem)
Nechť κ je kvadratická forma na prostoru $\mathbf{R}_n$.
Potom kvadratická forma κ je

1. pozitivně definitní právě tehdy, když $\mathrm{in}(\kappa) = (n, 0, 0)$,
2. pozitivně semidefinitní právě tehdy, když $\mathrm{in}(\kappa) = (k, 0, d)$, $d \neq 0$,
3. negativně definitní právě tehdy, když $\mathrm{in}(\kappa) = (0, n, 0)$,
4. negativně semidefinitní právě tehdy, když $\mathrm{in}(\kappa) = (0, z, d)$, $d \neq 0$,
5. indefinitní právě tehdy, když $\mathrm{in}(\kappa) = (k, z, d)$, $k \neq 0$, $z \neq 0$.

Užití

Ukažme si jeden z možných případů užití kvadratických forem - nalezení základního tvaru rovnice kvadriky.

Nechť $\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ je kvadratická forma na prostoru $\mathbf{R}_n$, kde $\mathbf{A}$ je reálná symetrická matice. Nechť $\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{x}$ je lineární forma na prostoru $\mathbf{R}_n$, kde $\mathbf{b} \in \mathbf{R}_n$. Nechť $\gamma \in \mathbf{R}$ je reálné číslo. Potom množina všech prvků $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$, pro které platí

$$\kappa(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}) + \gamma = 0,$$

se nazývá kvadrika. (V prostoru $\mathbf{R}_2$ se jedná o kuželosečku, v prostoru $\mathbf{R}_3$ je to kvadratická plocha.) Rovnici kvadriky lze přepsat do tvaru

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{x} + \gamma = 0. \qquad (\star)$$

Protože matice $\mathbf{A}$ je reálná a symetrická, lze ji nahradit s využitím Jordanova kanonického tvaru $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}^T$, kde Jordanova matice $\mathbf{J} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ je diagonální matice a regulární matice $\mathbf{T}$ se skládá po sloupcích z **ortonormálních** vlastních vektorů.

Rovnici kvadriky $(\star)$ lze psát ve tvaru

$$(\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{J} \cdot (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{x}) + (\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{T}) \cdot (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{x}) + \gamma = 0\,.$$

Při označení $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{x}$ platí $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{T} = \tilde{\mathbf{x}}^T$ a $(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{b})^T = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{T}$. V nových souřadnicích $\tilde{\mathbf{x}}$ má kvadrika rovnici

$$\tilde{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{b})^T \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \gamma = 0\,.$$

Protože víme, že matice $\mathbf{J}$ je diagonální, lze již bez větších problémů určit typ kvadriky. Pouhým doplněním na čtverce lze totiž rovnici kvadriky upravit na základní středový či vrcholový tvar.