Řešené příklady z lineární algebry - část 6

Typové příklady s řešením

Příklad 6.1:
Kvadratickou formu

$$\kappa(\mathbf{x}) = -10x_1^2 - 10x_2^2 - 16x_3^2 - 16x_1x_2 + 83x_1x_3 - 8x_2x_3$$

vyjádřete ve tvaru lineární kombinace čtverců (lineární kombinace druhých mocnin). Rozhodněte o definitnosti kvadratické formy $\kappa(\mathbf{x})$.

Řešení:
Zadanou kvadratickou formu lze zapisovat ve tvaru $\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, která je určena reálnou symetrickou maticí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & -8 & 4 \\ -8 & -10 & -4 \\ 4 & -4 & -16 \end{bmatrix}.$$

Ke každé čtvercové matici $\mathbf{A}$ řádu n umíme najít Jordanův kanonický tvar - matici $\mathbf{J}$ a regulární matici $\mathbf{T}$ tak, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}$. Protože matice $\mathbf{A}$ určující kvadratickou formu $\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ v prostoru $\mathbf{R}_n$ je reálná a symetrická, bude Jordanova matice diagonální s vlastními čísly na diagonále a pro matici $\mathbf{T}$ poskládanou z ortonormálních vlastních vektorů příslušných k jednotlivým vlastním číslům je inverzní matice shodná s maticí transponovanou, tj. $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$.
Tento fakt využijeme k přepsání kvadratické formy do tvaru lineární kombinace čtverců, tj. do tvaru součtu druhých mocnin:

$$\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^T)\mathbf{x} = (\mathbf{T}^T\mathbf{x})^T\mathbf{J}(\mathbf{T}^T\mathbf{x}) =$$

$$= \tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{J}\tilde{\mathbf{x}} = [\eta_1, \ldots, \eta_n]\mathbf{J}[\eta_1, \ldots, \eta_n]^T = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \ldots + \lambda_n\eta_n^2.$$

Při úpravách vyjádření kvadratické formy jsme využili označení $\mathbf{T}^T\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} = [\eta_1, \ldots, \eta_n]^T$, a právě v těchto nových souřadnicích je možné vyjádřit kvadratickou formu $\kappa(\mathbf{x})$ ve tvaru součtu druhých mocnin.

O definitnosti kvadratické formy rozhodneme nejsnáze na základě znalosti inercie této kvadratické formy $\mathrm{in}(\kappa) = \mathrm{in}(\mathbf{A})$. Inercií se rozumí trojice celých

nezáporných čísel, která udávají počet vlastních čísel kladných, počet vlastních čísel záporných a násobnost vlasního čísla nula (v tomto pořadí). Musíme proto znát všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.
Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ určíme jako kořeny charakteristického polynomu matice $\mathbf{A}$:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda+10 & 8 & -4 \\ 8 & \lambda+10 & 4 \\ -4 & 4 & \lambda+16 \end{bmatrix}.$$

Přičteme-li k prvnímu řádku determinantu 1-násobek řádku druhého, můžeme poté z prvního řádku vytknout kořenový činitel $(\lambda{+}18)$, další výpočet využije po standardní úpravě rozvoj determinantu podle prvního řádku.

$$\varphi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda+18 & \lambda+18 & 0 \\ 8 & \lambda+10 & 4 \\ -4 & 4 & \lambda+16 \end{bmatrix} = (\lambda{+}18).\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 8 & \lambda+10 & 4 \\ -4 & 4 & \lambda+16 \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda{+}18).\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & \lambda+2 & 4 \\ -4 & 8 & \lambda+16 \end{bmatrix} = (\lambda{+}18)(-1)^{1+1}.\det \begin{bmatrix} \lambda+2 & 4 \\ 8 & \lambda+16 \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda+18)\left(\lambda^2+18\lambda\right) = \lambda(\lambda+18)^2.$$

Vlastními čísly matice $\mathbf{A}$ jsou kořeny charakteristického polynomu $\lambda_{1,2} = -18$, $\lambda_3 = 0$.

Známe-li vlastní čísla matice, která určuje kvadratickou formu, můžeme stanovit inercii této kvadratické formy. Matice $\mathbf{A}$ má dvě vlastní čísla záporná a jedno nulové, proto inercie kvadratické formy $\kappa(\mathbf{x})$ je

$$\mathrm{in}(\kappa) = \mathrm{in}(\mathbf{A}) = (0, 2, 1).$$

Kvadratická forma $\kappa(\mathbf{x})$ je tedy negativně semidefinitní, to znamená, že pro žádné $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_3$ nemá kladné hodnoty a přitom existuje nenulový vektor $\mathbf{x}_0$ s nulovou hodnotou kvadratické formy $\kappa(\mathbf{x}_0) = 0$.

Protože víme, že matice $\mathbf{A}$ je reálná symetrická, musí být její Jordanův kanonický tvar matice diagonální i v případě dvojnásoného vlastního čísla -18. Jordanova matice $\mathbf{J}$ je tedy

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dále potřebujeme nalézt matici $\mathbf{T}$, která se skládá po sloupcích z vlastních vektorů, které jsou navzájem ortonormální.
Nejdříve určíme vlastní vektory pro dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = -18$. Řešíme homogenní soustavu lineárních algebraických rovnic $((-18)\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Matici soustavy upravíme na stupňovitý tvar:

$$(-18)\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8 & 8 & -4 \\ 8 & -8 & 4 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z upraveného tvaru matice vidíme, že matice $(-18)\mathbf{I}-\mathbf{A}$ má hodnost jedna, proto rozdíl $n - \text{hod}((-18)\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 3 - 1 = 2$ potvrzuje existenci dvou lineárně nezávislých vlastních vektorů k vlastnímu číslu -18 a též diagonální tvar Jordanovy matice $\mathbf{J}$. Za dva lineárně nezávislé vlastní vektory vybereme uspořádané trojice

$$\mathbf{v}_1 = [1,1,0]^T, \mathbf{v}_2 = [-1,0,2]^T,$$

které jsme získali dopočítáním neznámé x_1 poté, co jsme dvě neznámé x_2 a x_3 zvolili tak, aby vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ byly lineárně nezávislé.
Tyto dva vektory ale nejsou ortogonální. K nalezení ortogonální báze tohoto podprostoru všech řešení homogenní soustavy využijeme Gram-Schmidtův ortogonalizační proces. První vektor ortogonální báze bude vektor $\mathbf{y}_1 = \mathbf{v}_1 = [1,1,0]^T$. Druhý vektor $\mathbf{y}_2 = \mathbf{v}_2 + \alpha\mathbf{y}_1$ dopočítáme pomocí koeficientu

$$\alpha = -\frac{(\mathbf{v}_2,\mathbf{y}_1)}{(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_1)} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Potom

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2} = [-1,0,2]^T + \frac{1}{2}[1,1,0]^T = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right]^T = \frac{1}{2}[-1,1,4]^T.$$

Jednotkové normy pro prvky ortonormálního systému získáme pomocí vztahu $\mathbf{h}_i = \frac{1}{||\mathbf{y}_i||}\mathbf{y}_i$ pro $i = 1,2$, potom

$$\mathbf{h}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}[1,1,0]^T,$$

$$\mathbf{h}_2 = \frac{\sqrt{18}}{18}[-1,1,4]^T = \frac{\sqrt{2}}{6}[-1,1,4]^T.$$

Tyto vektory budou tvořit první dva sloupce matice $\mathbf{T}$.

Posledním sloupcem matice $\mathbf{T}$ bude vlastní vektor příslušející třetímu vlastnímu číslu $\lambda_3 = 0$ s jednotkovou normou. Při řešení soustavy $(0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ Gaussovou eliminační metodou upravujeme na stupňovitý tvar matici

$$-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zvolíme-li za neznámou $x_3 = 1$ (libovolné nenulové reálné číslo, dostaneme jeden možný vlastní vektor k vlastní-mu číslu $\lambda_3 = 0$ ve tvaru $\mathbf{v}_3 = [2, -2, 1]^T$ (přitom vlastním vektorem je i jeho libovolný nenulový násobek). Ortonormálním vlastním vektorem je potom vektor $\mathbf{h}_3 = \frac{1}{3}[2, -2, 1]^T$.
Pro matici $\mathbf{T}$ složenou z ortonormálních vlastních vektorů $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$, tedy

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

platí $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$. Proto $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^T$.

Ve vyjádření kvadratické formy $\kappa(\mathbf{x})$ nahradíme matici $\mathbf{A}$ tímto součinem.

$$\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^T)\mathbf{x} = (\mathbf{T}^T\mathbf{x})^T\mathbf{J}(\mathbf{T}^T\mathbf{x}) =$$

$$= \tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{J}\tilde{\mathbf{x}} = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]\mathbf{J}[\eta_1, \eta_2, \eta_3]^T = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \lambda_3\eta_3^2,$$

kde jsme označili $\mathbf{T}^T\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]^T$. Poslední zápis kvadratické formy má přitom požadovaný tvar lineární kombinace čtverců.

Konkrétně získáme nové souřadnice vynásobením

$$[\eta_1, \eta_2, \eta_3]^T = \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^T\mathbf{x} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{6}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{6}x_2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{bmatrix}$$

V těchto souřadnicích pak zapíšeme kvadratickou formu jako lineární kombinaci čtverců

$$\kappa(\mathbf{x}) = -18\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right)^2 - 18\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{6}x_2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x_3\right)^2 =$$

$$= -9(x_1 + x_2)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3\right)^2.$$

Umocněním a úpravou lze snadno zkontrolovat správnost výpočtu.

Příklad 6.2:
Kvadratická plocha je dána rovnicí

$$-4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_2x_3 + 2x_3^2 - 1 = 0.$$

Určete, o jakou kvadratickou plochu se jedná.

Řešení:
Kvadratickou plochou rozumíme množinu všech bodů $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_3$, pro které platí

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + \gamma = 0, \qquad (\star)$$

kde $\mathbf{A}$ je reálná symetrická matice určující kvadratickou formu $\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, vektor $\mathbf{b} \in \mathbf{R}_3$ určuje lineární formu $\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T\mathbf{x}$ na prostoru $\mathbf{R}_3$ a $\gamma \in \mathbf{R}$ je reálné číslo.

Ze zadání příkladu je zřejmé, že chceme určit kvadriku, pro kterou je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma = -1$. Abychom určili, o jakou kvadratickou plochu se jedná, musíme napřed upravit kvadratickou formu $\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ do tvaru lineární kombinace druhých mocnin. K tomu využijeme Jordanův kanonický tvar $\mathbf{J}$ matice $\mathbf{A}$. Protože $\mathbf{A}$ je reálná symetrická matice, je $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^T$, kde $\mathbf{J}$ je diagonální matice a regulární matice $\mathbf{T}$ se skládá po sloupcích z ortonormálních vlastních vektorů. Potom pro inverzní matici k matici $\mathbf{T}$ platí $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$. Rovnici kvadriky $(\star)$ lze psát ve tvaru

$$(\mathbf{x}^T\mathbf{T})\mathbf{J}(\mathbf{T}^T\mathbf{x}) + (\mathbf{b}^T\mathbf{T})(\mathbf{T}^T\mathbf{x}) + \gamma = 0.$$

Využijeme-li vztahů $\mathbf{x}^T\mathbf{T} = (\mathbf{T}^T\mathbf{x})^T$ a $\mathbf{b}^T\mathbf{T} = (\mathbf{T}^T\mathbf{b})^T$, dostane tato rovnice tvar

$$(\mathbf{T}^T\mathbf{x})^T\mathbf{J}(\mathbf{T}^T\mathbf{x}) + (\mathbf{T}^T\mathbf{b})^T(\mathbf{T}^T\mathbf{x}) + \gamma = 0.$$

Zavedeme-li tedy nové souřadnice $\mathbf{T}^T\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$, jedná se opět o standardní rovnici kvadratické plochy

$$\tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{J}\tilde{\mathbf{x}} + (\mathbf{T}^T\mathbf{b})^T\tilde{\mathbf{x}} + \gamma = 0,$$

kde kvadratickou formu určuje diagonální matice $\mathbf{J}$ a lineární formu určuje vektor $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^T\mathbf{b}$.
Úpravu kvadratické formy začneme tím, že spočítáme vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A}$. Nejdříve vypočítáme charakteristický polynom

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det\begin{bmatrix} \lambda+4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & \lambda-2 \end{bmatrix}.$$

Determinant vypočítáme např. rozvojem podle prvního řádku, pak

$$\varphi(\lambda) = (\lambda+4)(-1)^{1+1}.\det\begin{bmatrix} \lambda-2 & -3/2 \\ -3/2 & \lambda-2 \end{bmatrix} = (\lambda+4)\left[(\lambda-2)^2 - \frac{9}{4}\right] =$$

$$= (\lambda+4)\left(\lambda^2 - 4\lambda + \frac{7}{4}\right) = (\lambda+4)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{7}{2}\right)$$

Vlastními čísly matice $\mathbf{A}$ jsou kořeny charakteristického polynomu $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = \frac{1}{2}$ a $\lambda_3 = \frac{7}{2}$.
Protože máme tři různá vlastní čísla pro matici řádu 3, je Jordanův kanonický tvar $\mathbf{J}$ matice $\mathbf{A}$ matice diagonální, tedy

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix}.$$

K jednotlivým vlastním číslům nyní vypočítáme vlastní vektory, jsou to všechna nenulová řešení homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic $(\lambda_i.\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pro jednotlivá vlastní čísla λ_i.
Vlastní vektor k vlastnímu číslu $\lambda_1 = -4$ určíme jako řešení soustavy $((-4)\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Matici soustavy upravíme na stupňovitý tvar:

$$(-4)\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozdíl $n-\text{hod}((-4)\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 3-2 = 1$ pouze potvrzuje známý fakt, že vlastní vektory k jednonásobnému vlastnímu číslu musí vždy být prvky z jednodimenzionálního podprostoru. Vlastním vektorem k vlastnímu číslu $\lambda_1 = -4$ je libovolné nenulové řešení této soustavy, tj. libovolný nenulový vektor $\mathbf{x}$, pro jehož složky platí $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, a x_1 je libovolné reálné číslo nenulové. Vyberme např. $\mathbf{v}_1 = [1,0,0]^T$, vlastním vektorem je i jeho libovolný nenulový násobek.
Podobně budeme postupovat i u zbylých vlastních čísel. Vlastní vektor k vlastnímu číslu $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ nalezneme jako řešení soustavy $((\frac{1}{2})\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Matici soustavy upravíme na stupňovitý tvar:

$$\frac{1}{2}\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & -3/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pro libovolné řešení této homogenní soustavy $\mathbf{x}$ musí platit $x_1 = 0$ a $x_2 = -x_3$, přitom za neznámou x_3 můžeme zvolit libovolné reálné číslo. Za vlastní vektor k vlastnímu číslu $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ vyberme např. $\mathbf{v}_2 = [0,-1,1]^T$, který dostaneme tak, že zvolíme nenulové $x_3 = 1$ (vlastním vektorem je i jeho libovolný nenulový násobek).
Vlastní vektor k poslednímu vlastnímu číslu $\lambda_3 = \frac{7}{2}$ určujeme jako řešení soustavy $((\frac{7}{2})\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Také nyní upravíme matici soustavy na stupňovitý tvar:

$$\frac{7}{2}\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Řešením této homogenní soustavy je každý vektor $\mathbf{x}$, pro který platí: $x_1 = 0$ a $x_2 = x_3$, přičemž x_3 může být libovolné reálné číslo. Za vlastní vektor k vlastnímu číslu $\lambda_3 = \frac{7}{2}$ volbou $x_3 = 1$ dostaneme $\mathbf{v}_3 = [0,1,1]^T$ (přitom vlastním vektorem je i jeho libovolný nenulový násobek).
Protože hledáme vlastní vektory k reálné symetrické matici $\mathbf{A}$, do matice $\mathbf{T}$ je vhodné užít ortonormální vlastní vektory, potom platí $\mathbf{A} = \mathbf{TJT}^T$. Potřebujeme proto vektory vybrané výše ještě "znormovat", neboť vlastní vektory k různým vlastním číslům reálné symetrické matice $\mathbf{A}$ jsou již ortogonální. Jednotlivé vektory proto vynásobíme převrácenou hodnotou jejich normy, dostaneme tak trojici $\mathbf{h}_1 = [1,0,0]^T$, $\mathbf{h}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}[0,-1,1]^T$, $\mathbf{h}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}[0,1,1]^T$. Potom pro matici

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

bude platit dokonce $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T = \mathbf{T}$.

Uvažujeme-li kvadratickou formu $\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ v prostoru $\mathbf{R}_3$ a označíme-li nyní $\mathbf{T}^T\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} = [\eta_1, \eta_3]^T$, potom bude možné v těchto nových souřadnicích vyjádřit kvadratickou formu $\kappa(\mathbf{x})$ ve tvaru součtu druhých mocnin

$$\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^T)\mathbf{x} = (\mathbf{T}^T\mathbf{x})^T\mathbf{J}(\mathbf{T}^T\mathbf{x}) =$$

$$= \tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{J}\tilde{\mathbf{x}} = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]\mathbf{J}[\eta_1, \eta_2, \eta_3]^T = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \lambda_3\eta_3^2.$$

Přitom ale $\tilde{\mathbf{x}} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T = \mathbf{T}^T\mathbf{x}$ jsou pouze souřadnice prvku $\mathbf{x}$ uvažované vzhledem k jiné bázi. V této bázi lze tedy zapsat kvadratickou formu $\kappa(\mathbf{x})$ ve tvaru lineární kombinace čtverců souřadnic

$$\kappa(\mathbf{x}) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \ldots + \lambda_n\eta_n^2,$$

koeficienty jsou přitom vlastní čísla matice $\mathbf{A}$.

Pro naše zadání jsou nové souřadnice

$$[\eta_1, \eta_2, \eta_3]^T = \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^T\mathbf{x} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 \end{bmatrix}$$

Kvadratická forma $\kappa(\mathbf{x})$ má v těchto nových souřadnicích tvar lineární kombinace čtverců, konkrétně

$$\kappa(\mathbf{x}) = -4x_1^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3\right)^2 + \frac{7}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3\right)^2$$

(O správnosti této části výpočtu se lze snadno přesvědčit tím, že umocníme příslušné součty a výraz zjednodušíme, dostaneme tak vyjádření kvadratické formy ze zadání.)

Náš výpočet je již skoro hotov. V zadané rovnici kvadratické plochy byl totiž vektor $\mathbf{b}$ nulový, proto odpadá při určování základního tvaru rovnice kvadriky doplňování na čtverec (úprava známa již ze střední školy).

$$-4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_2x_3 + 2x_3^2 - 1 = 0$$

$$-4x_1^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3\right)^2 + \frac{7}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3\right)^2 = 1$$

$$-4x_1^2 + \frac{1}{4}(-x_2 + x_3)^2 + \frac{7}{4}(x_2 + x_3)^2 = 1$$

$$-\frac{x_1^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(-x_2 + x_3)^2}{4} + \frac{(x_2 + x_3)^2}{\frac{4}{7}} = 1$$

Toto je základní tvar rovnice jednodílného hyperboloidu, jehož osou je osa x_1. Protože dva sčítance s kladnými znaménky nemají stejný jmenovatel, nejedná se o plochu rotační (řezy rovinami kolmými na osu x_1 jsou elipsy, ne kružnice).