Řešené příklady z lineární algebry - část 5

Typové příklady s řešením

Příklad 5.1:
V prostoru $\mathbf{R}_4$ všech uspořádaných čtveřic reálných čísel je podprostor $\mathcal{V}$ generován prvky $\mathbf{v}_1 = [1, -2, -1, 2]^T, \mathbf{v}_2 = [2, -5, 1, 2]^T, \mathbf{v}_3 = [-2, 7, -7, 2]^T$, $\mathbf{v}_4 = [1, -2, 2, 1]^T$.

1. Určete dimenzi podprostoru $\mathcal{V}$ a nalezněte alespoň jednu bázi podprostoru $\mathcal{V}$.
2. Určete ortogonální bázi podprostoru $\mathcal{V}$ (při skalárním násobení $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T.\mathbf{v}$).
3. Určete ortonormální bázi podprostoru $\mathcal{V}$ (při skalárním násobení $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T.\mathbf{v}$).

Řešení:

1. Podprostor $\mathcal{V}$ je zadán pomocí generátorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. Hledáme-li bázi podprostoru, potřebujeme najít lineárně nezávislou množinu generátorů tohoto podprostoru. Musíme proto rozhodnout o lineární nezávislosti generátorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. Lineární kombinaci prvků proto položíme rovnu nulovému prvku prostoru $\mathbf{R}_4$ a zjistíme, co musí platit pro koeficienty v této lineární kombinaci:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

$$c_1[1, -2, -1, 2]^T + c_2[2, -5, 1, 2]^T + c_3[-2, 7, -7, 2]^T +$$
$$+ c_4[1, -2, 2, 1]^T = [0, 0, 0, 0]^T$$

$$[c_1 + 2c_2 - 2c_3 + c_4, -2c_1 - 5c_2 + 7c_3 - 2c_4, -c_1 + c_2 - 7c_3 + 2c_4,$$
$$2c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4]^T = [0, 0, 0, 0]^T$$

Tyto polynomy se budou rovnat, budou-li splněny rovnice následující soustavy lineárních algebraických rovnic, které získáme porovnáním jednotlivých složek v uspořádaných čtveřicích:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} c_1 & + & 2c_2 & - & 2c_3 & + & c_4 & = & 0\,, \\ -2c_1 & - & 5c_2 & + & 7c_3 & - & 2c_4 & = & 0\,, \\ -c_1 & + & c_2 & - & 7c_3 & + & 2c_4 & = & 0\,, \\ 2c_1 & + & 2c_2 & + & 2c_3 & + & c_4 & = & 0\,. \end{array}$$

Soustavu vyřešíme např. Gaussovou eliminační metodou. Matici homogenní soustavy upravíme na stupňovitý tvar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 7 & -2 \\ -1 & 1 & -7 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hodnost matice soustavy je tři, je tedy menší než počet neznámých koeficientů, to znamená, že řešená homogenní soustava má nekonečně mnoho řešeních. Vždy ale musí být $c_4 = 0$. Neznámou c_3 můžeme libovolně zvolit, např. $c_3 = 1$, potom musí být $c_2 = 3$ a $c_1 = -4$. (Další řešení soustavy jsou pouze násobky čtveřice $[c_1, c_2, c_3, c_4]^T = [-4, 3, 1, 0]^T$.) Znamená to, že existuje netriviální řešení soustavy, tj. že existuje netriviální lineární kombinace prvků $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$, která se rovná nulovému prvku:

$$-4\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Všechny čtyři generátory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ jsou proto lineárně závislé.

Z výše uvedené netriviální lineární kombinace můžeme libovolný z prvků $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících prvků, např.

$$\mathbf{v}_3 = 4\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2.$$

Tento prvek $\mathbf{v}_3$ vynecháme.

(POZOR: Nesmíme vynechat prvek $\mathbf{v}_4$, neboť ten nedokážeme vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních!)

Zbylé tři generátory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$ jsou již lineárně nezávislé, což je zřejmé z předcházejícího výpočtu. (Odpovídají totiž sloupcům s pivotními prvky z tohoto výpočtu).

Jednou možnou bází podprostoru $\mathcal{V}$ je tedy trojice prvků $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$. Znamená to, že dimenze tohoto podprostoru je tři, neboť dimenze je právě počet prvků libovolné báze podprostoru:

$$\dim(\mathcal{V}) = 3.$$

2. Báze $\mathbf{v}_1 = [1, -2, -1, 2]^T, \mathbf{v}_2 = [2, -5, 1, 2]^T, \mathbf{v}_4 = [1, -2, 2, 1]^T$ podprostoru $\mathcal{V}$ v prostoru $\mathbf{R}_4$ zřejmě není při zadaném klasickém skalárním násobení uspořádaných čtveřic $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T.\mathbf{v}$ ortogonální. V ortogonální bázi totiž musí být všechny navzájem různé prvky na sebe kolmé, což poznáme právě z nulovosti jejich skalárního součinu. Pro libovolné dva prvky $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$ ortogonální báze musí být $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$ pro $i \neq j$.

   Ortogonální bázi získáme z báze $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$ Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem. První prvek nové báze $\mathbf{u}_1$ vezmeme stejný jako první prvek báze původní:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = [1, -2, -1, 2]^T.$$

   Další prvek $\mathbf{u}_2$ ortogonální báze budeme hledat tak, aby lineární obal $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 >$ a lineární obal $< \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 >$ byl tentýž podprostor v $\mathbf{R}_4$. To znamená, že prvek $\mathbf{u}_2$ musí být lineární kombinací prvků $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2$ a navíc musí být určen tak, aby prvky $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ již byly ortogonální, tj. aby jejich skalární součin byl nulový. Hledáme proto prvek $\mathbf{u}_2$ jako

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \alpha \mathbf{u}_1$$

   a koeficient α určíme tak, aby skalární součin prvků $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ byl roven nule:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0,$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 + \alpha \mathbf{u}_1) = 0,$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + \alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 0,$$

   odkud plyne:

$$\alpha = -\frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}.$$

   Shrňme, co jsme odvodili:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \alpha \mathbf{u}_1, \qquad \text{kde} \qquad \alpha = -\frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}.$$

   Pro zadané prvky spočítáme proto potřebné skalární součiny $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) = 2 + 10 - 1 + 4 = 15$, $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 1 + 4 + 1 + 4 = 10$, potom koeficient α je

$$\alpha = -\frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)} = -\frac{15}{10} = -\frac{3}{2}.$$

Pomocí něj určíme prvek $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \alpha \mathbf{u}_1 = [2, -5, 1, 2]^T - \frac{3}{2}[1, -2, -1, 2]^T =$$

$$= \frac{1}{2}[4 - 3, -10 + 6, 2 + 3, 4 - 6]^T = \frac{1}{2}[1, -4, 5, -2]^T.$$

Pro další výpočet bude výhodnější položit

$$\mathbf{u}_2 = [1, -4, 5, -2]^T,$$

který se od původně spočteného prvku liší jen o násobek. Ortogonalita ani lineární obal se nezmění, ale my se vyhneme počítání se zlomky.

Chybí nám dopočítat už pouze poslední prvek ortogonální báze podprostoru $\mathcal{V}$. Prvek $\mathbf{u}_3$ hledáme tak, aby jak lineární obal $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 >$, tak také lineární obal $< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_4 >$ se rovnal právě podprostoru $\mathcal{V}$ v prostoru $\mathbf{R}_4$, proto musí být prvek $\mathbf{u}_3$ lineární kombinací prvků $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_4$. Dále musí být prvek $\mathbf{u}_3$ ortogonální s prvky $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_2$.

Prvek $\mathbf{u}_3$ budeme proto hledat ve tvaru

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_4 + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2$$

a koeficienty β_1, β_2 odvodíme z podmínky nulovosti skalárních součinů:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3) = 0, (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 0.$$

Dosadíme-li za $\mathbf{u}_3$ do prvního z těchto vztahů, určíme koeficient β_1:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3) = 0,$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_4 + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2) = 0,$$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_4) + \beta_1 (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) + \beta_2 (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0.$$

Prvky $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou již ortogonální, proto je $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0$ a poslední rovnost se ještě zjednoduší:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_4) + \beta_1 (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 0,$$

odkud plyne:

$$\beta_1 = -\frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}.$$

Analogicky určíme koeficient β_2 z druhé podmínky:

$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 0,$$
$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_4 + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2) = 0,$$
$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_4) + \beta_1 (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) + \beta_2 (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) = 0,$$

což se díky ortogonalitě prvků $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ dále zjednoduší:

$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_4) + \beta_2 (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) = 0.$$

Z poslední rovnosti dostaneme

$$\beta_2 = -\frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)}.$$

Shrňme, co jsme odvodili pro prvek $\mathbf{u}_3$:

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_4 + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2, \quad \text{kde} \quad \beta_1 = -\frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}, \beta_2 = -\frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)}.$$

Dopočítáme tedy zbývající skalární součiny, které potřebujeme znát: $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_4) = 1 + 4 - 2 + 2 = 5$, $(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_4) = 1 + 8 + 10 - 2 = 17$, $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) = 1 + 16 + 25 + 4 = 46$, ty dosadíme do vztahů pro oba koeficienty

$$\beta_1 = -\frac{(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2},$$
$$\beta_2 = -\frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_4)}{(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)} = -\frac{17}{46}.$$

Zbývá již určit poslední prvek hledané ortogonální báze:

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_4 + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 =$$
$$= [1, -2, 2, 1]^T - \frac{1}{2}[1, -2, -1, 2]^T - \frac{17}{46}[1, -4, 5, -2]^T =$$
$$= \frac{1}{46}[46 - 23 - 17, -92 + 46 + 68, 92 + 23 - 85, 46 - 46 + 34]^T =$$
$$= \frac{1}{46}[6, 22, 30, 34]^T.$$

Podobně jako u prvku $\mathbf{u}_2$ i zde budeme dále počítat s 46-tinásobkem právě spočítaného prvku, tj. položíme

$$\mathbf{u}_3 = [6, 22, 30, 34]^T.$$

Jednou možnou ortogonální bází zadaného podprostoru $\mathcal{V}$ je trojice prvků

$$\mathbf{u}_1 = [1, -2, -1, 2]^T, \mathbf{u}_2 = [1, -4, 5, -2]^T, \mathbf{u}_3 = [6, 22, 30, 34]^T.$$

3. Ortonormální báze se od ortogonální liší tím, že kromě ortogonality navzájem různých prvků požaduje navíc, aby jednotlivé prvky této báze byly jednotkové, tj. aby tyto prvky měly normu rovnu jedné, samozřejmě v normě indukované skalárním součinem. Dosáhneme toho tak, že jednotllivé prvky ortogonální báze vynásobíme převrácenou hodnotou jejich normy, využijeme přitom faktu, že $\nu(\mathbf{x}) = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_4$. Tedy pro prvky hledané ortonormální báze musí platit:

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)}} \mathbf{u}_i$$

pro $i = 1, 2, 3$.

Z potřebných skalárních součinů neznáme ještě $(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3) = 36 + 484 + 900 + 1156 = 2576$. Nyní již dopočítáme prvky ortonormální báze:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}} \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} [1, -2, -1, 2]^T = \frac{\sqrt{10}}{10} [1, -2, -1, 2]^T,$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)}} \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{46}} [1, -4, 5, -2]^T = \frac{\sqrt{46}}{46} [1, -4, 5, -2]^T,$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3)}} \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2576}} [6, 22, 30, 34]^T = \frac{\sqrt{161}}{4.161} [6, 22, 30, 34]^T =$$

$$= \frac{\sqrt{161}}{322} [3, 11, 15, 17]^T.$$

Jednou možnou ortonormální bází zadaného podprostoru $\mathcal{V}$ je trojice prvků

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\sqrt{10}}{10} [1, -2, -1, 2]^T, \mathbf{e}_2 = \frac{\sqrt{46}}{46} [1, -4, 5, -2]^T,$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\sqrt{161}}{322} [3, 11, 15, 17]^T.$$

Příklad 5.2:
Nalezněte polynom stupně 2, který je nejlepší aproximací funkce $f(x) = \cos x$ v normě indukované skalárním součinem $(g,h) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)h(x)\,dx$.

Řešení:
Označíme-li $g_1(x) = 1,\ g_2(x) = x,\ g_3(x) = x^2$ bázi prostoru $\mathcal{P}_2$ všech polynomů stupně maximálně 2 (včetně nulového polynomu), pak hledáme polynom $f_0(x) = c_1g_1(x)+c_2g_2(x)+c_3g_3(x) = c_1+c_2x+c_3x^2$, který je ortogonálním průmětem funkce $f(x)$ do tohoto podprostoru.
Tento polynom bude ortogonálním průmětem funkce $f(x)$, pokud bude prvek $f(x)-f_0(x)$ ortogonální s podprostorem polynomů $\mathcal{P}_2$, to znamená, že prvek $(f-f_0)$ musí být ortogonální na každý prvek podprostoru $\mathcal{P}_2$, speciálně tedy na všechny prvky báze tohoto podprostoru: $(f-f_0)\perp g_i$ pro $\forall i = 1,2,3$, tedy $(f-f_0, g_i) = 0$ pro $\forall i = 1,2,3$. Odtud po dosazení lineární kombinace za prvek $f_0(x)$ dostaneme rovnice:
$(f - c_1g_1 - c_2g_2 - c_3g_3, g_i) = 0$ pro $\forall i = 1,2,3$.
Úpravami, které využívají vlastnosti skalárního součinu, získáme z těchto vztahů následující soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned}
(f,g_1) &= c_1(g_1,g_1) + c_2(g_2,g_1) + c_3(g_3,g_1),\\
(f,g_2) &= c_1(g_1,g_2) + c_2(g_2,g_2) + c_3(g_3,g_2),\\
(f,g_3) &= c_1(g_1,g_3) + c_2(g_2,g_3) + c_3(g_3,g_3).
\end{aligned}$$

Vyřešíme-li tuto soustavu, budeme znát koeficienty c_1, c_2, c_3, které již jednoznačně určují hledaný ortogonální průmět - polynom $f_0(x)$.
Maticí soustavy je Gramova matice pro funkce $g_1(x) = 1,\ g_2(x) = x,\ g_3(x) = x^2$. K jejímu určení potřebujeme spočítat příslušné skalární součiny, tj. spočítat příslušné určité integrály.

$$(g_1,g_1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = [x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

$$(g_1,g_2) = (g_2,g_1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = 0,$$

$$(g_1,g_3) = (g_3,g_1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^3}{8} - \left(-\frac{\pi^3}{8}\right)\right) = \frac{1}{3}\frac{\pi^3}{4} = \frac{1}{12}\pi^3,$$

$$(g_2,g_2) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx = \ldots = \frac{1}{12}\pi^3,$$

$$(g_2, g_3) = (g_3, g_2) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^4\right) = 0,$$

$$(g_3, g_3) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}\left(\frac{\pi^5}{32} - \left(-\frac{\pi^5}{32}\right)\right) = \frac{1}{5}\frac{\pi^5}{16} = \frac{1}{80}\pi^5.$$

Další tři určité integrály potřebujeme k určení pravé strany rovnic v soustavě:

$$(f, g_1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 - (-1) = 2,$$

$$(f, g_2) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx =$$

$$= [x\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \left(\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}.1 + 0 + \frac{\pi}{2}.(-1) - 0 = 0,$$

přičemž primitivní funkce (bez integrační konstanty) k součinu funkcí $x.\cos x$ byla nalezena integrací per partes, kde mocninnou funkci derivujeme a goniometrickou funkci integrujeme:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x - (-\cos x) = x\sin x + \cos x;$$

poslední skalární součin, který potřebujeme určit, je

$$(f, g_3) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx = \left[x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2} + \pi\cos\frac{\pi}{2} - 2\sin\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi^2}{4}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \pi\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}.1 + \pi.0 - 2.1 - \frac{\pi^2}{4}.(-1) - \pi.0 + 2.(-1) = \frac{\pi^2}{2} - 4,$$

protože při opakovaném užití metody integrace per partes určíme potřebnou primitivní funkci (bez integrační konstanty) jako

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx =$$

$$= x^2\sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x\,dx\right) = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x.$$

Potřebujeme tedy vyřešit soustavu lineárních rovnic s následujícími rovnicemi:

$$\begin{array}{rcrcl} \pi c_1 & & + \frac{1}{12}\pi^3 c_3 & = & 2\,, \\ & \frac{1}{12}\pi^3 c_2 & & = & 0\,, \\ \frac{1}{12}\pi^3 c_1 & & + \frac{1}{80}\pi^5 c_3 & = & \frac{\pi^2}{2} - 4\,. \end{array}$$

Z druhé rovnice soustavy je vidět, že $c_2 = 0$. Zbývá vyřešit soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé, první z nich přitom vynásobíme číslem 12, druhou číslem 240, dostáváme tak soustavu:

$$\begin{array}{rcrcl} 12\pi c_1 & + & \pi^3 c_3 & = & 24\,, \\ 20\pi^3 c_1 & + & 3\pi^5 c_3 & = & 120\pi^2 - 160\,. \end{array}$$

Tato soustava má právě jedno řešení, které můžeme vypočítat např. pomocí Cramerova pravidla. Determinant matice soustavy je

$$D = \det \begin{bmatrix} 12\pi & \pi^3 \\ 20\pi^3 & 3\pi^5 \end{bmatrix} = 12\pi.3\pi^5 - 20\pi^3.\pi^3 = 36\pi^6 - 20\pi^6 = 16\pi^6.$$

První neznámou c_1 určíme tak, že tímto determinantem vydělíme determinant D_1 matice, kde první sloupec je nahrazen sloupcem pravých stran:

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 24 & \pi^3 \\ 120\pi^2 - 960 & 3\pi^5 \end{bmatrix} = 72\pi^5 - (120\pi^5 - 960\pi^3) = -48\pi^5 + 960\pi^3.$$

Potom

$$c_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-48\pi^5 + 960\pi^3}{16\pi^6} = -\frac{3}{\pi} + \frac{60}{\pi^3} = \frac{3}{\pi^3}(20 - \pi^2).$$

K určení neznámé c_3 nejdříve spočítáme determinant D_2 tak, že v matici soustavy nahradíme druhý sloupec sloupcem pravých stran:

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 12\pi & 24 \\ 20\pi^3 & 120\pi^2 - 960 \end{bmatrix} = 4.4.\det \begin{bmatrix} 3\pi & 6 \\ 5\pi^3 & 30\pi^2 - 240 \end{bmatrix} =$$

$$= 16.3.5.\det \begin{bmatrix} \pi & 2 \\ \pi^3 & 6\pi^2 - 48 \end{bmatrix} = 16.15.2.\det \begin{bmatrix} \pi & 1 \\ \pi^3 & 3\pi^2 - 24 \end{bmatrix} =$$

$$= 16.30.(3\pi^3 - 24\pi - \pi^3) = 16.30.(2\pi^2 - 24\pi).$$

Neznámá c_3 je pak podílem determinantů D_2 a D, tj.

$$c_3 = \frac{D_2}{D} = \frac{16.30.(2\pi^2 - 24\pi)}{16\pi^6} = \frac{60}{\pi^3} - \frac{720}{\pi^5} = \frac{60}{\pi^5}(\pi^2 - 12).$$

Určili jsme všechny tři koeficienty hledaného polynomu, teď už stačí dosadit tyto koeficienty do vyjádření polynomické funkce $f_0(x)$. Ortogonálním průmětem funkce $f(x)$ do prostoru $\mathcal{P}_2$ všech polynomů nejvýše druhého stupně (včetně nulového polynomu) je polynom

$$f_0(x) = \frac{3}{\pi^3}(20 - \pi^2) + \frac{60}{\pi^5}(\pi^2 - 12)x^2.$$

Příklad 5.3:

Metodou nejmenších čtverců určete polynom stupně 2, který nejlépe aproximuje naměřené hodnoty

x	-2	-1	-1	0	0	1	2	3
y(x)	-6,8	1,6	1,9	7,4	6,9	8,1	4,9	-2

Řešení
Hledáme polynom druhého stupně $p(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, který má být nejlepší aproximací funkce zadané tabulkou pomocí naměřených hodnot, přitom použijeme metodu nejmenších čtverců.
Pokud bychom našli polynom, jehož graf prochází všemi tabulkovými body, bylo by to ideální řešení. V našem zadání tato situace ale určitě nastat nemůže, je to zřejmé z faktu, že pro některé hodnoty nezávisle proměnné x byla měření provedena vícekrát a funkční hodnoty nejsou shodné. Ani v jiných případech tato situace ale není příliš pravděpodobná.
Dosadíme tedy naměřené hodnoty do hledaného polynomu $p(x)$ a získáme tak soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s vektorem neznámých $\mathbf{x} = [a_0, a_1, a_2]^T$, což jsou právě hledané koeficienty polynomu $p(x)$:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
-6,8 & = & 4a_1 & - & 2a_2 & + & a_3\,, \\
-1,6 & = & a_1 & - & a_2 & + & a_3\,, \\
1,9 & = & a_1 & - & a_2 & + & a_3\,, \\
7,4 & = & & & & & a_3\,, \\
6,9 & = & & & & & a_3\,, \\
8,1 & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3\,, \\
4,9 & = & 4a_1 & + & 2a_2 & + & a_3\,, \\
-2 & = & 9a_1 & + & 3a_2 & + & a_3\,.
\end{array}$$

Tato soustava zřejmě nemá řešení. Je to proto, že vektor pravých stran $\mathbf{b}$ není lineární kombinací sloupců matice $\mathbf{A}$, přičemž

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -6,8 \\ 1,6 \\ 1,9 \\ 7,4 \\ 6,9 \\ 8,1 \\ 4,9 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Potřebujeme tedy nahradit vektor $\mathbf{b}$ pravých stran jeho kolmým průmětem $\mathbf{b}_0$ do podprostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, tzv. sloupcového prostoru matice $\mathbf{A}$, který generují sloupce $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ matice $\mathbf{A}$. Kolmý průmět $\mathbf{b}_0$ hledáme ve tvaru lineární kombinace prvků nějaké báze podprostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$. Protože sloupce $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ matice $\mathbf{A}$ jsou lineárně nezávislé (snadno lze ověřit, že matice $\mathbf{A}$ má hodnost tři), jsou jednou možnou bází prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, a proto

$$\mathbf{b}_0 = \lambda_1 \mathbf{s}_1 + \lambda_2 \mathbf{s}_2 + \lambda_3 \mathbf{s}_3.$$

Dále musí být prvek $\mathbf{b} - \mathbf{b}_0$ ortogonální k prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, tj. musí platit podmínka nulovosti skalárního součinu $(\mathbf{b} - \mathbf{b}_0, \mathbf{s}_i) = 0$ pro každé $i = 1, 2, 3$. Dosazením za prvek $\mathbf{b}_0$ a následnou úpravou získáme rovnice ve tvaru $(\mathbf{b}, \mathbf{s}_i) = \lambda_1(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_i) + \lambda_2(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_i) + \lambda_3(\mathbf{s}_3, \mathbf{s}_i)$ pro každé $i = 1, 2, 3$.
Maticí soustavy, kterou nyní potřebujeme vyřešit, je Gramova matice pro prvky $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$, tato matice je regulární, proto má soustava právě jedno řešení. Řešme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -14 &= 116\lambda_1 + 26\lambda_2 + 20\lambda_3\,, \\ 22 &= 26\lambda_1 + 20\lambda_2 + 2\lambda_3\,, \\ 22 &= 20\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\lambda_3\,. \end{aligned}$$

Soustavu budeme řešit klasickou Gaussovou eliminační metodou, kdy matici soustavy převedeme pomocí elementárních řádkových úprav na stupňovitý tvar a zpětným dosazováním určíme její jediné řešení.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 116 & 26 & 20 & -14 \\ 26 & 20 & 2 & 22 \\ 20 & 2 & 8 & 22 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 58 & 13 & 10 & -7 \\ 13 & 10 & 1 & 11 \\ 10 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 8 & -10 & -62 \\ 3 & 9 & -3 & 0 \\ 10 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -5 & -31 \\ 10 & 1 & 4 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & -31 \\ 0 & -29 & 14 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 31 \\ 0 & 3 & 18 & 135 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 31 \\ 0 & 1 & 6 & 45 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 45 \\ 0 & 0 & -47 & -329 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 45 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Z posledního řádku vidíme, že $\lambda_3 = 7$, dosazením do druhého řádku určíme $\lambda_2 = 45 - 6\lambda_3 = 3$ a podobně z prvního řádku dostaneme $\lambda_1 = -3\lambda_2 + \lambda_1 = -2$.
Známe tedy koeficienty, které určují ortogonální průmět $\mathbf{b}_0 = -2\mathbf{s}_1 + 3\mathbf{s}_2 + 7\mathbf{s}_3$, současně jsou to ale i koeficienty hledaného polynomu:

$$a_0 = \lambda_1 = -2, \quad a_1 = \lambda_2 = 3, \quad a_2 = \lambda_3 = 7.$$

Nalezli jsme tak polynom druhého stupně, který metodou nejmenších čtverců aproximuje naměřené hodnoty, je to polynom

$$p(x) = -2x^2 + 3x + 7.$$