

PROSTORY SE SKALÁRNÍM SOUČINEM

Definice Nechť $\mathcal{L}$ je lineární vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Zobrazení $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující vlastnosti

1. $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{L}, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
2. $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in \mathcal{L},$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in \mathbb{R},$
4. $(x + z, y) = (x, y) + (z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{L},$

se nazývá **skalární součin** na prostoru $\mathcal{L}$. Lineární vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem se nazývá **euklidovský prostor**.

Věta Nechť $\mathcal{L}$ je euklidovský prostor. Potom platí:

1. $(x, \lambda y) = \lambda(x, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in \mathbb{R},$
2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{L},$
3. $(0, x) = (x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{L}.$

Věta (Cauchy-Schwarzova nerovnost)

Nechť $\mathcal{L}$ je euklidovský prostor, nechť $x, y \in \mathcal{L}$ jsou libovolné dva prvky. Potom platí

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Věta Nechť $\mathcal{L}$ je euklidovský prostor. Potom zobrazení $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ pro každé $x \in \mathcal{L}$ se nazývá **norma indukovaná skalárním součinem** a platí:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{L}, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in \mathbb{R},$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{L}.$

Definice Nechť $\mathcal{L}$ je euklidovský prostor, $x, y \in \mathcal{L}$. Řekneme, že prvky x, y jsou **kolmé (ortogonální)**, jestliže $(x, y) = 0$, píšeme $x \perp y$. Nechť S_1, S_2 jsou podmnožiny prostoru $\mathcal{L}$. Řekneme, že množiny S_1, S_2 jsou **kolmé (ortogonální)**, jestliže pro každé $x \in S_1$ a pro každé $y \in S_2$ je $x \perp y$, t.j. $(x, y) = 0$, píšeme $S_1 \perp S_2$.

Věta (Pythagorova věta) Nechť $\mathcal{L}$ je euklidovský prostor, nechť $x, y \in \mathcal{L}$. Potom platí:

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Věta Nechť $\mathcal{L}$ je euklidovský prostor, $v_1, v_2, \dots, v_k$ nenulové, navzájem ortogonální prvky prostoru $\mathcal{L}$. Potom jsou tyto prvky $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárně nezávislé.

Definice Nechť $\mathcal{L}$ je euklidovský prostor dimenze n . Každá množina n prvků prostoru $\mathcal{L}$, které jsou nenulové a navzájem ortogonální, se nazývá **ortogonální báze** prostoru $\mathcal{L}$.

Věta (Gram-Schmidtův proces) V každém nenulovém, euklidovském prostoru konečné dimenze existuje ortogonální báze.

$$\begin{aligned}
v_1 &= y_1 \\
v_2 &= y_2 + \alpha v_1, \quad \alpha = -\frac{(y_2, v_1)}{(v_1, v_1)} \\
v_3 &= y_3 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2, \quad \beta_1 = -\frac{(y_3, v_1)}{(v_1, v_1)}, \quad \beta_2 = -\frac{(y_3, v_2)}{(v_2, v_2)}
\end{aligned}$$

Definice Nechť $\mathcal{L}$ je euklidovský prostor, prvky $e_1, e_2, \dots, e_k \in \mathcal{L}$ prostoru $\mathcal{L}$. Řekneme, že množina těchto prvků je **ortonormální**, jestliže platí:

$$\begin{aligned}
(e_i, e_j) &= 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, k, \quad i \neq j \\
(e_i, e_i) &= 1 \quad \forall i = 1, \dots, k.
\end{aligned}$$

Jestliže ortonormální prvky tvoří bázi prostoru $\mathcal{L}$, potom mluvíme o **ortonormální bázi** prostoru $\mathcal{L}$.

Věta V každém nenulovém, euklidovském prostoru konečné dimenze existuje ortonormální báze.

ORTOGONÁLNÍ PRŮMĚT

Definice Nechť $\mathcal{L}$ je euklidovský prostor, nechť $\mathcal{L}_1$ je podprostor prostoru $\mathcal{L}$, nechť $v \in \mathcal{L}$, $v \notin \mathcal{L}_1$. Prvek v_0 se nazývá **ortogonální průmět** prvku v do podprostoru $\mathcal{L}_1$, jestliže $v_0 \in \mathcal{L}_1$ a $(v - v_0) \perp \mathcal{L}_1$.

Označme $b_1, b_2, \dots, b_k$ bázi podprostoru $\mathcal{L}_1$, $v_0 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k$, $(v - v_0, b_i) = 0$ $\forall i = 1, \dots, k$.

$$\begin{aligned}(v, b_1) &= \lambda_1(b_1, b_1) + \lambda_2(b_2, b_1) + \dots + \lambda_k(b_k, b_1), \\(v, b_2) &= \lambda_1(b_1, b_2) + \lambda_2(b_2, b_2) + \dots + \lambda_k(b_k, b_2), \\&\dots\dots\dots \\(v, b_k) &= \lambda_1(b_1, b_k) + \lambda_2(b_2, b_k) + \dots + \lambda_k(b_k, b_k).\end{aligned}$$

Je-li báze podprostoru $\mathcal{L}_1$ ortogonální, potom soustavu rovnic získáme ve tvaru

$$\begin{aligned}(v, b_1) &= \lambda_1(b_1, b_1), \\(v, b_2) &= \lambda_2(b_2, b_2), \\&\dots\dots\dots \\(v, b_k) &= \lambda_k(b_k, b_k),\end{aligned}$$

a tedy $\lambda_i = \frac{(v, b_i)}{(b_i, b_i)}$ pro každé $i = 1, \dots, k$.

Matice

$$\mathbf{G} = [(b_i, b_j)] = \begin{bmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, b_2) & \dots & (b_1, b_k) \\ (b_2, b_1) & (b_2, b_2) & \dots & (b_2, b_k) \\ \vdots & & & \vdots \\ (b_k, b_1) & (b_k, b_2) & \dots & (b_k, b_k) \end{bmatrix}$$

se nazývá **Gramova matice** prvků $b_1, b_2, \dots, b_k$.

Pro Gramovu matici $\mathbf{G}$ prvků $b_1, b_2, \dots, b_k$ platí:

1. $\mathbf{G}$ je symetrická matice,
2. $\mathbf{G}$ je regulární právě tehdy, když prvky $b_1, b_2, \dots, b_k$ jsou lineárně nezávislé.

Věta Necht $\mathcal{L}$ je euklidovský prostor, necht $\mathcal{L}_1$ je podprostor prostoru $\mathcal{L}$, necht $v \in \mathcal{L}$, $v \notin \mathcal{L}_1$. Potom existuje jednoznačně určený ortogonální průmět v_0 prvku v do podprostoru $\mathcal{L}_1$. Jestliže $b_1, b_2, \dots, b_k$ je báze podprostoru $\mathcal{L}_1$, potom $v_0 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k$, kde $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]^T$ je jediné řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}(v, b_1) &= \lambda_1(b_1, b_1) + \lambda_2(b_2, b_1) + \dots + \lambda_k(b_k, b_1), \\(v, b_2) &= \lambda_1(b_1, b_2) + \lambda_2(b_2, b_2) + \dots + \lambda_k(b_k, b_2), \\&\dots\dots\dots \\(v, b_k) &= \lambda_1(b_1, b_k) + \lambda_2(b_2, b_k) + \dots + \lambda_k(b_k, b_k).\end{aligned}$$

Jestliže báze $b_1, b_2, \dots, b_k$ podprostoru $\mathcal{L}_1$ je ortogonální, potom platí: $\lambda_i = \frac{(v, b_i)}{(b_i, b_i)}$ pro každé $i = 1, \dots, k$. Pro každý prvek $x \in \mathcal{L}_1$ je $\|v - x\| \geq \|v - v_0\|$, rovnost nastává pouze pro $x = v_0$.

METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

Mějme soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A}x = b$, matice $\mathbf{A}$ je typu m/n . Pokud soustava nemá řešení, pro každý vektor $x \in \mathbb{R}_n$ je $\mathbf{A}x \neq b$, tedy $b - \mathbf{A}x \neq 0$, tím $\|b - \mathbf{A}x\| \neq 0$.

Pokusíme se najít prvek $x_0 \in \mathbb{R}_n$ takový, aby norma prvku $\|b - \mathbf{A}x_0\|$ byla "nejmenší".

Vezměme podprostor $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}x : x \in \mathbb{R}_n\}$ euklidovského prostoru $\mathbb{R}_m$.

Prvek $b \in \mathbb{R}_m$, $b \notin \mathcal{R}(\mathbf{A})$, najdeme b_0 ortogonální průmět prvku b do podprostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Protože $b_0 \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$, existuje $x_0 \in \mathbb{R}_n$ tak, že $\mathbf{A}x_0 = b_0$.

$\|b - \mathbf{A}x_0\|^2 = \|b - b_0\|^2 \leq \|b - \mathbf{A}x\|^2$, tedy $\|b - \mathbf{A}x_0\| \leq \|b - \mathbf{A}x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}_n$.

Označíme-li $b - \mathbf{A}x = [r_1(x), r_2(x), \dots, r_m(x)]^T$, minimalizujeme hodnotu $\|b - \mathbf{A}x\|^2 = r_1(x)^2 + r_2(x)^2 + \dots + r_m(x)^2$, proto název "metoda nejmenších čtverců".

Sloupce $a_1, a_2, \dots, a_n$ matice $\mathbf{A}$ generují prostor $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Jsou-li sloupce $a_1, a_2, \dots, a_n$ lineárně nezávislé, tvoří bázi prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Potom $b_0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$, $(b - b_0) \perp \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Získáme soustavu

$$(b, a_1) = \lambda_1(a_1, a_1) + \lambda_2(a_2, a_1) + \dots + \lambda_n(a_n, a_1),$$

$$(b, a_2) = \lambda_1(a_1, a_2) + \lambda_2(a_2, a_2) + \dots + \lambda_n(a_n, a_2),$$

.....

$$(b, a_n) = \lambda_1(a_1, a_n) + \lambda_2(a_2, a_n) + \dots + \lambda_n(a_n, a_n).$$

Najdeme řešení této soustavy $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T$.

Ortogonální průmět $b_0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$.

Soustava rovnic $\mathbf{A}x = b_0$ má řešení $x_0 = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]^T$.

ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK

Definice *Nechť $\mathcal{L}$ je euklidovský prostor, nechť $\mathcal{U}$ je podprostor prostoru $\mathcal{L}$. Množinu všech prvků x prostoru $\mathcal{L}$ ortogonálních k podprostoru $\mathcal{U}$ budeme nazývat **ortogonální doplněk** podprostoru $\mathcal{U}$ v prostoru $\mathcal{L}$ a značit $\mathcal{U}^\perp = \{x \in \mathcal{L} : x \perp \mathcal{U}\}$.*

Věta *Je-li $\mathcal{U}$ podprostor euklidovského prostoru $\mathcal{L}$, potom ortogonální doplněk $\mathcal{U}^\perp$ je podprostor prostoru $\mathcal{L}$.*

Věta *Nechť $\mathcal{U}$ je podprostor euklidovského prostoru $\mathcal{L}$ konečné dimenze n . Potom platí*

$$\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{U}^\perp) = \dim \mathcal{L}.$$

KVADRATICKÉ FORMY

Definice Je-li $\mathbf{A}$ reálná symetrická matice řádu n , potom zobrazení $\kappa: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}$, definované předpisem $\kappa(x) = x^T \mathbf{A} x$ pro každé $x \in \mathbb{R}_n$, budeme nazývat **kvadratická forma** na prostoru $\mathbb{R}_n$ určená maticí $\mathbf{A}$.

Věta Nechť $\mathbf{A}$ je reálná, symetrická matice řádu n . Potom platí:

1. Všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou reálná.
2. Ke každému vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$ existuje reálný vlastní vektor.
3. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům matice $\mathbf{A}$ jsou ortogonální při skalárním násobení $(u, v) = u^T v$.

Věta Je-li $\mathbf{A}$ je reálná, symetrická matice řádu n , potom $\mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1}$, kde Jordanova matice $\mathbf{J}$ je reálná a diagonální, matici $\mathbf{T}$ lze poskládat po sloupcích z ortonormálních vlastních vektorů.

Jak upravit kvadratickou formu $\kappa(x) = x^T \mathbf{A} x$?

$\mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^T$, $\mathbf{J} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní čísla matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{T}$ - po sloupcích ortonormální vlastní vektory, potom $\kappa(x) = x^T \mathbf{A} x = x^T (\mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^T) x = (\mathbf{T}^T x)^T \mathbf{J} (\mathbf{T}^T x)$.

Označíme $\mathbf{T}^T x = \tilde{x} = [\eta_1, \dots, \eta_n]^T$, potom $\kappa(x) = \tilde{x}^T \mathbf{J} \tilde{x} = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + \dots + \lambda_n \eta_n^2$.

”Zákon setrvačnosti kvadratických forem”

Je-li kvadratická forma κ na reálném lineárním vektorovém prostoru konečné dimenze vyjádřena ve dvou bázích jako lineární kombinace čtverců souřadnic, je v obou vyjádřeních stejný počet kladných koeficientů, stejný počet záporných koeficientů a stejný počet nulových koeficientů.

Definice Je-li $\kappa(x) = x^T \mathbf{A} x$ kvadratická forma určená reálnou, symetrickou maticí $\mathbf{A}$ řádu n , potom označme

k - počet kladných vlastních čísel matice $\mathbf{A}$,

z - počet záporných vlastních čísel matice $\mathbf{A}$,

$d = n - (k + z)$ - násobnost vlastního čísla 0 matice $\mathbf{A}$.

Trojice čísel (k, z, d) se nazývá **inercie kvadratické formy κ (matice $\mathbf{A}$)** a značí $\text{in}(\kappa) = \text{in}(\mathbf{A}) = (k, z, d)$.

Závěr

Říkáme, že kvadratická forma κ na lineárním vektorovém prostoru $\mathbb{R}_n$ je:

- **pozitivně definitní** $\Leftrightarrow \kappa(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_n, x \neq 0 \Leftrightarrow \text{in}(\kappa) = (n, 0, 0)$,
- **pozitivně semidefinitní** $\Leftrightarrow \kappa(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_n$ a existuje $x_0 \in \mathbb{R}_n$ tak, že $\kappa(x_0) = 0 \Leftrightarrow \text{in}(\kappa) = (k, 0, d)$, $d \neq 0$,
- **negativně definitní** $\Leftrightarrow \kappa(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_n, x \neq 0 \Leftrightarrow \text{in}(\kappa) = (0, n, 0)$
- **negativně semidefinitní** $\Leftrightarrow \kappa(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_n$ a existuje $x_0 \in \mathbb{R}_n$ tak, že $\kappa(x_0) = 0 \Leftrightarrow \text{in}(\kappa) = (0, z, d)$, $d \neq 0$,
- **indefinitní** $\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}_n$ tak, že $\kappa(x_1) > 0, \kappa(x_2) < 0 \Leftrightarrow \text{in}(\kappa) = (k, z, d)$, $k \neq 0$, $z \neq 0$.