5 - Domácí cvičení č. 5

Příklad 5.1. Rozhodněte, zda dané zobrazení je lineární.

1. $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
   $\mathcal{L}([a,b,c]^T) = [2a-b+c, 0, a+3b-c, 0, 3a+2b]^T$,

2. $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}([a,b,c,d]^T) = [a-b+2c+1, b-d-a]^T$,

3. $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(ax^3+bx^2+cx+d) = [a-b+2c, b-d-a]^T$,

4. $\mathcal{L}\colon \mathcal{M}_{2,3} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}) = (a+b)x^2 + (c+d)x + (e+f)$,

5. $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_3$ dané předpisem
   $\mathcal{L}([a,b]^T) = (a+b)x^3 + 2bx^2 + abx + (2a+b)$,

6. $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(x) = \mathbf{A}x$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$,

7. $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(x) = \mathbf{A}x + b$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

8. $\mathcal{L}\colon \mathcal{M}_{2,2} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = (ax)^2 + (b+c)x + d$,

9. $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem
   $\mathcal{L}([a,b]^T) = e^{a+b}$.

Příklad 5.2. Určete dimenzi a najděte alespoň jednu bázi jádra Ker$\mathcal{L}$ a obrazu Im$\mathcal{L}$.

1. $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
   $\mathcal{L}([a,b,c]^T) = [2a-b+c, 0, a+3b-c, 0, 3a+2b]^T$,

2. $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(ax^3+bx^2+cx+d) = [a-b+2c, b-d-a]^T$,

3. $\mathcal{L}\colon \mathcal{M}_{2,3} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}) = (a+b)x^2 + (c+d)x + (e+f)$,

4. $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(x) = \mathbf{A}x$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

5. $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_4$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(x) = \mathbf{A}x$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

6. $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(ax^2+bx+c) = [a+2b+c, a-c, 2a+b-c, a+b, -a+b+2c]^T$.

Příklad 5.3. Určete matici **A** lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ ve standardních bázích $e_1, e_2, \ldots$ a $p_1, p_2, \ldots$.

1. $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
   $\mathcal{L}([a,b,c]^T) = [2a-b+c, 0, a+3b-c, 0, 3a+2b]^T$,
   $\mathbb{R}_3$: $e_1 = [1,0,0]^T$, $e_2 = [0,1,0]^T$, $e_3 = [0,0,1]^T$,
   $\mathbb{R}_5$: $p_1 = [1,0,0,0,0]^T$, $p_2 = [0,1,0,0,0]^T$, $p_3 = [0,0,1,0,0]^T$, $p_4 = [0,0,0,1,0]^T$, $p_5 = [0,0,0,0,1]^T$,

2. $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(ax^3+bx^2+cx+d) = [a-b+2c, b-d-a]^T$,
   $\mathcal{P}_3$: $e_1 = x^3$, $e_2 = x^2$, $e_3 = x$, $e_4 = 1$,
   $\mathbb{R}_2$: $p_1 = [1,0]^T$, $p_2 = [0,1]^T$,

3. $\mathcal{L}\colon \mathcal{M}_{2,3} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}) = (a+b)x^2 + (c+d)x + (e+f)$,
   $\mathcal{M}_{2,3}$: $\mathbf{E_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
   $\mathcal{P}_2$: $p_1 = x^2$, $p_2 = x$, $p_3 = 1$.

4. $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_4$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(x) = \mathbf{C}x$, kde $x \in \mathbb{R}_3$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
   $\mathbb{R}_3$: $e_1 = [1,0,0]^T$, $e_2 = [0,1,0]^T$, $e_3 = [0,0,1]^T$,
   $\mathbb{R}_4$: $p_1 = [1,0,0,0]^T$, $p_2 = [0,1,0,0]^T$, $p_3 = [0,0,1,0]^T$, $p_4 = [0,0,0,1]^T$.

Příklad 5.4. Určete matici **B** lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích $v_1, v_2, \ldots$ a $u_1, u_2, \ldots$.

1. $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
   $\mathcal{L}([a,b,c]^T) = [2a-b+c, 0, a+3b-c, 0, 3a+2b]^T$,
   $\mathbb{R}_3$: $v_1 = [1,2,3]^T$, $v_2 = [2,1,3]^T$, $v_3 = [3,1,2]^T$,
   $\mathbb{R}_5$: $u_1 = [1,2,-1,1,1]^T$, $u_2 = [2,1,1,1,0]^T$, $u_3 = [-1,3,1,0,0]^T$, $u_4 = [2,1,0,0,0]^T$, $u_5 = [1,0,0,0,0]^T$,

2. $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(ax^3+bx^2+cx+d) = [a-b+2c, b-d-a]^T$,
   $\mathcal{P}_3$: $v_1 = x^3+2x^2+x+2$, $v_2 = x^3+2x^2+x-2$, $v_3 = x^3+2x^2-x-2$, $v_4 = x^3-2x^2-x-2$,
   $\mathbb{R}_2$: $u_1 = [1,2]^T$, $u_2 = [2,1]^T$,

3. $\mathcal{L}\colon \mathcal{M}_{2,3} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
   $\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}) = (a+b)x^2 + (c+d)x + (e+f)$,
   $\mathcal{M}_{2,3}$: $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,
   $\mathcal{P}_2$: $u_1 = x^2+2x$, $u_2 = x+2$, $u_3 = 2x^2+1$,

4. $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_4$ dané předpisem

$$\mathcal{L}(x) = \mathbf{C}x, \text{ kde } x \in \mathbb{R}_3,\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}_3$: $v_1 = [1,2,1]^T$, $v_2 = [2,1,1]^T$, $v_3 = [1,1,2]^T$,
$\mathbb{R}_4$: $u_1 = [1,1,1,0]^T$, $u_2 = [1,1,0,1]^T$, $u_3 = [1,0,1,1]^T$,$u_4 = [0,1,1,1]^T$.

Příklad 5.5. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$.

(a) Ukažte, že zobrazení je lineární.

(b) Určete bázi a dimenzi jádra Ker$\mathcal{L}$ a obrazu Im$\mathcal{L}$.

(c) Určete matici **A** lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ ve standardních bázích $e_1, e_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$ a $f_1, f_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$.

(d) Určete matici **B** lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích $v_1, v_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$ a $u_1, u_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$.

(e) Určete **T** matici přechodu od standardní báze $e_1, e_2, ...$ k bázi $v_1, v_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$.

(f) Určete **H** matici přechodu od standardní báze $f_1, f_2, ...$ k bázi $u_1, u_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$.

(g) Ukažte, že $\mathbf{B} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

Řešte pro zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_2$, které je dáno předpisem

$$\mathcal{L}([a,b,c]^T) = [a + 2b - c, 2a + 3b + 3c]^T.$$

Báze prostoru $\mathcal{V} = \mathbb{R}_3$:
$e_1 = [1,0,0]^T,\ e_2 = [0,1,0]^T,\ e_3 = [0,0,1]^T;$
$v_1 = [1,2,-1]^T,\ v_2 = [2,-1,1]^T,\ v_3 = [-1,1,2]^T;$
Báze prostoru $\mathcal{U} = \mathbb{R}_2$:
$f_1 = [1,0]^T,\ f_2 = [0,1]^T;$
$u_1 = [1,3]^T,\ u_2 = [3,1]^T.$

Příklad 5.6. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$.

(a) Ukažte, že zobrazení je lineární.

(b) Určete bázi a dimenzi jádra Ker$\mathcal{L}$ a obrazu Im$\mathcal{L}$.

(c) Určete matici **A** lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ ve standardních bázích $e_1, e_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$ a $f_1, f_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$.

(d) Určete matici **B** lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích $v_1, v_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$ a $u_1, u_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$.

(e) Určete **T** matici přechodu od standardní báze $e_1, e_2, ...$ k bázi $v_1, v_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$.

(f) Určete **H** matici přechodu od standardní báze $f_1, f_2, ...$ k bázi $u_1, u_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$.

(g) Ukažte, že $\mathbf{B} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

Řešte pro zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_4$, které je dáno předpisem

$$\mathcal{L}([a,b]^T) = (a-b)x^4 + (2a+b)x^3 + 2bx + (b-a).$$

Báze prostoru $\mathcal{V} = \mathbb{R}_2$:
$e_1 = [1,0]^T,\ e_2 = [0,1]^T$;
$v_1 = [1,3]^T,\ v_2 = [2,-3]^T$;
Báze prostoru $\mathcal{U} = \mathcal{P}_4$:
$f_1 = x^4,\ f_2 = x^3,\ f_3 = x^2,\ f_4 = x,\ f_5 = 1$;
$u_1 = x^4 + x^2,\ u_2 = x^3 + x,\ u_3 = x^2 + 1,\ u_4 = x^4 + x,\ u_5 = x^3 + 1.$

Příklad 5.7. Jsou dána lineární zobrazení $\mathcal{L}_1\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_4$ dané předpisem
$\mathcal{L}_1([a,b,c]^T) = (a+b)x^4 + (2a-c)x^3 + (b+3c)x^2 + (2a+b)x + (b+4c)$,
$\mathcal{L}_2\colon \mathcal{P}_4 \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$ dané předpisem
$\mathcal{L}_2(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = \begin{bmatrix} a+d-e & b+2c+e \\ 2a-c+2d & b+d+3e \end{bmatrix}.$

(a) Určete složené zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$,

(b) Určete matice $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}$ lineárních zobrazení $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ a matici $\mathbf{A}$ složeného zobrazení $\mathcal{L}$ ve standardních bázích
$\mathbb{R}_3$: $e_1 = [1,0,0]^T$, $e_2 = [0,1,0]^T$, $e_3 = [0,0,1]^T$,
$\mathcal{P}_4$: $p_1 = x^4$, $p_2 = x^3$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x$, $p_5 = 1$,
$\mathcal{M}_{2,2}$: $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) Určete $\mathbf{A_2}\mathbf{A_1}$.

Příklad 5.8. Jsou dána lineární zobrazení $\mathcal{L}_1\colon \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
$\mathcal{L}_1([a,b,c,d]^T) = (a+c-d)x^2 + (b+d-a)x + (b+c)$,
$\mathcal{L}_2\colon \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
$\mathcal{L}_2(ax^2 + bx + c) = [a+b, b+c, a+c, a+2b+c, a+b+2c]^T$.

(a) Určete složené zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_5$,

(b) Určete matice $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}$ lineárních zobrazení $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ a matici $\mathbf{A}$ složeného zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích
$\mathbb{R}_4$: $v_1 = [1,1,0,0]^T$, $v_2 = [0,1,-1,1]^T$, $v_3 = [-2,-1,2,2]^T$, $v_4 = [1,1,1,1]^T$,
$\mathcal{P}_2$: $p_1 = x^2 - 3x + 2$, $p_2 = 3x^2 + 2x - 1$, $p_3 = 2x^2 + x - 3$,
$\mathbb{R}_5$: $u_1 = [1,-1,0,0,0]^T$, $u_2 = [0,1,-1,0,0]^T$, $u_3 = [0,0,1,-1,0]^T$, $u_4 = [0,0,0,1,1]^T$, $u_5 = [-1,0,0,0,1]^T$,

(c) Určete $\mathbf{A_2}\mathbf{A_1}$.

Příklad 5.9. Jsou dána lineární zobrazení $\mathcal{L}_1\colon \mathcal{M}_{2,3} \longrightarrow \mathcal{P}_3$ dané předpisem
$\mathcal{L}_1(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}) = (a-b+2e)x^3 + (b+c+2d)x^2 + (2a+e-f)x + (a+2b+c-e+2d-f)$,
$\mathcal{L}_2\colon \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
$\mathcal{L}_2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = [3a-c, 3b-d, 3c-b, 3d-a, a+b+c+d]^T$.

(a) Určete složené zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{M}_{2,3} \longrightarrow \mathbb{R}_5$,

(b) Určete matice $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}$ lineárních zobrazení $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ a matici $\mathbf{A}$ složeného zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích $\mathcal{M}_{2,3}$: $\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V_4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
$\mathcal{P}_3$: $p_1 = x^3 + x^2 - x - 1$, $p_2 = x^3 - x^2 - x + 1$, $p_3 = -x^3 + x^2 + x + 1$, $p_4 = -x^3 + x^2 - x + 1$,
$\mathbb{R}_5$: $u_1 = [1, 0, -1, 0, 1]^T$, $u_2 = [0, 1, 0, -1, 0]^T$, $u_3 = [1, 1, 1, -1, -1]^T$, $u_4 = [-1, 1, -1, 1, -1]^T$, $u_5 = [1, 1, 0, -1, 1]^T$,

(c) Určete $\mathbf{A_2}\mathbf{A_1}$.

Příklad 5.10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$. Skládáním tohoto zobrazení získáme $\mathcal{L}^2(u) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(u))$, $\mathcal{L}^3(u) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{L}(u)))$, ... Určete předpis zobrazení $\mathcal{L}^k$, dimenzi jádra a obrazu zobrazení $\mathcal{L}^k$ pro každé $k = 1, ..., n$.

1. $n = 3$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_3$, $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ je dané předpisem
   $\mathcal{L}([a, b, c]^T) = [5a + 8b + c, -3a - 5b - c, 2a + 3b]^T$,
2. $n = 3$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_3$, $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ je dané předpisem
   $\mathcal{L}([a, b, c]^T) = [a + b - c, -a + b + c, 2b]^T$,
3. $n = 2$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_3$, $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ je dané předpisem
   $\mathcal{L}([a, b, c]^T) = [-9a + 7b - 3c, -4a + 4b - c, 16a - 11b + 6c]^T$,
4. $n = 3$, $\mathcal{U} = \mathcal{P}_2$, $\mathcal{L}: \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ je dané předpisem
   $\mathcal{L}(ax^2 + bx + c) = (a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a)$,
5. $n = 5$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_4$, $\mathcal{L}: \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_4$ je dané předpisem
   $\mathcal{L}([a, b, c, d]^T) = [2a - 13b - 38c + 13d, -a + 6b + 18c - 6d, a - b - 6c + 3d, 3b + 7c - 2d]^T$,
6. $n = 6$, $\mathcal{U} = \mathcal{P}_3$, $\mathcal{L}: \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3$ je dané předpisem
   $\mathcal{L}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (-3a + 2b - d)x^3 + (-11a + 6b + c - 2d)x^2 + (13a - 5b - 3c)x + (4a - 2b - c + d)$,
7. $n = 2$, $\mathcal{U} = \mathcal{M}_{2,2}$, $\mathcal{L}: \mathcal{M}_{2,2} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$ je dané předpisem
   $\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -18a + 9b - 2c + 4d & 2a + b - d \\ 100a - 45b + 12c - 22d & -26a + 12b - 2c + 7d \end{bmatrix}$.

Příklad 5.11. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}: \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ pro každé $[a, b]^T \in \mathbb{R}_2$ předpisem

$$\mathcal{L}([a, b]^T) = (2a - b)x + (a + 3b).$$

a) Ukažte, že zobrazení $\mathcal{L}$ je izomorfismus.

b) Určete matici $\mathbf{A}$ zobrazení $\mathcal{L}$ ve standardních bázích
   $e_1 = [1, 0]^T$, $e_2 = [0, 1]^T$ prostoru $\mathbb{R}_2$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 1$ prostoru $\mathcal{P}_1$.

c) Určete matici inverzní $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$.

Pro inverzní zobrazení $\mathcal{L}^{-1}: \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ pak platí: $\mathbf{A}^{-1}\widehat{q} = \tilde{v}$.
$\widehat{q}$ jsou souřadnice prvku $q = ax + b$ v bázi e_1, e_2 prostoru $\mathbb{R}_2$,
$\tilde{v}$ jsou souřadnice obrazu v v bázi e_1, e_2 prostoru $\mathbb{R}_2$.

d) Určete $\tilde{v} = \mathbf{A}^{-1}\widehat{q}$.

e) Určete prvek v ze souřadnic $\tilde{v}$ v bázi e_1, e_2 prostoru $\mathbb{R}_2$.

f) Napište předpis inverzního zobrazení $\mathcal{L}^{-1}: \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_2$.