5 - Domácí cvičení č. 5

Příklad 5.1. Určete $\mathbf{T}$ matici přechodu od báze $f_1, f_2, ...$ k bázi $g_1, g_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$ a $\mathbf{T^{-1}}$ matici přechodu od báze $g_1, g_2, ...$ k bázi $f_1, f_2, ...$

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$,
   $f_1 = [1, -2, 3]^T$, $f_2 = [2, 1, -3]^T$, $f_3 = [3, -1, 2]^T$,
   $g_1 = [1, 1, 1]^T$, $g_2 = [1, 2, 1]^T$, $g_3 = [1, 1, 3]^T$,
2. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_3$,
   $f_1 = x^3 - x^2 + x - 2$, $f_2 = -x^3 + x^2 + x + 2$, $f_3 = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$, $f_4 = x^3 + 2x^2 + x + 1$,
   $g_1 = x^2 + x + 1$, $g_2 = x^3 + x + 1$, $g_3 = x^3 + x^2 + 1$, $g_4 = x^3 + x^2 + x$,
3. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$,
   $f_1 = [1, 1, -1, 2, 1]^T$, $f_2 = [1, -1, 2, 1, 1]^T$, $f_3 = [-1, 2, 1, 1, 1]^T$, $f_4 = [2, 1, 1, 1, -1]^T$,
   $f_5 = [1, 1, 1, -1, 2]^T$
   $g_1 = [1, 1, 0, 0, 1]^T$, $g_2 = [1, 0, 1, 0, 1]^T$, $g_3 = [0, 1, 1, 1, 0]^T$, $g_4 = [1, 0, 1, 1, 0]^T$, $g_5 = [0, 1, 0, 1, 1]^T$,
4. $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{3,2}$,
   $\mathbf{F_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$,
   $\mathbf{F_6} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
   $\mathbf{G_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{G_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,
   $\mathbf{G_6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Příklad 5.2. Je dána matice $\mathbf{T}$ a báze $b_1, b_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$. Matice $\mathbf{T}$ je matice přechodu od báze $b_1, b_2, ...$ k bázi $g_1, g_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$. Určete bázi $g_1, g_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$.

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$,
   $b_1 = [1, 2, 1]^T$, $b_2 = [2, -1, 1]^T$, $b_1 = [-1, 1, 2]^T$,
   $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,
2. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_4$,
   $b_1 = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, $b_2 = x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $b_3 = -x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$,
   $b_4 = -x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$, $b_5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,
   $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$,
3. $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{2,3}$,
   $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$B_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Příklad 5.3. Je dána matice $\mathbf{T}$ a báze $g_1, g_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$. Matice $\mathbf{T}$ je matice přechodu od báze $b_1, b_2, ...$ k bázi $g_1, g_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$. Určete bázi $b_1, b_2, ...$ prostoru $\mathcal{L}$.

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_2$,
   $g_1 = [2, -3]^T$, $g_2 = [-3, 2]^T$,
   $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$,
2. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_2$,
   $g_1 = x^2 - x + 2$, $g_2 = -x^2 + 2x + 1$, $g_3 = 2x^2 + x - 1$,
   $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$,
3. $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{2,2}$,
   $G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $G_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,
   $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Příklad 5.4. Určete matici $\mathbf{A}$ lineárního zobrazení $L: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ v bázi $u_1, u_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$ a bázi $v_1, v_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$. Určete matici $\mathbf{B}$ téhož lineárního zobrazení L v bázi $f_1, f_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$ a bázi $g_1, g_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$. Určete $\mathbf{T}$ matici přechodu od báze $u_1, u_2, ...$ k bázi $f_1, f_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$ a $\mathbf{H}$ matici přechodu od báze $g_1, g_2, ...$ k bázi $v_1, v_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$. Určete matici $\mathbf{HAT}$.

1. $\mathcal{U} = \mathbb{R}_2$, $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2$, $L([a, b]^T) = (a - 2b)x^2 + (2a + b)x + (a + b)$,
   v prostoru $\mathcal{U}$ je báze $u_1 = [1, 1]^T$, $u_2 = [1, 2]^T$ a báze $f_1 = [0, 2]^T$, $f_2 = [2, 3]^T$,
   v prostoru $\mathcal{V}$ je báze $v_1 = x^2 + 1$, $v_2 = x + 1$, $v_3 = 1$ a báze $g_1 = x^2 + x + 2$, $g_2 = x^2 + 2x + 1$, $g_3 = 2x^2 + x + 1$,
2. $\mathcal{U} = \mathbb{R}_4$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}_2$, $L([a, b, c, d]^T) = [a - b + c, b + 2c - d]^T$,
   v prostoru $\mathcal{U}$ je báze $u_1 = [1, 2, 0, 0]^T$, $u_2 = [0, 1, 2, 0]^T$, $u_3 = [0, 0, 1, 2]^T$, $u_4 = [1, 0, 0, 1]^T$ a báze $f_1 = [1, 1, 1, 0]^T$, $f_2 = [1, 1, 0, 1]^T$, $f_3 = [1, 0, 1, 1]^T$,$f_4 = [0, 1, 1, 1]^T$,
   v prostoru $\mathcal{V}$ je báze $v_1 = [2, -3]^T$, $v_2 = [2, 3]^T$, a báze $g_1 = [1, 1]^T$, $g_2 = [1, 2]^T$,
3. $\mathcal{U} = \mathcal{M}_{2,2}$, $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2$, $L(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = (a + d)x^2 + (b + 2c)x + (a - b + c + d)$,
   v prostoru $\mathcal{U}$ je báze $\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, a báze $\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,
   v prostoru $\mathcal{V}$ je báze $v_1 = x^2 - x + 1$, $v_2 = x^2 + x - 1$, $v_3 = -x^2 + x + 1$ a báze $g_1 = x^2 + 2$, $g_2 = x^2 + 2x$, $g_3 = x + 2$,

4. $\mathcal{U} = \mathcal{P}_3$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}_4$, $L(ax^3 + bx^2 + cx + d) = [a + 2b - c, b + 2c - d, a - b + d, b - c + 3d]^T$,
v prostoru $\mathcal{U}$ je báze $u_1 = x^3 + x^2 + 2x$, $u_2 = x^3 + 2x^2 + 1$, $u_3 = 2x^3 + x + 1$, $u_4 = x^2 + x + 2$ a báze $f_1 = x^3 - x^2 + x + 1$, $f_2 = x^3 + x^2 - x + 1$, $f_3 = x^3 + x^2 + x - 1$, $f_4 = -x^3 + x^2 + x + 1$,
v prostoru $\mathcal{V}$ je báze $v_1 = [1, 0, 3, 0]^T$, $v_2 = [0, 1, 0, 3]^T$, $v_3 = [1, 3, 0, 0]^T$, $v_4 = [0, 1, 1, 3]^T$ a báze $g_1 = [1, 2, -1, 0]^T$, $g_2 = [-1, 1, 0, 2]^T$, $g_3 = [2, 0, 1, -1]^T$, $g_4 = [0, -1, 2, -1]^T$,

5. $\mathcal{U} = \mathcal{P}_1$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}_5$, $L(ax + b) = [a + b, a + 2b, a - b, 2a - b, a + 3b]^T$,
v prostoru $\mathcal{U}$ je báze $u_1 = x + 2$, $u_2 = 2x - 1$ a báze $f_1 = 3x - 2$, $f_2 = 2x + 3$,
v prostoru $\mathcal{V}$ je báze $v_1 = [1, 1, 2, 0, 1]^T$, $v_2 = [1, 0, 1, 2, 0]^T$, $v_3 = [0, 1, 1, 1, 2]^T$, $v_4 = [1, 2, 0, 1, 1]^T$, $v_5 = [2, 1, 1, 1, 0]^T$ a báze $g_1 = [1, 1, 1, 1, 1]^T$, $g_2 = [1, 0, 1, 1, 1]^T$, $g_3 = [1, 1, 2, 1, 1]^T$, $g_4 = [1, 1, 1, 3, 1]^T$, $g_5 = [1, 1, 1, 1, 4]^T$,

6. $\mathcal{U} = \mathcal{P}_2$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}_4$, $L(ax^2 + bx + c) = [a + 2b, b + 2c, a + 2c, a - b]^T$,
v prostoru $\mathcal{U}$ je báze $u_1 = x^2 + x$, $u_2 = x + 1$, $u_3 = x^2 + 1$ a báze $f_1 = x^2 + 3x + 1$, $f_2 = x^2 + x - 3$, $f_3 = x^2 - x + 2$,
v prostoru $\mathcal{V}$ je báze $v_1 = [1, -1, 2, 3]^T$, $v_2 = [0, 1, -1, 2]^T$, $v_3 = [2, 1, 3, -1]^T$, $v_4 = [-1, 3, 0, 2]^T$ a báze $g_1 = [1, 1, 1, 1]^T$, $g_2 = [1, -1, 1, 2]^T$, $g_3 = [-1, 2, -1, 1]^T$, $g_4 = [1, 1, 2, -1]^T$.