8 - Domácí cvičení č. 8

Příklad 8.1. Ověřte, že předpis $(x, y) = x^T \mathbf{A} y$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}_3$ je skalární násobení na prostoru $\mathbb{R}_3$, pokud $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Příklad 8.2. Určete ortogonální bázi $v_1, v_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{V}$ je generován prvky $u_1 = [1, 0, 1, 2, 0, 1]^T$, $u_2 = [0, 1, 0, 0, 1, 1]^T$, $u_3 = [1, 1, 0, 1, -1, 2]^T$, $u_4 = [1, 2, 2, 3, 4, 3]^T$, $u_5 = [1, 0, -1, 0, -4, 1]^T$, $(u, v) = u^T v$,
2. $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2$, $(u, v) = \int_1^2 u(x)v(x)\mathrm{d}x$, ortogonální báze bude obsahovat prvek $v_1 = x + 3$,
3. $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3$, $(u, v) = \int_0^2 u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
4. $\mathcal{V} = \mathbb{R}_3$, $(u, v) = u^T \mathbf{A} v$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Příklad 8.3. Určete ortonormální bázi $e_1, e_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{V}$ je generován prvky $u_1 = [1, 0, 1, -1, 0]^T$, $u_2 = [0, 1, 0, 1, 1]^T$, $u_3 = [-1, 1, -1, 0, 0]^T$, $u_4 = [1, 2, 1, -1, 1]^T$, $u_5 = [2, 3, 2, -1, 2]^T$, $(u, v) = u^T v$,
2. $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2$, $(u, v) = \int_0^2 u(x)v(x)\mathrm{d}x$, ortogonální báze bude obsahovat prvek $v_1 = x + 1$,
3. $\mathcal{V}$ je generován prvky $u_1 = x^3 + x$, $u_2 = x^2 + 1$, $u_3 = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$, $u_4 = x^3 - 5x^2 + x - 5$, $(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
4. $\mathcal{V} = \mathbb{R}_3$, $(u, v) = u^T \mathbf{A} v$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Příklad 8.4. Ukažte, že množina $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathcal{L}$. Určete dimenzi a ortogonální bázi podprostoru $\mathcal{V}$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{V} = \{[a - c + d, -a + b - d, b + c + d, -b + c, a - b + 2c + 2d]^T : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$, $(u, v) = u^T v$;
2. $\mathcal{V} = \{(a + 2c + 3d)x^3 + (-c - d)x^2 + (-a + b + d)x + (a + 2b + 8d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{L} = \mathcal{P}_3$, $(u, v) = \int_{-1}^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x$;
3. $\mathcal{V} = \{p(x) \in \mathcal{P}_4 : p(0) = 0\}$, $\mathcal{L} = \mathcal{P}_4$, $(u, v) = \int_{-3}^3 u(x)v(x)\mathrm{d}x$;
4. $\mathcal{V} = \{[a, b, c, d, e]^T : a + b + c + d + e = 0, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$, $(u, v) = u^T v$.

Příklad 8.5. Ukažte, že množina $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathcal{L}$. Určete dimenzi a ortonormální bázi podprostoru $\mathcal{V}$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{V} = \{[a+c-d, b+c-2d, a+c-d, b+c-2d, c-3d]^T : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$,
   $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$, $(u,v) = u^T v$;

2. $\mathcal{V} = \mathcal{P}_4$, $(u,v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,

3. $\mathcal{V} = \{ax^3 + bx^2 + cx + d : a+b+c+d = 0, a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$,
   $\mathcal{L} = \mathcal{P}_3$, $(u,v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\mathrm{d}x$.

Příklad 8.6. Určete ortogonální průmět v_0 prvku v do podprostoru $\mathcal{L}_1$ prostoru $\mathcal{L}$ při skalárním násobení (u,v).

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_6$,
   $\mathcal{L}_1$ je generován prvky $u_1 = [1,2,-1,1,1,0]^T$, $u_2 = [0,1,1,2,-1,1]^T$, $u_3 = [-1,1,0,0,1,1]^T$, $u_4 = [2,1,1,0,0,-1]^T$, $u_5 = [2,4,1,3,1,1]^T$;
   $v = [16,6,-2,-11,2,5]^T$, $(u,v) = u^T v$,

2. $\mathcal{L} = \mathcal{C}(0,1)$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{P}_2$; $v = \mathrm{arctg}x$, $(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x$,

3. $\mathcal{L} = \mathcal{C}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\mathcal{L}_1$ je generován prvky $u_1 = 1$, $u_2 = \sin x$, $u_3 = \cos x$;
   $v = x - 1$, $(u,v) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,

4. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$, $\mathcal{L}_1$ je generován prvky $u_1 = [1,1,0]^T$, $u_2 = [0,1,0]^T$; $v = [1,2,3]^T$,
   $(u,v) = u^T \mathbf{A} v$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,

5. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$,
   $\mathcal{L}_1 = \{[a-2b+c+3d, 2a+b+c-2d, -a+2b+c+d, 3a-b+c+2d, -4a+3b+c+d]^T : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$;
   $v = [1,0,-1,7,-8]^T$, $(u,v) = u^T v$,

6. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_6$,
   $\mathcal{L}_1 = \{[a-2b+c+d-e, 2a+b+5d-e, -a+2b+c+d+5e, 2a-c+3d-4e, a+2b+c+5d+3e, -b+2c+d+3e]^T : a,b,c,d,e \in \mathbb{R}\}$;
   $v = [34,-7,2,-2,2,3]^T$, $(u,v) = u^T v$.

Příklad 8.7. Metodou nejmenších čtverců určete funkci $f(x)$, která nejlépe aproximuje naměřené hodnoty.

1. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 2.

x	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	3
y(x)	25,2	11,6	11,9	5,2	5,1	4	4,1	8,9	20

2. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 3, který má v bodě 0 hodnotu 0.

x	-3	-2	-1	-1	1	1	2	3
y(x)	87,3	28,9	6,5	4,9	3	2,9	2,1	-15

3. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 2, který má v bodě 0 hodnotu 3.

x	-2	-1	-1	1	2	2	3
y(x)	41,2	14,6	14,9	5,1	20,9	21	51

4. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 2, který má v bodě 2 hodnotu -1.

x	-3	-2	-2	-1	-1	0	0	1
y(x)	-36	-17,1	-16,9	-4	-4,1	2,9	3,4	3,7

5. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 2, který má v bodě 1 hodnotu 3.

x	-2	-1	-1	0	0	2	3
y(x)	23,9	14,4	11,8	6,2	5,8	4,1	9

Příklad 8.8. Je dán podprostor $\mathcal{U}$ prostoru $\mathcal{L}$. Určete dimenzi a bázi ortogonálního doplňku $\mathcal{U}^{\perp}$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$,
   $\mathcal{U} = \{[a-2b+c+3d, 2a+b+c+8d, a-b+c+4d, -a+2b+c+3d, 3a+b-2c+d]^T : a, b, c, d, \in \mathbb{R}\}$
   $(u, v) = u^T v$,

2. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_6$,
   $\mathcal{U} = \{[a, b, c, d, e, f]^T : a + b + c + d + e + f = 0, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\}$
   $(u, v) = u^T v$,

3. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_4$,
   $\mathcal{U}$ je generován prvky $u_1 = x^4 - x + 1$, $u_2 = x^3 + x^2$,
   $(u, v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,

4. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$, $\mathcal{U}$ je generován prvky $u_1 = [1, 2, 4]^T$, $u_2 = [-1, 1, -2]^T$, $(u, v) = u^T \mathbf{A} v$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.