6 - Domácí cvičení č. 6

Příklad 6.1. Určete $\mathbf{T}$ matici přechodu od báze $f_1, f_2, ...$ k bázi $g_1, g_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$ a $\mathbf{T^{-1}}$ matici přechodu od báze $g_1, g_2, ...$ k bázi $f_1, f_2, ...$

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_2$,
   $f_1 = [1,2]^T$, $f_2 = [2,1]^T$,
   $g_1 = [3,5]^T$, $g_2 = [5,3]^T$,

2. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_2$,
   $f_1 = x^2 + 2x + 1$, $f_2 = x^2 + 2x - 1$, $f_3 = x^2 - 2x - 1$,
   $g_1 = x^2$, $g_2 = x$, $g_3 = 1$,

3. $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{3,2}$,
   $\mathbf{F_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,
   $\mathbf{F_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
   $\mathbf{G_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,
   $\mathbf{G_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

4. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_4$,
   $f_1 = [1,1,1,-3]^T$, $f_2 = [1,1,-3,1]^T$, $f_3 = [1,-3,1,1]^T$, $f_4 = [3,1,1,1]^T$,
   $g_1 = [1,2,0,0]^T$, $g_2 = [0,1,2,0]^T$, $g_3 = [0,0,1,2]^T$, $g_4 = [2,0,0,1]^T$,

5. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$,
   $f_1 = [1,2,-1,1,0]^T$, $f_2 = [-1,1,2,0,1]^T$, $f_3 = [2,1,0,1,-1]^T$, $f_4 = [1,0,1,2,-1]^T$, $f_5 = [0,-1,1,-1,2]^T$,
   $g_1 = [1,1,0,0,0]^T$, $g_2 = [0,1,1,0,0]^T$, $g_3 = [0,0,1,1,0]^T$, $g_4 = [0,0,0,1,1]^T$,
   $g_5 = [1,0,0,0,1]^T$,

6. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_3$,
   $f_1 = x^3 + 4x^2 - x + 2$, $f_2 = 4x^3 - x^2 + 2x + 1$, $f_3 = -x^3 + 2x^2 + x + 4$, $f_4 = 2x^3 + x^2 + 4x - 1$,
   $g_1 = x^3 + x^2 + x + 1$, $g_2 = x^3 + 2x^2 + x + 1$, $g_3 = x^3 + x^2 + 3x + 1$, $g_4 = x^3 + x^2 + x + 4$,

7. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$,
   $f_1 = [1,2,3]^T$, $f_2 = [3,1,2]^T$, $f_3 = [2,3,1]^T$,
   $g_1 = [5,-4,1]^T$, $g_2 = [2,3,-2]^T$, $g_3 = [-1,2,5]^T$.

Příklad 6.2. Určete matici $\mathbf{A}$ lineárního operátoru $L\colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ v bázi $f_1, f_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$, matici $\mathbf{B}$ téhož lineárního operátoru L v bázi $g_1, g_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$ a $\mathbf{T}$ matici přechodu od báze $f_1, f_2, ...$ k bázi $g_1, g_2, ...$ Určete $\mathbf{T^{-1}AT}$.

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_2$,
   $L([a,b]^T) = [2a - b, a + 3b]^T$,
   $f_1 = [1,4]^T$, $f_2 = [4,1]^T$; $g_1 = [2,0]^T$, $g_2 = [2,1]^T$,

2. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_2$,
   $L(ax^2 + bx + c) = (a - b + 2c)x^2 + (3a + b - c)x + (4a + c)$,
   $f_1 = x^2 + 2x - 1,\ f_2 = x + 2,\ f_3 = 1$;
   $g_1 = x^2 + x,\ g_2 = x + 1,\ g_3 = x^2 + 1$,

3. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$,
   $L([a, b, c]^T) = [4a - 5b + c, a + 2b - 3c, a + b + c]^T$,
   $f_1 = [1, 3, 0]^T,\ f_2 = [0, 1, 3]^T,\ f_3 = [3, 0, 1]^T$;
   $g_1 = [1, -1, 2]^T,\ g_2 = [-1, 2, 1]^T,\ g_3 = [2, 1, -1]^T$,

4. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$,
   $L([a, b, c, d, e]^T) = [b - c + d, 2a - 3e, b + c, 2a + 2b + d - 3e, 2b + d]^T$,
   $f_1 = [1, 1, 1, 1, 2]^T,\ f_2 = [1, 1, 1, 2, 1]^T,\ f_3 = [1, 1, 2, 1, 1]^T,\ f_4 = [1, 2, 1, 1, 1]^T$,
   $f_5 = [2, 1, 1, 1, 1]^T$;
   $g_1 = [1, -1, 0, 0, 0]^T,\ g_2 = [0, 1, -1, 0, 0]^T,\ g_3 = [0, 0, 1, -1, 0]^T,\ g_4 = [0, 0, 0, 1, -1]^T,\ g_3 = [1, 0, 0, 0, 1]^T$,

5. $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{2,2}$,
   $L(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a - b + c & b - d \\ -a + 2d & c + d \end{bmatrix}$,
   $\mathbf{F_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;
   $\mathbf{G_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Příklad 6.3. Lineární operátor $L\colon \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ je dán předpisem
$L([a, b]^T) = [3a - b, a + 4b]^T$.

(a) Určete matici **A** lineárního operátoru L v bázi $f_1 = [1, 1]^T,\ f_2 = [2, 1]^T$.

(b) Určete matici **B** lineárního operátoru L v bázi $g_1 = [3, 7]^T,\ g_2 = [7, 3]^T$.

(c) Určete matici **C** lineárního operátoru L v bázi $e_1 = [1, 0]^T,\ e_2 = [0, 1]^T$.

(d) Určete **T** matici přechodu od báze f_1, f_2 k bázi g_1, g_2 a vztah mezi maticemi **A**, **B**.

(e) Určete **H** matici přechodu od báze e_1, e_2 k bázi f_1, f_2 a vztah mezi maticemi **A**, **C**.

(f) Určete **K** matici přechodu od báze e_1, e_2 k bázi g_1, g_2 a vztah mezi maticemi **B**, **C**.

(g) Určete $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$, $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B})$, $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{C})$.

Příklad 6.4. Lineární operátor $L\colon \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ je dán předpisem
$L(ax^2 + bx + c) = (4b + 13c)x^2 + (a + b - 5c)x + (2b + 5c)$.

(a) Určete matici **A** lineárního operátoru L v bázi $f_1 = x^2 + x + 1,\ f_2 = x + 1, f_3 = 1$.

(b) Určete matici **B** lineárního operátoru L v bázi $g_1 = x^2 + x - 2, g_2 = x^2 - 2x + 1,\ g_3 = -x^2 + x + 1$.

(c) Určete matici **C** lineárního operátoru L v bázi $e_1 = x^2,\ e_2 = x,\ e_3 = 1$.

(d) Určete **T** matici přechodu od báze f_1, f_2, f_3 k bázi g_1, g_2, g_3 a vztah mezi maticemi **A**, **B**.

(e) Určete **H** matici přechodu od báze e_1, e_2, e_3 k bázi f_1, f_2, f_3 a vztah mezi maticemi **A**, **C**.

(f) Určete **K** matici přechodu od báze e_1, e_2, e_3 k bázi g_1, g_2, g_3 a vztah mezi maticemi **B**, **C**.

(g) Určete $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$, $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B})$, $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{C})$.

Příklad 6.5. Lineární operátor $L\colon \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3$ je dán předpisem
$L(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a-c+d & b-d \\ a+b-c & 2a+b-2c+d \end{bmatrix}$.

(a) Určete matici $\mathbf{A}$ lineárního operátoru L v bázi
$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Určete matici $\mathbf{B}$ lineárního operátoru L v bázi
$g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $g_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $g_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) Určete matici $\mathbf{C}$ lineárního operátoru L v bázi
$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) Určete $\mathbf{T}$ matici přechodu od báze f_1, f_2, f_3, f_4 k bázi g_1, g_2, g_3, g_4 a vztah mezi maticemi $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

(e) Určete $\mathbf{H}$ matici přechodu od báze e_1, e_2, e_3, e_4 k bázi f_1, f_2, f_3, f_4 a vztah mezi maticemi $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$.

(f) Určete $\mathbf{K}$ matici přechodu od báze e_1, e_2, e_3, e_4 k bázi g_1, g_2, g_3, g_4 a vztah mezi maticemi $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$.

(g) Určete $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$, $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B})$, $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{C})$.