9 - Domácí cvičení č. 9

Příklad 9.1. Určete ortogonální bázi $v_1, v_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{V} = \mathbb{R}_3$, $(u, v) = u^T v$,
2. $\mathcal{V} = \mathbb{R}_3$, $(u, v) = u^T v$, ortogonální báze bude obsahovat prvek $v_1 = [1, 2, 2]^T$,
3. $\mathcal{V}$ je generován prvky $u_1 = [2, -1, 4, 1, 3]^T$, $u_2 = [-1, 3, -1, 2, -2]^T$, $u_3 = [2, 1, 3, -3, 1]^T$, $u_4 = [3, 3, 6, 0, 2]^T$, $(u, v) = u^T v$,
4. $\mathcal{V}$ je generován prvky $u_1 = 1$, $u_2 = x + 3$, $u_3 = x^2 - 4x$, $(u, v) = \int_{-2}^{1} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
5. $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2$, $(u, v) = \int_{-3}^{3} u(x)v(x)\mathrm{d}x$.

Příklad 9.2. Určete ortonormální bázi $e_1, e_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{V} = \mathbb{R}_4$, $(u, v) = u^T v$,
2. $\mathcal{V} = \mathbb{R}_3$, $(u, v) = u^T v$, ortonormální báze bude obsahovat číselný násobek prvku $v_1 = [1, 2, 3]^T$,
3. $\mathcal{V}$ je generován prvky $u_1 = [1, -1, 1, 0, 1]^T$, $u_2 = [-2, 0, 1, -1, 2]^T$, $u_3 = [2, 1, -2, 2, -1]^T$, $u_4 = [1, 0, 0, 1, 2]^T$, $(u, v) = u^T v$,
4. $\mathcal{V}$ je generován prvky $u_1 = 1$, $u_2 = x + 2$, $u_3 = x^2 + x$, $(u, v) = \int_{-2}^{1} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
5. $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3$, $(u, v) = \int_{-3}^{3} u(x)v(x)\mathrm{d}x$.

Příklad 9.3. Určete ortogonální průmět v_0 prvku v do podprostoru $\mathcal{L}_1$ prostoru $\mathcal{L}$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_3$, $\mathcal{L}_1$ je generován prvky $u_1 = [1, 2, -3]^T$, $u_2 = [0, 1, 3]^T$; $v = [4, 5, 7]^T$, $(u, v) = u^T v$,
2. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_6$, $\mathcal{L}_1$ je generován prvky $u_1 = [1, 2, -1, 1, 3, 0]^T$, $u_2 = [-1, 1, 3, 0, -1, 2]^T$, $u_3 = [3, -1, 0, 2, 1, -1]^T$, $u_4 = [3, 2, 2, 3, 3, 1]^T$; $v = [-14, 11, 3, 10, -7, 0]^T$, $(u, v) = u^T v$,
3. $\mathcal{L} = \mathcal{C}(0, 1)$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{P}_1$; $v = \mathrm{arctg} x$, $(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
4. $\mathcal{L} = \mathcal{C}(-\pi, \pi)$, $\mathcal{L}_1$ je generován prvky $u_1 = 1$, $u_2 = \sin x$, $u_3 = \cos x$, $u_4 = \sin 2x$, $u_5 = \cos 2x$; $v = |x|$, $(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\mathrm{d}x$,
5. $\mathcal{L} = \mathcal{C}(1, 4)$, $\mathcal{L}_1$ je generován prvky $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{x}$, $u_3 = \frac{1}{x^2}$; $v = 3 - \sqrt{x}$, $(u, v) = \int_1^4 u(x)v(x)\mathrm{d}x$.

Příklad 9.4. Metodou nejmenších čtverců určete funkci $f(x)$, která nejlépe aproximuje naměřené hodnoty.

1. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 2.

x	-2	-1	0	1	2	3
y(x)	-10,7	-6,7	-2,6	-2	-2,9	-6,1

2. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 2.

x	-2	-1	0	0	1	1	1	2	3
y(x)	-10,7	-6,7	-2,6	-2,6	-2	-2	-2	-2,9	-6,1

3. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 1.

x	-5	-4	-2	-2	-1	-1	0	1	2
y(x)	0,5	0,9	2,2	2,1	2,4	2,5	2,9	3,4	4,1

4. Funkce $f(x)$ bude z prostoru $\mathcal{V}$, který je generován funkcemi $g_1 = 1$, $g_2 = \frac{1}{x-1}$, $g_3 = \frac{1}{(x-1)^2}$.

x	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2
$y(x)$	20,05	12,9	8	5,1	3,95

5. Funkce $f(x)$ bude polynom stupně 3, který má v bodě 0 hodnotu 2.

x	-2	-1	-1	1	2	2	3
y(x)	-34,1	-6,7	-6,9	5,4	13,8	14,1	41

Příklad 9.5. Je dán podprostor $\mathcal{U}$ prostoru $\mathcal{L}$. Určete dimenzi a bázi ortogonálního doplňku $\mathcal{U}^\perp$ při skalárním násobení (u, v).

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$, $\mathcal{U}$ je generován prvky $u_1 = [1, 2, -1, 3, 2]^T$, $u_2 = [-1, 2, 3, -1, 2]^T$, $u_3 = [1, 6, 1, 6, 3]^T$, $u_4 = [1, 10, 3, 8, 7]^T$, $(u, v) = u^T v$,
2. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_4$, $\mathcal{U}$ je generován prvky $u_1 = [2, -1, 1, 3]^T$, $u_2 = [-1, 2, -1, 1]^T$, $u_3 = [3, 1, 2, -1]^T$, $(u, v) = u^T v$,
3. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_4$, $\mathcal{U}$ je generován prvky $u_1 = x^3 + x$, $u_2 = x - 2$, $u_3 = 2x^3 + 3x - 2$, $(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x$.