8 - Domácí cvičení č. 8

Příklad 8.1. Určete vlastní čísla, vlastní vektory a Jordanův kanonicky tvar matice $\mathbf{A}$.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ -30 & -8 \end{bmatrix}$,
2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ -34 & -13 \end{bmatrix}$,
3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 17 & 10 & -9 \\ 39 & 21 & -16 \end{bmatrix}$,
4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & -18 & -6 \\ -28 & 42 & 14 \\ 104 & -156 & -52 \end{bmatrix}$,
5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 23 & 8 & -7 \\ -76 & -26 & 24 \\ -13 & -4 & 5 \end{bmatrix}$,
6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -59 & 75 & 27 \\ 41 & -53 & -19 \\ -241 & 309 & 111 \end{bmatrix}$,
7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 32 & 18 & -14 \\ -69 & -40 & 32 \\ -22 & -14 & 12 \end{bmatrix}$,
8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 8 & -4 \end{bmatrix}$.

Příklad 8.2. K matici $\mathbf{A}$ určete Jordanův kanonický tvar $\mathbf{J}$ a matici $\mathbf{T}$. Ověřte, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{TJT^{-1}}$.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & -30 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}$,
2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$,
3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -81 & -47 & 35 \\ 34 & 21 & -14 \\ -132 & -75 & 58 \end{bmatrix}$,
4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 18 & -27 & -9 \\ -42 & 63 & 21 \\ 156 & -234 & -78 \end{bmatrix}$,
5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -13 & -7 & 5 \\ -46 & -28 & 22 \\ -87 & -51 & 39 \end{bmatrix}$,
6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -8 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Příklad 8.3. Určete vlastní čísla lineárního operátoru $L\colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$. Vlastní čísla operátoru určete jako vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ operátoru L ve standardní bázi prostoru $\mathcal{L}$.

1. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1$,
   $L(ax+b) = (a-3b)x + (3a-9b)$,
   použijete matici $\mathbf{A}$ operátoru L v bázi $p_1 = x$, $p_2 = 1$,

2. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1$,
   $L(ax+b) = (45a-26b)x + (78a-46b)$,
   použijete matici $\mathbf{A}$ operátoru L v bázi $p_1 = x$, $p_2 = 1$,

3. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_2$,
   $L([a,b]^T) = [a+3b, -4a+5b]^T$,
   použijete matici $\mathbf{A}$ operátoru L v bázi $e_1 = [1,0]^T$, $e_2 = [0,1]^T$,

4. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$,
   $L([a,b,c]^T) = [7a-2b+c, -3a+2b-3c, -11a+2b-5c]^T$,
   použijete matici $\mathbf{A}$ operátoru L v bázi $e_1 = [1,0,0]^T$, $e_2 = [0,1,0]^T$, $e_3 = [0,0,1]^T$,

5. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_2$,
   $L(ax^2+bx+c) = (17a-6b+5c)x^2 + (4a+4c)x + (-17a+6b-5c)$,
   použijete matici $\mathbf{A}$ operátoru L v bázi $p_1 = x^2$, $p_2 = x$, $p_3 = 1$,

6. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$,
   $L([a,b,c]^T) = [-5a - b + 9c, b + 2c, -b + 4c]^T$,
   použijete matici **A** operátoru L v bázi $e_1 = [1,0,0]^T$, $e_2 = [0,1,0]^T$, $e_3 = [0,0,1]^T$,

7. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_2$,
   $L(ax^2 + bx + c) = (-a - 2b + c)x^2 + (3a - 4b + 3c)x + (3a + 2b + c)$,
   použijete matici **A** operátoru L v bázi $p_1 = x^2$, $p_2 = x$, $p_3 = 1$,

8. $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{2,2}$,
   $L(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 20a - b - 8c - 3d & 52a - 3b - 17c - 9d \\ 30a - 2b - 13c - 4d & 42a - 2b - 17c - 6d \end{bmatrix}$,
   použijete matici **A** operátoru L v bázi $\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

9. $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{2,2}$,
   $L(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -6a + 4b + 6c - 2d & 8a - b - 6c + d \\ -12a + 3b + 10c - 3d & 4a - 7b - 6c + 3d \end{bmatrix}$,
   použijete matici **A** operátoru L v bázi $\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

10. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$,
    $L([a,b,c]^T) = [4b - 8c, -3a + 9b - 15c, -a + 3b - 5c]^T$,
    použijete matici **A** operátoru L v bázi $e_1 = [1,0,0]^T$, $e_2 = [0,1,0]^T$, $e_3 = [0,0,1]^T$.

Příklad 8.4. Určete vlastní čísla lineárního operátoru $L\colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$. Vlastní čísla operátoru určete jako vlastní čísla matice **B** operátoru L v zadané bázi prostoru $\mathcal{L}$.

1. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1$,
   $L(ax + b) = (a - 3b)x + (3a - 9b)$,
   použijete matici **B** operátoru L v bázi $p_1 = 2x - 1$, $p_2 = 3x + 2$,

2. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1$,
   $L(ax + b) = (45a - 26b)x + (78a - 46b)$,
   použijete matici **B** operátoru L v bázi $q_1 = x + 2$, $q_2 = x - 1$,

3. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_2$,
   $L([a,b]^T) = [a + 3b, -4a + 5b]^T$,
   použijete matici **B** operátoru L v bázi $v_1 = [1,3]^T$, $v_2 = [-3,1]^T$,

4. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$,
   $L([a,b,c]^T) = [7a - 2b + c, -3a + 2b - 3c, -11a + 2b - 5c]^T$,
   použijete matici **B** operátoru L v bázi $v_1 = [1,-1,3]^T$, $v_2 = [3,1,-1]^T$, $v_3 = [-1,3,1]^T$,

5. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_2$,
   $L(ax^2 + bx + c) = (17a - 6b + 5c)x^2 + (4a + 4c)x + (-17a + 6b - 5c)$,
   použijete matici **B** operátoru L v bázi $p_1 = x^2 + 2x + 2$, $p_2 = 2x^2 + x + 2$, $p_3 = 2x^2 + 2x + 1$,

6. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$,
   $L([a,b,c]^T) = [-5a - b + 9c, b + 2c, -b + 4c]^T$,
   použijete matici **B** operátoru L v bázi $v_1 = [1,1,2]^T$, $v_2 = [1,2,1]^T$, $v_3 = [2,1,1]^T$,

7. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_2$,
$L(ax^2 + bx + c) = (-a - 2b + c)x^2 + (3a - 4b + 3c)x + (3a + 2b + c)$,
použijete matici $\mathbf{B}$ operátoru L v bázi $q_1 = x^2 + x - 1$, $p_2 = x^2 - x + 1$, $q_3 = -x^2 + x + 1$,

8. $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{2,2}$,
$L(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 20a - b - 8c - 3d & 52a - 3b - 17c - 9d \\ 30a - 2b - 13c - 4d & 42a - 2b - 17c - 6d \end{bmatrix}$,
použijete matici $\mathbf{B}$ operátoru L v bázi $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

9. $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{2,2}$,
$L(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -6a + 4b + 6c - 2d & 8a - b - 6c + d \\ -12a + 3b + 10c - 3d & 4a - 7b - 6c + 3d \end{bmatrix}$,
použijete matici $\mathbf{B}$ operátoru L v bázi $\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{D}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

10. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$,
$L([a, b, c]^T) = [4b - 8c, -3a + 9b - 15c, -a + 3b - 5c]^T$,
použijete matici $\mathbf{B}$ operátoru L v bázi $v_1 = [1, 0, 3]^T$, $v_2 = [1, 1, 1]^T$, $v_3 = [2, -3, 1]^T$.