2 - Domácí cvičení č. 2

Příklad 2.1. Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Určete matice

1. $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$, $-3\mathbf{A} + 4\mathbf{B}$, $\mathbf{A} + \mathbf{D}$, $\mathbf{D} - \mathbf{C}$.
2. $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{CA}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{CB}$, $\mathbf{AD}$, $\mathbf{DA}$, $\mathbf{BD}$, $\mathbf{DB}$.
3. $\mathbf{AB}^T$, $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$, $\mathbf{BA}^T$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$, $\mathbf{CD}$, $\mathbf{DC}^T$, $\mathbf{A} + (3\mathbf{C})^T$, $2\mathbf{B}^T - 4\mathbf{C}$.

Příklad 2.2. Je dána čtvercová matice $\mathbf{A}$. Určete matici $\mathbf{A}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $n = 4$,
2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $n = 5$,
3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $n = 53$,
4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $n = 3$,
5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -2 & 0 \\ -7 & 2 & -1 & -1 \\ 11 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $n = 13$.

Příklad 2.3. Určete determinant matice $\mathbf{A}$.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$,
2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$,
3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,
4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,
5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$,
6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 & -3 & -2 \\ 4 & 5 & -4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$,

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -4 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$,

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & -3 & -4 \\ -4 & -3 & 5 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & -5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$,

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & -5 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$,

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$,

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & -3 & 3 & -6 \\ -3 & -5 & 7 & -3 & 8 \\ -4 & -3 & 3 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$.

Příklad 2.4. Určete determinanty matic **A**, **B**, **C**, **D**.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$,

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 6 & -3 & 4 \\ -3 & -6 & 2 & -2 \\ 5 & 6 & -4 & 10 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 8 \\ 5 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$,

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ -4 & -3 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & -3 & 6 \\ -3 & -4 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 & 16 & -6 & 8 \\ 2 & 12 & -2 & 3 \\ -4 & -12 & 2 & -2 \\ 4 & 20 & -3 & 6 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -6 & 11 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -5 & 10 \\ 4 & 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$,

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 6 & -6 \\ -3 & -2 & 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -4 & 3 & -5 \\ -6 & 2 & 11 & -7 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & -7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Příklad 2.5. Určete determinanty matic **A**, **B**, **C**.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -4 & 9 & 8 \\ 1 & -6 & -5 \end{bmatrix}$,

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 14 & -11 & 13 & -1 \\ -7 & 6 & -6 & -3 \\ 16 & -13 & 16 & -7 \\ 22 & -13 & 20 & -5 \end{bmatrix}$,

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & -1 \\ 4 & 10 & -12 & 6 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ -5 & -7 & 12 & -7 \end{bmatrix}$,

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & -8 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -20 & -6 & -1 & -33 & -15 \\ -5 & 1 & -7 & -12 & -9 \\ 0 & 6 & -11 & -3 & -2 \\ -8 & -10 & 20 & -4 & 3 \\ 0 & 6 & -10 & -3 & -4 \end{bmatrix}$.

Příklad 2.6. Určete, pro která x platí rovnost.

1. $\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & x & 1 \\ -x & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0.$

2. $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & x+3 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & x & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 0.$

3. $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & x & 2 & -3 \\ 4 & 6 & x-3 & 5 \end{bmatrix} = x + 16.$

4. $\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 & -3 \\ 3 & x+2 & -3 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & -3 & 5 & x-4 \\ -3 & -4 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 1.$