

SOUSTAVA LINEÁRNÍCH ROVNIC

Definice Nechť je dána matice $\mathbf{A}$ typu m/n , n -členný aritmetický vektor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, m -členný aritmetický vektor $b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$.

Potom $\mathbf{A}x = b$ je **soustava m lineárních rovnic o n neznámých**.

Jestliže $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, potom $\mathbf{A}x = b$ rozepíšeme do tvaru:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

t.j.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ se nazývá **matice soustavy**. Vektor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ **vektor neznámých**. Vektor $b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$ **vektor pravých stran**.

Matici $[\mathbf{A}|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$ nazýváme **rozšířená matice soustavy**.

Definice Nechť $\mathbf{A}x = b$ je soustava m lineárních rovnic o n neznámých. Potom každý n -členný aritmetický vektor x , pro který platí $\mathbf{A}x = b$, nazýváme **řešení soustavy rovnic**.

Soustavy lineárních rovnic nazýváme **ekvivalentní**, jestliže mají stejné množiny řešení.

Věta Jestliže matice $[\mathbf{C}|d]$ vznikne z matice $[\mathbf{A}|b]$ užitím řádkových elementárních úprav, potom soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}x = b$ a $\mathbf{C}x = d$ jsou ekvivalentní.

Definice Nechť $\mathbf{A}x = b$ je soustava rovnic. Soustava se nazývá **homogenní**, jestliže $b = 0$. Soustava se nazývá **nehomogenní**, jestliže $b \neq 0$.

Věta Nechť $\mathbf{A}x = 0$ je homogenní soustava lineárních rovnic, nechť matice soustavy $\mathbf{A}$ je typu m/n . Potom množina všech řešení homogenní soustavy rovnic je lineární vektorový prostor dimenze $n - h(\mathbf{A})$.

Věta (Frobeniova podmínka řešitelnosti)

Soustava lineárních rovnic $\mathbf{A}x = b$ má řešení právě tehdy, když $h([\mathbf{A}|b]) = h(\mathbf{A})$.

Věta *Nechť v je řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}x = b$. Potom w je řešení soustavy rovnic $\mathbf{A}x = b$ právě tehdy, když $w = v + u$, kde u je řešení homogenní soustavy rovnic $\mathbf{A}x = 0$.*

Věta *Jestliže soustava lineárních rovnic $\mathbf{A}x = b$ má regulární matici $\mathbf{A}$, potom tato soustava má jediné řešení.*

Věta (Cramerovo pravidlo)

Nechť $\mathbf{A}x = b$ je soustava lineárních rovnic s regulární maticí $\mathbf{A}$ řádu n . Pro každé $i = 1, \dots, n$ označme $\mathbf{A}_i$ matici, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ tím, že i -tý sloupec matice $\mathbf{A}$ nahradíme sloupcem b . Potom pro řešení soustavy rovnic $\mathbf{A}x = b$ platí $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, kde pro každé $i = 1, \dots, n$ je $x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}$.

VLASTNÍ ČÍSLA, VLASTNÍ VEKTORY MATICE

Definice Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová matice řádu n , potom $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ se nazývá **charakteristický polynom** matice $\mathbf{A}$. Kořeny charakteristického polynomu nazýváme **vlastní čísla** matice $\mathbf{A}$. Jestliže λ_0 je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, potom nenulový vektor h takový, že $(\lambda_0 \mathbf{I} - \mathbf{A})h = 0$, t.j. $\lambda_0 h = \mathbf{A}h$, se nazývá **vlastní vektor** matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ_0 . Množina všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ se nazývá **spektrum** matice $\mathbf{A}$.

Věta Jestliže ke každému z navzájem různých vlastních čísel λ_i matice $\mathbf{A}$ vyberme vlastní vektor h_i , potom jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

Definice Řekneme, že čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ řádu n jsou **podobné**, jestliže existuje regulární matice $\mathbf{T}$ řádu n tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{T}^{-1}$.

Věta Podobné matice mají stejné charakteristické polynomy, a tedy stejná vlastní čísla.

Definice Nechť $\mathcal{L}$ je lineární vektorový prostor. Lineární zobrazení prostoru $\mathcal{L}$ do sebe, t.j. do stejného prostoru $\mathcal{L}$, se nazývá **lineární operátor**.

Věta Nechť $\mathcal{L}$ je lineární vektorový prostor, nechť L je lineární operátor, $L: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$. Je-li $\mathbf{A}$ matice lineárního operátoru L v bázi $f_1, f_2, \dots, f_n$, je-li $\mathbf{B}$ matice téhož lineárního operátoru L v bázi $g_1, g_2, \dots, g_n$, potom matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou podobné.

Věta Nechť čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n má navzájem různá vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ke každému vlastnímu číslu λ_i zvolme vlastní vektor h_i . Potom $\mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1}$, kde matice $\mathbf{J} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ a matice $\mathbf{T}$ má sloupce $h_1, h_2, \dots, h_n$.

Matice $\mathbf{J}$ se nazývá **Jordanův kanonický tvar** matice $\mathbf{A}$ pro jednoduchá vlastní čísla.

Věta Čtvercová matice $\mathbf{A}$ řádu n je podobná diagonální matici právě tehdy, když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Definice Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n , nechť λ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$. Uspořádaná k -tice vektorů

$$h_1, h_2, \dots, h_k$$

se nazývá **řetězec zobecněných vlastních vektorů** matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ , jestliže platí

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})h_1 &= 0, \quad h_1 \neq 0, \\ (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})h_2 &= -h_1, \\ (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})h_3 &= -h_2, \\ &\dots\dots\dots \\ (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})h_k &= -h_{k-1}. \end{aligned}$$

Vektor h_1 je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ , pro každé $j = 2, \dots, k$ se vektor h_j nazývá **zobecněný vlastní vektor** matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ . Počet vektorů v řetězci, t.j. číslo k , se nazývá **délka řetězce**.